UNA FORMULACION ALTERNATIVA PARA EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN ELASTODINAMICA: METODO DE LA MATRIZ DE MASA EQUIVALENTE

Arrebola Vázquez, Manuel y Domínguez Abascal. José

E.T.S. de Ingenieros Industriales de la Uníversidad de Sevi!la
Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla

Resumen.-En esta comunicación se presenta una técnica para el análisis de problemas elastodinámicos bidimensionales basada en el Método de los Elementos de Contorno. Se plantea una formulación alternativa que da lugar al Método de la Matriz de Masa Equivalente, que representa una extensión dinámica de la formulación estática. La matriz de masa, que se obtiene a partir de la solución fundamental estática *y* de un conjunto de funciones especiales, modeliza el efecto de las fuerzas de inercia del cuerpo bajo estudio. Se obtiene así un sistema de ecuaciones diferenciales. cuya integración numérica proporciona la respuesta en el tiempo. La exactitud del método se comprueba con algunos ejemplos de aplicación.

Abstract.- In this paper a procedure for the analysis of bidimensional elastodynamic problems is presented. The procedure is based on the Boundary Element Method. An alternative formulation which gives ríse to the Equivalent Mass MatriI Method is stated. This represents an extension of the static formulation to the dynamic field. The mass matríI, which is obtained from the static fundamental solution and from a set of special functions, accounts for the effect of inertial forces in the body under consideration. In this way, a differential equation system is obtained, the integration of which results in the time response. Some eiamples check for the method accuracy.

1.- INTRODUCCION

El método de los Elementos de Contorno (M.E.C.) se ha ido progresivamente utilizando para solucionar problemas comunes en la Ingeniería Mecánica durante los últimos años. Inicialmente formulado para problemas de Elasticidad estática, resulta potente para el análisis de estructuras sometidas a vibraciones forzadas, así como en la deteminación de la rigidez dinámica de cimentaciones en los problemas de interacción suelo-estructura. Especial relieve adquiere en el análisis de concentraciones de tensiones dentro de la Mecánica de la Fractura.

En problemas elastodinámicos. junto a la formulación del M.E.C. en el dominio de la frecuencia. usual para el análisis de la respuesta permanente, y a la formulación en el domin.ío de! tiempo, empleada en et cálculo de la respuesta transitoria. surge el Método de la Matriz de Masa Equivalente como una formulación alternativa. Esta nueva formulación tiene como particularidad el empleo de la solución fundamental estática de Kelvin para la generación de la ecuación integral de los movimientos del contorno. Esto simplifica sobremanera el tratamiento numérico pues esta solución es más sencilla de tratar que la dinámica. Es, pues, una extensión al dominio del tiempo de la formulación estática.

El Método de la Matriz de Masa Equivalente permite generar una matriz de masa del sistema en estudio para así tener en cuenta el efecto dinámico de la inercia. La integración numérica del sistema de ecuaciones diferenciales que modela el cuerpo proporcionará la respuesta en el tiempo bajo la acción de una solicitación dinámica cualquiera.

2.-METOOO DE LA MATRIZ DE MASA EQUIVALENTE

La formulación básica de este método parte de la ecuación de equilibrio de la Elasticidad dinámica. Mediante la aplicación del teorema de reciprocidad entre un estado dinámico real y uno virtual estático se obtiene la formulación integral de los movimientos del coniorno. Posteriomente se realiza la discretización geométrica del mismo para generar el sistema de. ecuaciones diferenciales representativo de la dinámica del cuerpo.

2.2.-Ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad

Las ecuaciones de equilibrio interno de un cuerpo sólido, homogéneo. elástico y lineal n con. contorno r - $\Gamma_1 + \Gamma_2$ son

cr¡;,r bi. Pui (2.1)

siendo ui las componentes del vector de aceleraciones. ú¡· u¡(I.t). ªii el tensor de tensiones. bi las componentes del vector fuerzas por unidad de volumen y p la densidad del material.

Las condiciones de contorno se definen como

J.t¡· u¡ (t) movimientos conocidos en r

1¡-1¡ (t) tracciones conocidas en r

siendo ti• ºii n¡ y n¡ las componentes de la normal exterior.

Las condiciones iniciales imponen la posición y la velocidad de todos los puntos en t-0. Así

!I. (I.O)- Yo (.1)

1tI.O). Uo (.1)

Considerando fuerzas de volumen invariables con el tiempo, se puede analizar por separado su efecto y luego, por superposición, añadirlo al efecto dinámico de las fuerzas de inercia.

2.1.-Solución fundamental estática

La solución fundamental de Kelvin en Elasticidad bidimensional representa la solución de la ecuación (2.1) cuando ú¡·O y la única fuerza actuante es una carga puntual unitaria en **t** . Los movimientos y las tracciones resultantes son

U1 (I)- u jj (I. ξ) e1

t1(1)- Tjj (I. ξ) eJ (2.2)

siendo ei la componente j del vector director de la carga y

Uii (I. **t**)- [l/81t(l-v)µ.I [(3-4v) ln(l/r) ºit

+ r.i r.¡l

Tji (I. **t**)=-[1/8n(l-v)µ.I (3r/3Ttl(l-2v) 6¡¡+

2 r.i r} +(1-2v) [n¡ r,r r,i])

(2.3).

con" módulo de Poison, µ módulo de rigidez a torsión, 8¡¡ delta de Dirac, n normal exterior en I. r la distancia de ξ a **I** y r.i•3r/31i.

2.3.-Teorema de reciprocidad.

Este conocido teorema de la Elasticidad es aplicable entre dos estados de tensión-deformación, uno dinámico y otro estático. Esto va a permitir la obtención de la representación integral de los movimientos a partir de la solución fundamental anteriomente expuesta.

Sea un estado elatodinámico 1 definido por unos movimientos en el dominio Ω u/(Lt), por unas aceleraciones de los puntos ui¹(I,t) y por unas tracciones ti¹(1,t) en el contorno r, y un estado elastostático 2 sobre el mismo dominio caracterizado por unos movimientos u¡²(I.t) y unas tracciones en el contorno t/(I.t). El teorema establece la igualdad entre los trabajos producidos por la tensiones de un estado sobre las deformaciones del otro en cualquier instante

de tiempo. Matemáticamente

$$\int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{x})\,\sigma^1(\mathbf{x},t)\,d\Omega = \int_\Omega \sigma^2(\mathbf{x})\,\varepsilon^1(\mathbf{x},t)\,d\Omega \quad (2.4)$$

Realizando las transformaciones adecuadas . la ecuación anterior se puede expresar también

$$\int_\Gamma t_i^1\, u_i^2\, d\Gamma + \int_\Omega b_i^1\, u_i^2\, d\Omega - \rho \int_\Omega \ddot{u}_i^1\, u_i^2\, d\Omega =$$

$$= \int_\Gamma t_i^2\, u_i^1\, d\Gamma + \int_\Omega b_i^2\, u_i^1\, d\Gamma \quad (2.5)$$

2.4.-Representación integral

La aplicación del teorema de reciprocidad. ecuación (2.4), entre el estado elastodinámico real 1 y un estado ficticio 2. que es el estado de Kelvin, permite obtener una formulación integral que relaciona los movimientos y las tracciones del contorno con las aceleraciones del dominio y la solución fundamental. Los valores de las integrales de la ecuación (2.S) quedan por tanto así

lrt/u/ dr-Ir ti (I. t) U¡¡ (I.) dr ·e¡ (2.6)

J0bi u¡² do· l0 b¡ (I. t) Ui¡(I.) do ·ej (2.7)

p i0u¡¹ u/ do -p l0 ui (I. t) Ui¡(I.) dO ·ej (2.8)

Irt/ u¡¹ df = lr u¡ (I. t) T¡i (I.) df ·ej (2.9)

!0 b¡² ui ¹dr= l00(I. t) u¡ (I. t) do ·e¡=

=c¡iO ui (I. t) · ei (2.10)

siendo cii un coeficiente entre O y 1 que es función de la posición de ξ con respecto a n y de la geometría del contorno si ξ está en r. Considerando aparte como se dijo el efecto estático de b¡(L t) el teorema de reciprocidad (2.5) se convierte. introduciendo las ecuaciones (2.6) a (2.10). en la extensión de la identidad de Somigliana

c¡i(l u¡ (I. t) - Ir ti (I. t) U¡i (I.) dr -

- lr ui lI. t) Tii(I. df- p !0 üi(I. t)U¡i< I. do

(2.11)

Esta expresión relaciona el movimiento según la direcion i de un punto **t** del contorno. en un instante t, con las tracciones y desplazamientos del contorno con los valores de la solucion fundamental en el mismo y con las aceleraciones y los movimientos de la solución fundamental en todo el dominio. Esta ecuación integral no es resoluble analíticamente por lo que se hace necesario un procedimiento numénco. La discretización del contorno en düerentes elementos permitirá abordar esta cuestión. como se verá más adelante. Previamente, la integral de dominio que aparece en la ecuación (2.11) ha de traf}sformarse en una integral de contorno para su posterior discretización.

2.S.-Transformación de ta integral de dominio

La integral de dominio contiene las aceleraciones desconocidas u¡(I.t) y representa los efectos de las fuerzas de inercia del cuerpo. La aproximación de esta integral consta de dos pasos:

1.- Aproximación de los desplazamientos y aceleraciones del dominio mediante unas funciones conocidas fk(Il.

2.- Aplicación de la identidad de Somi.glíana. ecuación (2.11) . entre el estado de la solución fundamental y el provocado por unas fuerzas de volumen, estáticas también, f^k (l).

Así, los movimientos se expresan de la siguiente forma

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \alpha_i^k(t) \cdot f^k(\mathbf{x}) \qquad k=1, m \quad (2.12)$$

Las aceleraciones se obtienen por derivación con respecto al tiempo

$$\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) = \ddot{\alpha}_i^k(t) \cdot f^k(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

Sustituyendo este valor en la integral de dominio de (2.11) queda

p !0 üi(1. t)U¡i(I, dO=

- pªi^k(t) f0 f^k¡(1)uii(I. do (2.14)

La integral de dominio resultante contiene sólo funciones conocidas. elegidas previamente. Es esta nueva integral la que va a transformarse.

Se considera el estado de Kelvin como estado 2. Sean un conjunto de estados 1 diferentes sobre o provocados por unas fuerzas de volumen r^k(I). Puesto que en cada estado k se pueden aplicar dichas fuerzas en I direcciones (dos en caso bidimensional), cada estado quedará definido por la ecuación de equilibrio

$$\text{hm.m}^{1t} \ - \ \delta_{li}^{\ i} \ -f_k \qquad (2.1\ S)$$

siendo óli la delta de Kroneck er y $^{a}{}_{li}i^k$ el tensor de tensiones ªii correspondiente a la aplicación sobre o de una fuerza de volumen fktl) según la direccion l.

Cada uno de los k·l estados quedará definido por unos campos de desplazamientos y de tracciones en el contorno, ,1{(1) y 11u^k(I). respectivamente. Aplicando la ecuación (2.14) entre un estado tipo del conjunto de estados 1 y et estado fundamental 2 quedará, despejando la integral de dominio resultante

$$\int_\Omega U_{ji}\,\delta_{li}\,f^k\,d\Omega = -c_{ji}\,\Psi_{li}{}^k - \int_\Gamma T_{ji}\,\Psi_{li}{}^k\,d\Gamma +$$

$$+\int_\Gamma U_{ji}\,\eta_{li}{}^k\,d\Gamma \qquad (2.16)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2.14) ya se puede expresar la identidad de Somigliana, ecuación (2.11), con sólo integrales de contorno

cii ui+ Ir Tji ui dr • p I fr Uji 11/ dr -cji 'P I-

- Ir Tii Ψ_{1i}^k dr I a ... r uii I'fli^k df (2.17)

Esta expresión representa una ecuación integral en la dirección i para cada uno de los infintos puntos t del contorno r del cuerpo. Ante la imposibilidad de una resolución analítica, el M.E.C. proporciona el tratamiento adecuado para poder abordarla.

2.6.-Discretización del contorno

Se considera el contorno r del cuerpo dividido en una serie de elementos que contienen uno o más nodos representativos. Las incógnitas del problema sólo se calculan en estos nodos suponiendo una determinada forma de variación de las incógnitas entre el nodo o nodos de cada elemento. Así se logra disminuir la dimensión del problema.

Para cada nodo del contorno se tiene una ecuación del tipo (2.17). Las integrales de esta ecuación pueden ser discretizadas como suma de integrales sobre cada elemento. Así, por ejemplo

$$\int_\Gamma U_{ji} t_i\, d\Gamma = \sum \int_{\Gamma e} U_{ji}\, t_i\, d\Gamma =$$

= L fre!U]{t)dr e-1.2.......E (2.18)

$$\int_\Gamma T_{ji}\,\Psi_{li}{}^k\,d\Gamma = \sum \int_{\Gamma e} T_{ji}\,\Psi_{li}{}^k\,d\Gamma =$$

= í:freIT]['PI^k dr e-1.2.......E (2.19)

í: indica sumatorio para todos los E elementos del contorno.

Si se aproximan las incógnitas en función de los valores nodales a través de las funciones de interpolación, se tendrá, por ejemplo

(ü • [<PI (t)e (u) - [<PI (u)e

$$[\eta]^k = [\Phi]\,[\eta]^k{}_e \qquad [\Psi]^k = [\Phi]\,[\Psi]^k{}_e \quad (2.20)$$

1:1onde el subindice e indica valores evaluados en los nodos del elemento e. Por tanto. la ecuación (2.17) para un nodo n del contorno quedará

(cln(u}n• L (hle (u}e +p([cln ['I'I n +í: (gle [11]^{k}e_

- L (hle ('I'I^{k}e) (a J^k. í: (gle (t)e (2.21)

Escribiendo esta ecuación para cada uno de los N nodos y realizando un ensamblaje adecuado de todas ellas con matrices globales y vectores (u) ,{t} y (a} que contienen los valores de todos los nodos del contorno, quedará

[HI {u} • p { [G) (11) - [HJ ['I')) (a} - [G) {t} (2.22)

Aplicando la ecuación (2.13) en cada nodo se tendrá

{u} • [F] {a} (2.23)

donde [FI contiene los valores de las funciones f^k en los nodos. Si se eligen un número de funciones k igual al numero de nodos Y linealmente independientes, [FI es regular. Luego (2.22) puede invertirse

{a} -IFI-1 {u} .. [EI {u} (2.24)

Sustituyendo el valor de (a} dado por (2.24) en la ecuación (2.22) se obtiene

[MI (u)+ [HI (u) - [GI (t) (2.25)

siendo

IMJ - P (IGJ [111- IHI ['fil} [EI (2.26)

la matriz de masa del sistema.

La ecuación (2.25) representa un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuya resolución proporciona la respuesta dinámica del contorno del cuerpo. Puede ser resuelto me ia te procedimientos numericos y la aplicac1on de las condiciones iniciales y de contorno. Las matrices IGJ y [HI son idénticas a las obtenidas con la formulación estática. Por tanto, este método es capaz de generar una matriz [MI de masa representativa.

Un tipo de funciones especialmente sencillas de evaluar y de buen funcionamiento comprobado son

$$f^k(\mathbf{X}) = C - r\,(\mathbf{A_k}, \mathbf{X}) \qquad (2.26)$$

siendo r(A$_t$,I) la distancia del punto de referencia A$_t$ al punto I donde se evalúa y C una constante cuyo valor puede tomarse igual a una dimensión característica del cuerpo. Los campos de desplazamientos y tracciones generados por las fuerzas de volumen ó1i^k son calculados a partir de la ecuación de Navier.

3.- APLICACIONES

El método aquí presentado ha sido implementado en un programa de ordenador para el análisis de problemas elastodinámicos bidimensionales. Se han empleado elementos de contorno parabólicos. Las matrices [P l. [11] y [FI necesarias para la construcción de la matriz de masa se generan evaluando funciones conocidas en los nodos del contorno. La ecuación (2.2 S) se ha resuelto con e! método de integración directa de Houbolt que asegura su estabilidad incondicional.

3.1.-Ejemolo 1

Se trata de una banda infinita en reposo . empotrada en un extremo y libre en el otro. a la que se aplica un escalón unitario de carga (función de Heaviside). Por la simetría del problema el modelo simplificado es el de la figura 1. Este problema tiene una solución teórica conocida (solución de la ecuación de Navier). Con ella se han comparado los resultados de un modelo con 12 elementos de contorno. tal como se puede ver en las figuras l y 2.

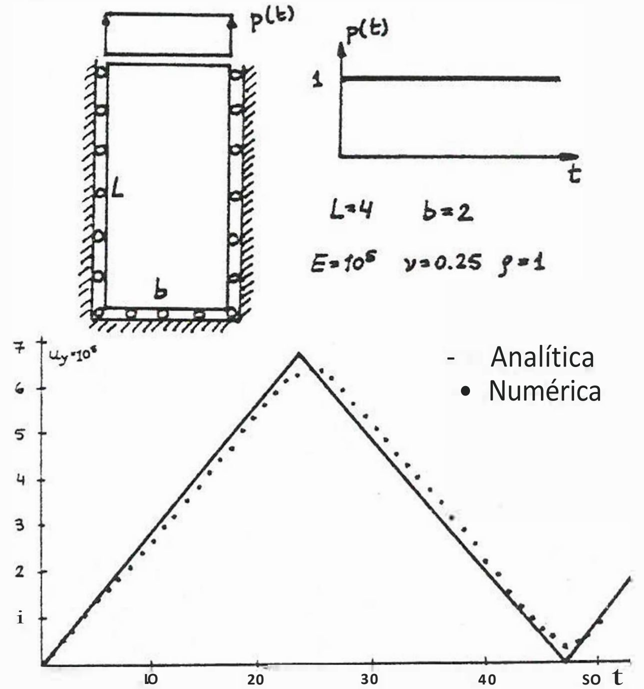

FIGURA 1.-Modelo y desplazamiento del e1tremo libre.

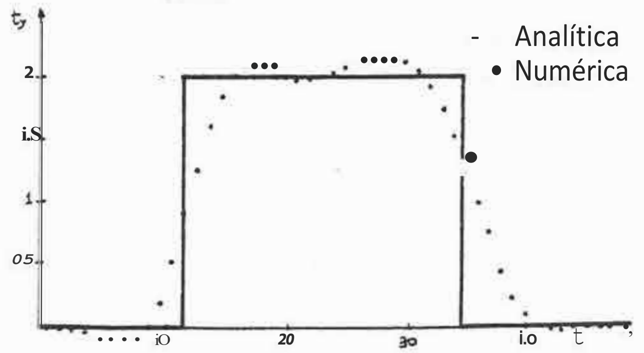

FIGURA 2.-Tracción en el empotramiento.

3.2.-Ejemoto 2

Un rectángulo de 2x4 de material con propiedades E-1 o5, v=0.2S y p:: 1, sometido a una carga transversal de corta duración según indica la figura 3. El modelo de elementos de contorno consta de doce elementos parabólicos. Los resultados obtenidos se han comparado con los que proporciona el programa de elementos finitos SAP IV usando una dicretización muy fina de 128 nodos.

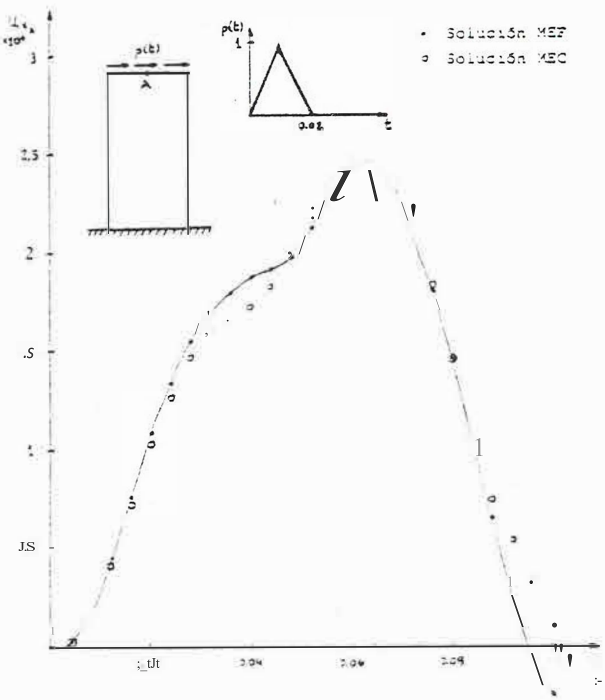

FIGURA 3.-Movimiento horizontal de A.

4.-CONCLUSIONES

El Método de la Matriz de Masa Equivalente aquí desarrollado representa una técnica numérica de gran potencia y sencillez para el análisis de problemas elastodinámicos en el dominio del tiempo, dentro del Método de los ementos de Contorno. Aprovecha los datos del modelo estático y genera una matriz de masa para la extensión dinámica. Los resultados obtenidos con su implementación para elementos parabólicos muestran su potencia incluso con discretizaciones muy poco finas. Un desarrollo posterior deberá incluir la modelización del amortiguamiento del material. así como el estudio de diferentes funciones de aproximación.

5.- REFERENCIAS

1.- Domínguez Abascal, J. "Cálculo de tensiones en las inmediaciones de anclajes. Aplicacion del Método de los Elementos de Contorno". Tesis E.T.S.I.I. de Sevilla.1977

2.- Martínez García, J. . Elementos de contorno isoparamétricos en los problemas de concentración de tensiones". Proyecto Fin de Carrera E.T.S.I.I. de Sevilla.! 983.

3.- Brebbia, C.A. "Transient dynamic analysis by the Boundary Element Method". Proceeding Sth International Conference Hiroshima.1983.

4.- Nardini, D, Brebbia, C.A. " A new approach to free vibration analysis using boundary elements". Appl. Math. Modelling Vol. 7. 1983.

5.- Arrebola Vázquez. M. "Análisis de problemas elastodinámicos mediante el Método de los Elementos de Contorno: Método de la Matriz de Masa Equivalente". Proyecto Fin de Carrera. E.T.S.I.I. de Sevilla.1987.