EL USO DEL METOCO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN EL CALCULO DINAM!CO DE PROBLEMAS AXILSIMETRICOS.

Emperador, J.M. **†**; Dominguez, J. **††**

S.7.S. !e r geniercs : ! s:rial =s :e Las Pal=as :tra !ei :entro s;n (afira 3a:a), 35017 tas ?al=as :e .:. tt s.:-.s. C.e ::1geni r ::s : dt!s":r!al =s .:!eSevi:1a :,.,;en:.:!a2ei:-:.a) ercedes s/n, 410 :2 Sevilla.

Resumen. - S: o jeti'lc je es:a comunicación es :ostrar la ::exi i:i:lad :!e: dto:!o !e :os E:e=entos :e Co torno para a cr:!ar e: ci:: :o :!e :as :.=pe:!ancias !:.ni=icas :!e ci entaciones r!gidas!=Q.-=!a :!e revo:ución e= e i:las en :ed:.:s omogénecs y es:ratifica:!os. A!e=as :!e presentar :a fcr= :aci n !esarrc::a:!a. el =, o:!o se aplica al casc de e:me t ac:. :les samiesféricas poniendoe !e a :f:.es:.o cier::s aspect:s !es co=portamien:o y :a :.n:: encia e :os diferentes fac:cres s: re :as fice je a=crtig a=:entc y rig:dez re!ativa :9 :a ase para e: caso !e terrenos es:ra:ificados e :ipc i:apa. Les res ::a!cs c ten::!cs se ::=paran con :es :!e ::res a :cres.

Abstrac:t.- The objetive of this papar is to show the flexibility of he B.E.M. fer calculation of the dynamic impedances cf axisymmetric rigid :oundations in homogeneucs and layered media.

3eside introducing the below formulation the ethod is applied to the case of hemispherical foundation in order to show cartain aspects of its behavior and the influenca of different factors upen dynamical impedances such as intarnal soil damping and relativa rigidity of the base in the case of two layered media.

T e results are co pared with those o! cther au hors.

1 • INTR. COUCCI ON

n :es J:::.=:s a?.cs. el Métcco je :os E:e=entcs :!e :entorno se ha ti::zad para el cálc lc de las : pedancias :iná icas de ci=entaciones r!;idas con ariada tipclogia y s s!er.taias en !iferentes odelcs da terreno. as pri eras aplicaciones del método datan e f: ales e la decada ar. e:- r .::,1, pa!"'a =.imen-taciones recta gulares s__:ª an semiespacio horcgeneo. Ala!"=:in at al...,/2/ trataren a: =is o problema mediante un ódelo bidi=ensional. Abascal /3/ extendió el estu:!io al caso :9 :i=entaciones caadradas. con m6celos i y tridimensionales y dentro del primero de al:cs :onte=pl6 terrenos con estratificación cualquiera. Cano /4/; Alarcón. Dominguez y Gomez-Lera /5/ aplicarón el M.E.c. a cimentaciones superficiales ri;idas axilsim,tricas en suelos homogéneos y estratificados horizontalmente. Emperador y Dominguez. 16/ y /7/, extienden !a formulación anterior a ci entaciones embebidas en terrenos del mismo tipo que les autores anteriores. Todas estas publicaciones abordan el problema suponiendo que la excitación es armónica y presentan ?alores de las impedancias en función de la frecuencia.

El Método de los Elementos de Contorno resulta muy adecuado para la resolución de este tipo de problemas ya ue por una parte permite el estudio del mismo con sólo discretizar su superficie reduciendose su dimensión en un orden y por otra los medios no acotados, como el suelo, r.o precisan contorno de cierre ya que se satisfacen las condiciones de radiación y regularidad. ?ara abordar este tipo de problemas se han u ilizado otros métodos analíticos, semianalíticos y numéricos, con alguno de los cuales se

comparará.

El uso del M.s.c. para problemas axilsimétriccs presenta ciertas ventajas ya que ccn el:cs tan solo será necesario discretizar la linea 6enerat..:z 3e la superficie de revoluc on. Para problemas estáticos fue ilevada acabo aor Kermanidis /8/ Y Cruse /9/. Estos utores utilizan la solución fundamental correspondiente a una carga anular que se expresa en !ur.ción de ir.tegrales el{pticas o funciones de Legendre que hacen su integración astante tediosa. n el caso dinámico estacionario se hace aun as dificil el canejc de la solución fundamental anular pues -conduce a integrales sc re una linea infinita 🙂 :unciones de Hankel. Sste hecho a llevado al uso de la solución fundamental tridimensional, expresada en = c Cenadas ci!{ dricas para !as aplicaciones dinámicas e prcb:emas con si=etria de revolución /4/,;5/,/5/,/7;.

En este articulo se muestra la aplicación del Stodo y la f r u!ación desarrollada en /5/ a problemas axilsi=étricos en los que los contornos no sen superficies exclusivamente normales a los ejes radial y vertical tal como el cálculo de las i=pedancias dir.ámicas !e na cimen ación semiesférica sobre un edio homogéneo o estratificado.

2. FORM\JLACIOH DEL PROBLEMA

:,a ecuación :ásica del M.E.C. puede escribirse en su forma =ás conocida para n problema dinámico en tres !i er.siones co o:

Si la sol ción fundamental y las variables en el con orno son expresadas en coordenadas ci!:r.dricas mediante las matrices de giro L y L', expresadas por:

Los puntos p y q son los puntos de colocación y de observación. LLarnando a las variables del contorno en coordenadas cil{ ; icas u^c y t se puede poner la ecuación báSica =c o:

$$\underline{C}^{\mathbf{G}}(\mathbf{p}) \ \underline{u}^{\mathbf{G}}(\mathbf{p}) + \int_{\Gamma} \ \underline{T}^{\mathbf{G}} \ \underline{u}^{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \ \underline{t}^{\mathbf{G}} \ \underline{t}^{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) d\Gamma$$
(3)

Dado que el punto de colccación pes fijo, p ede tc arse como a'=O y las expresiones de les ter.sores :e la solución fundamental quedan :

$$U_{21}^{c} = \begin{bmatrix} U_{11}^{c} + U_{12}^{s} & -U_{U}^{s} + U_{12}^{e} & U_{13}^{-} \\ U_{21}^{c} + U_{22}^{s} & -U_{13}^{s} + U_{22}^{c} & U_{23}^{c} \\ U_{31}^{c} + U_{32}^{s} & -U_{31}^{s} + U_{32}^{c} & U_{33}^{c} \end{bmatrix}$$
(4)

donde c=cos8 y s=sene

Cuando las condiciones de contorno son axilsimétricas. todas las variables son ir.dependientes de la coordenada e. Si se discrgtiza el contorno de la sección meridiana en segmentos rectilir.eos sobre los que se supone un valor constante de las variables la ecuación (3) puede escribirse como:

$$f^{\circ}(p) \circ (p) + i = , \{f: Jrq! \circ pd, qde \} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{0}^{2\pi} \int_{0} U^{\alpha} \rho d\Gamma_{q} d\theta \right\} \pm_{q}^{\alpha}$$
(5)

Las integrales de esta ecuación pueden realizarse mediante una doble cuadratura de Gauss excepto en el caso en que los puntos pi q coinciden. que se efectua analíticamente en el plano p-z y numéricamente según 8, resultando la expresión:

$$C^{\mathbf{G}}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{G}}}{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{q}=\mathbf{i}}^{\mathbf{G}} H^{\mathbf{G}} = \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{G}}}{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{q}=\mathbf{i}}^{\mathbf{G}} G^{\mathbf{G}} = \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{G}}}{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{G}}}{\mathbf{q}} \quad (\mathbf{\delta})$$

que permite, una vez impuestas las condiciones de contorno. resolver un sistema de ecuaciones algebraico que proporcionará los valores de las incógnitas sobre el contorno. Cuando éstas no tienen simetría de revolución el problema puede ser resuelto mediante la descomposición del mismo en problemas planos desacoplados entre si a través de un desarrollo en **serie** de Fourier de las condiciones de contorno a lo largo de la coordenada cicunferencial e. /10/, de la forma:



u=)(cosna+u° senn9) **z** n=o **∺z** ?ara cada odo de **:a serie** ?Uede escribirse n s stema :e ecuaciones. ya d:.sc etizad so re sl ::on orno, lel =is=c tipo q e e! :s> con !a :iferer.cia e q'e '-s .-- e"' 'en <>s •e ' "'lU"'"-;a H ;_G ;e ; ti;; ;;;a i; ia '; te;;; i6n :e la soluc:.6!l f'..; damenta.l pcr:derada por funcio::es sen r:9 e ces :"":9, 3 lo largo je :a c=crdenada circunferencial: es decir:

$$\int_{0}^{2\pi} \left[\int_{\Gamma_{q}}^{U_{q}^{G}} \sin n\theta \rho d\Gamma_{q} \right] d\theta$$

$$\int_{0}^{2\pi} \left[\int_{\Gamma_{q}}^{U_{q}^{G}} \cos n\theta \rho d\Gamma_{q} \right] d\theta$$
(8)

3. IMPEDAHCIA DINAMICA DE CIMETITACIONES SEMIESFELUCAS EN UN SUELO HOMOGENEO

!n ap:icación ;9 todo :0 anterior sea na ci:entaciór. semiesférica sin :asa sc!!ada a n se=iespacio homogóneo visccelástico !e jensidad p. :6dulo de rigidez :rans7ersal p. :ód lo ;9 ?oissc e : :ica ie o;ti;uamientc "isccsc f; siendc e: :ódu:o co=?lejo

$\underline{\mathbf{w}}^{\mathrm{C}} = \mathbf{w} \mathbf{!} = \dots \mathbf{...} \mathbf{...} \mathbf{...} \mathbf{...} \mathbf{...}$

El estadio se ::eva a.ca o :ediante na discretización el pe de la que se =usst a e :a ::1.-:



Fig.-1 Discretizacidn del :cn:ornc

?ara el cálculo de las impedancias correspondientes a los =cvimientos de orsión y vertical, desacolplados entre si, es suficiente prescribir n Yalor unitario de los :srnos en la i terfase cirniento suelo y tensinas nulas en la superficie libre. La impedancia se ob iene ediante la integración de las tensiones resultantes en los elementos situados en la interfase. En el caso de las impedancias correspondientes a los movimientos horizontal y cabeceo, es necesario tener en cuenta el desarrollo en serie de Fourier (7) reducido a un solo término. n::.

En las figuras 2a y b, se ues ran, en lir.ea centinua. las partes real e ima;inaria de las i=pedancias correspondientes a algunos ce les movimientos de sólido rígido anteriores para una cimentación semiesférica de radio uniodad y so re un sem:espacio cuyas carac eristicas mecánicas ser.:

=f=1. =0.25 y =5%

frente a la !rec encia a.di ens; cnal ao-wric, en '..lrrango que va desde cero hasta seis. En.las ismas gráficas se incluyen las curvas obtenijas ?Or Luce y Wong /ll/, utilizando na scl ci6r. fundamental correspondiente a una carga puntual armónica actuando sobre un semiespacio. para un medio de identicas caracterist:cas ecánicas y con n amortiquamiento del 1%; asimismo. a efectos de na mejor comparación, ser.a incluido, - · - . na extrapolación de es mismos para un amortiguamiento del 5%. Les resul adcs que se presentan se han obtenido con 62 elementos de contorno axilsimétricos diez de ei!cs en la interfase y el resto en la superficie libre, manteniendose s s tamaños respectivos inferiores a A/5 y A/4. La distancia A de superficie libre discretizada es de A lSR.



Fig .-2a Impedancia Vertical cimentación semiesférica en un semiespacio homogéneo



Cc:::c puede o ser arse 9n las f:.;uras **aparente ente** anntcs , ::!:s !:.s:repan. fundamental:::en e en :a parte real !e la i=:pedanc.ia. Es-;o es 3.ebi:!o a la extrapolación real:.zada a fin de cok.parar es ltad s =e i:.s in o ín ice da amortiguamiento y se pone de manifiesto en :a f:.g.-3. en !a q e sa muestran les resu::ados obtenidos por al M.E.C. y una solución exacta obtenida por Luco. _ ll/ y ,:2; pa a !a i:::pedancia de :ors on, en la :;.e se observa la co:.ncidencia de a=bas gráficas en odo el rango de frecuencias estudia!Q.

La soluciór. ¿91 M.E.C. on simetria de revolucién presenta para va:ores del amortiguamiento :ajos una oscilación de los valores ¿a las impedancias a frecuencias ed as y altas, que se incrementa a medida que disminuye el valor del parámetro. A !:.n de evitar esta oscilación indeseada se ensayaren diversos tipos de discretizaciones.



, ariandose tani:o el tamaño de 1-::s elemntos como el valor de la distancia A. Esto uso de manifiesto la gran influenci de la cantidad de suelo libre discretizada lo que puede indicar a existencia en el módelo de ondas elásticas distintas de las P y S, tales como las de Rayleigh adn cuando no asten recogidas implicitamente en la formulación i=plementada. El hecho de utilizar un amortiguamiento cal orden del 5% no es una limitación excesivamente importante ya que la practica totalidad de los materiales rsales son amortiquados.

4. SUELO ESTRATIFICADO

Cuando el terreno no puede ser modelado correctamente por 11n semiespacio homogéneo de idc **a** las aráct9risticas inherentes al mismo. estratos de potencias y materiales diferentes o bien interesa simular una rigidización progresiva la con profundidad, es conveniente disponer de métodos que permitan el empleo de.estos modelos de suel0.

A continuación se presenta la aplicación del M.E.C. axilsimétrico al cálculo de las impedancias de cimentaciones semiesféricas en medios bicapa. En este caso se recurre a discretizar la interfase entre estratos por medio de elementos de contorno además de los necesarios para modelar el semiespacio homogéneo.

El estrato superior s asienta sobre un medio deformable mas rígido. El parámetro que cobra importancia es la rigidez relativa de ambos estratos, Res que está dado por la relación de las velocidades de propagación de las ondas S. Rcs:Cs2/Cs,. Se presentan а continuación. Fig 4a y 4b, las impedancias correspondientes alos movimientos vertical y de torsión de una cimentación semiesférica embebida en un estrato de caracteristicas identicas a las del semiespacio

del ejemplo anterior y con una potencia relativa H/R:2, s'..lstentado sobre un semiespacio cuya rigidez transversal se aria lo necesario para obtener unos va.lc;e^{\$} ce Rcs:2,4.100. este Últi o con objeto de simular una :ase rígida riuy utilizada en les modelos de E.F.



Fig .-4a :mpedancia Vertical. medio bicapa

En las figuras se han incluido las gráficas obtenidas para el semiespacio, normalizadas por la rigidez estática a efectos de comparación debido a que los autores no han encontrado en la literatura resultados eq ivalentes ccn los que poder contrastar.

Del análisis de las figuras se puede afirmar que el comportamiento de la cimentación en este caso difiere notablemente del ue presenta en el apartado anterior. La impedancia correspondiente al movimiento de sólido rígido vertical presenta una marc da variación con la frecuencia. tanto en su parte real como en la .imaginaria, con picos y valles asociados a las diferentes frecuencias propias del estrato. Los valores del coeficiente de.



amortiguamiento toma valores inferiores a los del semiespacío, creciendo estos a medida que decrece Res, lo que indica una mayor extracción de energía del modelo cuanto más deformable es la base. En cuanto a la **parte** real se observa como se incrementa el valor abso'luto de los picos y un mejor ajuste de los mismos a las frecuencias citadas a medida que se incrementa el valor de Rc:s. ?ara el valor inferior de éste último parámetro se observa como. en la parte real de la impedancia. aparecen unas oscilaciones las cuales no pueden asociarse a ninguna frecuencia propia je estrato correspondiente a las ondas Pos Y que tienden a desaparecer cuando se incrementa la rigidez de la base lo ::;ue hace pensar de nuevo la existencia dentro del modelo de ondas distintas a las ya mencionadas que influyen en el comportamiento de la cimentación.

La impedancia de torsión presenta una variación muy **suave** con la frecuencia superponiendose tanto la **parte real** como la **imaginaria** sobre la ;rá!ica d: iliedio homogéneo siendo por ello ir:-elevante la influencia de la i;idez relativa ya que para este tipo de ovimiento tan solo influyen las or.das SH..

5. CONCLUSIONES

Esta co unicaciér. pretende mostrar la potencia y !lexibilidad del Metodo de !os S!ementos de Contorno con simetría de revolución a la resolucién de algunos problemas elastcdinámicos y en particular **se** ha aplicado al cálculo de las i:pedancias dinámicas de cimentacicr.es semiesféricas embebidas en suelos tanto homogéneos como estra"ificajos, este mismo método había sido utilizado previamente /7/ para el case de cimentaciones cilíndricas.

Los rss:.;::ados obtenidos se han co paradc 2at:s!actoriamente con les de c:,cs a:.;tores que emplean iliétodos de resolución diferentes. Se ha incluido n estudie de la influencia de la rigidez relativa del semi espacio soporte. : método propuesto presenta no o:s ante ciertas limi:acicnes en c:.;anto al [::dice de a ortiguamiento a tilizar accnsejandose no bajar ;e un valor en torno a un 3 5 para las apl:.cacio es practicas del mis=o.

6, REFERENC: .\S

:. :ouinguez. J., "Oyna:nic Stiffnes of Rectangular F"cl...=.ations... Research epor R78-20, Oept. Civil !ng..M.I.T., Cambr:.dge,)iass....78 2. Alarcón, E., Dominguez. ;. y Del caño. F.. 'Dynamic Stif!r.ess of Fou::da'ticns''. sw :)evel.:pr.:ent in s.:..-t., Ed it: c. 3rebbi a. CML ?ublications, 1980.

3. Abascal. ?., "Es":udi ¿9 Problemas Dinám:.ccs en Interacción sueloestructura por el Métcdc de les !lamentos de Contorno", Tesis Doctoral. LJni•:. de Sevilla, 1984 4, Cano, J.J.• "Calculo de impedancias

4, Cano, J.J.• "Calculo de impedancias :iina:nica.s :ca zapatas circulares rígidas en terrenos estratificados con amortiguamiento histerético", Tesis Doctoral. Univ. Pol. Valencia. 1985. s. Gcmez- era. s., Dcminguez. J. y largén f. Univ. Pol. Valencia. f. 2. Funda

s. Gcmez- era. s., Dcminguez. J. y Alarcón. E.• "On the Use of 3-D Funda mental Solutions fer Axysymmetric Steady State Dynamic Problems". ?roe. 7th !nt. Conf. en B.E.M., Spr1nger -Verlag, 1985

6. Émperador, J.M. y Dcminguez, J., "Cálculo de impedamcias dinamicas de cimentaciones axisimetricas embebidas en el terreno", Anales de !ngenieria Mecanica, Año S.No. l, :.987 7. Emperador. J.M. "El Metodo de los Elementos de Contorno en problemas elastodinámicos con simetría de revolución", **Tesis** Doctoral, Univ. Pol. de Canarias, 1988 8. Kermanidis, i'.A., "Numerical Solutions of Axia:ly Symet, ica: Elasticity Probleos", Jcur. cf Seids and Structures. './ol.11.p.493, 1975 9. Cruse, '!'.A., Snow. O.A. y 'Hilson, R.B., "Numerical Sclutions in Axisymmetric Elasticity", Computar & Structu:-es, Vol. 7, p.445, 1977 10. Wilson, E.." Structural Analisys of Axisymmetric Solids", AIAA Journal, Vol. 3. No 12, 1965. 11. Luco. J.E. y Wong, H.L., "Respense cf Hemispherical foundations Embebed in Half-space; I.Jcur. Eng. ech. ASCE, Vol. 112, No. 12, pp. 1363-1374. 1986 :.2 Luco. J.E. ''iorsicnal Response for SH Waves: the case of Hemispherical Fcunda:ions", Bull. Seism. Scc. Am. 65, pp. 1:J9-129, 1975