

# UNA SOLUCIÓN NUMÉRICA EFICIENTE PARA PROBLEMAS DINÁMICOS DE MECÁNICA DE LA FRACTURA

M.P. Ariza Moreno & J. Domínguez Abascal

Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla.

Camino de los Descubrimientos s/n. 41092- Sevilla.

mpariza@cica.es

## RESUMEN.

Los problemas de Mecánica de la Fractura pueden resolverse usando la formulación clásica de elementos de contorno combinada con la subdivisión del dominio por medio de contornos internos artificiales que no están únicamente definidos. La necesidad de emplear subregiones desaparece cuando se combinan la ecuación integral clásica y la ecuación integral en tracciones. Una de las principales dificultades que se derivan del uso de la representación integral de las tracciones es la evaluación de las integrales hipersingulares. En este trabajo las integrales hipersingulares se transforman analíticamente en integrales regulares que pueden evaluarse numéricamente.

Se presenta la formulación e implementación efectiva de esta formulación mixta para problemas dinámicos armónicos tridimensionales de Mecánica de la Fractura. Se utiliza por primera vez la representación integral tridimensional de las tracciones, para problemas de este tipo. Los ejemplos numéricos muestran la eficacia del modelo propuesto. Los resultados se comparan con los obtenidos por otros autores utilizando diferentes procedimientos.

## 1.- INTRODUCCIÓN.

Las Ecuaciones Integrales de Contorno Hipersingulares han aparecido como una buena alternativa a la formulación clásica de Elementos de Contorno (EC) para el análisis de problemas de fractura. En este trabajo se transforma la representación integral de las tracciones para problemas elásticos tridimensionales en el dominio de la frecuencia de forma que puedan evaluarse numéricamente sin dificultades especiales. Este trabajo es una extensión a problemas dinámicos de uno anterior de Domínguez et al. (2000) en el que se presentó la formulación para problemas elastostáticos tridimensionales de grietas.

## 2.- ECUACIÓN INTEGRAL DE CONTORNO EN TRACCIONES EN ELASTICIDAD.

La representación integral clásica de los desplazamientos para un punto interno y de un cuerpo elástico  $\Omega$  cuyo contorno es una superficie regular  $\Gamma$  con normal exterior unitaria  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  bajo condiciones de fuerzas de volumen nulas, puede escribirse como:

$$u_k(y) - \int_{\Gamma} P_{ik}(x,y) u_i^*(x) dr - \int_{\Gamma} J_{ik} u_i(x,y) p_i^*(x) dr = 0 \quad (1)$$

para  $i, k = 1, 2, 3$ ; donde  $u_k$  y  $P_{ik}$  representan la componente  $k$  de los vectores de desplazamientos y tracciones, respectivamente, y  $u_i, p_i$  son los tensores de desplazamientos y tracciones de la solución fundamental, respectivamente.

Las tensiones en puntos internos pueden obtenerse derivando los desplazamientos en un punto  $y$  e introduciendo las deformaciones correspondientes en la relación tensión-deformación.

La representación integral de las componentes de las tracciones se obtiene derivando la ecuación (1), haciendo uso de la ley de Hooke y las componentes del vector de tracciones.

$$I_{ik}(y) + \int_{\Gamma} S_{ijk}(x,y) N_{jm}(y) u_i(x) dl - \int_{\Gamma} d_{ijk}^*(x,y) N_{jm}(y) p_i^*(x) df = 0 \quad (2)$$

En el caso de problemas estáticos, después de varias transformaciones de la ecuación (2), se obtiene una EIC general en tracciones en términos de integrales regulares y débilmente singulares únicamente:

$$\int_{\Gamma} P_{ik}(y) + \int_{\Gamma} J_{ijk} N_{jm} [u_i^*(x) - I_{ik}(y) - u_{ij}(y) X_{jt} - Y_i] - d_{ijk} N_{jm} [p_i(x) - P_i(y)] r - \int_{\Gamma} \frac{t}{4\pi(1-\nu)} I_{ijk} + u_{ij}(y) J_{ijk} + P_i(y) K_{jk}^* = 0 \quad (3)$$

donde  $I_{ik}, J_{ijk}$  y  $K_{ijk}$  se dan en Domínguez et al. (2000) para problemas estáticos. En el caso de una excitación dinámica la primera integral en la ecuación (3) permanece igual i.e., ésta contiene la forma regularizada de los núcleos estáticos, los términos  $I_{ik}, J_{ijk}$  y  $K_{ijk}$  también permanecen como en el caso estático, y el único cambio en la ecuación (3) es la suma de dos integrales de contorno regulares y débilmente singulares conteniendo la diferencia entre los núcleos dinámicos y estáticos. Estas integrales se evalúan numéricamente en todos los casos.

### 3.- FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO

La presente técnica de EC, basada en el uso de la EIC en tracciones en combinación con la EIC clásica, tiene algunas características en común con el Método Dual de Elementos de Contorno presentado por Mi y Aliabadi (1992) para problemas estáticos y por Wen et al. (1998) para el estudio de problemas dinámicos

usando la transformada de Laplace. En el presente trabajo se emplea una formulación en el dominio de la frecuencia en combinación con elementos cuadráticos a un cuarto.

Para problemas en los que la geometría corresponde a una o varias grietas incluidas en un medio infinito, solo se utiliza la EIC en tracciones en una cara de la grieta y se elige como variable básica la Apertura de Grieta. Para problemas de cuerpos infinitos con grietas internas, se escribe la EIC en tracciones para una de las caras de la grieta y la EIC clásica para el contorno exterior. La variable básica en la grieta es la Apertura de Grieta, mientras que las variables del contorno exterior son tracciones y desplazamientos. En los casos en los que existen grietas exteriores, los desplazamientos en la intersección entre la grieta y el contorno exterior son incógnitas del sistema; sin embargo se necesitan los desplazamientos en ambas superficies de la grieta. En estos casos se escribe la EIC en tracciones para una superficie de la grieta y la EIC estándar para la otra. Hay una diferencia importante en la colocación entre la EIC en tracciones y la EIC clásica. En la EIC en tracciones, el desplazamiento en el contorno debe satisfacer la condición de continuidad de Holder,  $u_k \in C^{1,\alpha}$  en el punto de colocación. Como consecuencia de esto no puede utilizarse en los nodos situados en el contorno del elemento la colocación estándar. Siguiendo la idea de Gallego y Domínguez (1996) para dos dimensiones, el contorno se discretiza con elementos de superficie cuadráticos estándar. Sin embargo, no se coloca en los nodos del contorno, sino en ciertos puntos cerca de los nodos en el interior de los elementos. Este método de Colocación Múltiple ha sido utilizado con éxito para problemas estáticos por Domínguez et al. (2000).

### 4.- EJEMPLOS NUMÉRICOS

Han sido analizados varios problemas dinámicos de grietas que muestran la precisión y sencillez de este método.

El primer problema que se estudia corresponde a una grieta circular en un medio infinito. Sobre la grieta se propaga una onda longitudinal a lo largo de la dirección perpendicular a la superficie de la grieta. El coeficiente de Poisson del material es  $\nu=0.25$ . En la figura 1 se muestra la malla de EC, los elementos situados en el frente de la grieta tienen sus nodos intermedios a un cuarto de su longitud.

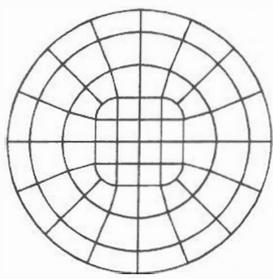


Fig. 1. Discretización de EC para grieta circular en medio infinito.

En la figura 2 se representa la amplitud de la Apertura de Grieta para diferentes posiciones a lo largo del radio para varios valores del parámetro  $ak=aw/c_1$ ; donde,  $a$  es el radio de la grieta,  $w$  es la frecuencia de excitación y  $c_1$  es la velocidad de onda longitudinal del material. Los valores de la Apertura de Grieta se normalizan con el desplazamiento del punto central para una carga estática de igual amplitud. Los valores calculados se comparan con los obtenidos por Budreck y Achenbach (1988), Mal (1970) y Sáez y Domínguez (1999). Los cuatro grupos de resultados presentan un gran acuerdo.

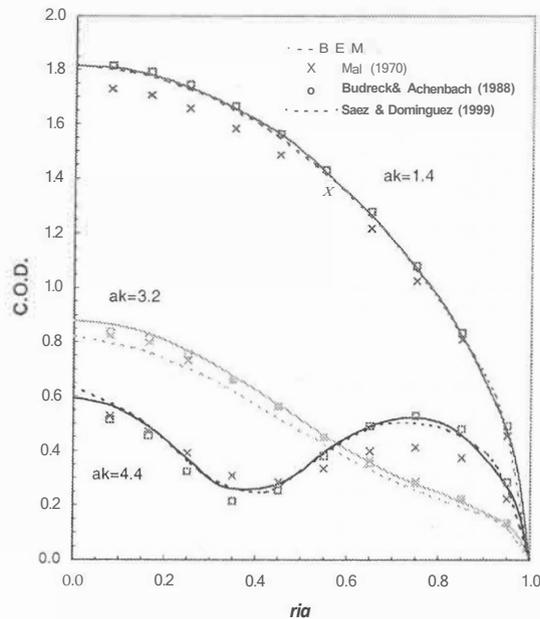


Fig. 2. Apertura de Grieta normalizada.

La figura 3 muestra los factores de intensidad de tensión  $K_I$  obtenidos a partir de la Apertura de Grieta de los nodos a un cuarto para un rango de frecuencias  $0 < \omega/c_1 < 1.5$  y distintos valores del módulo de Poisson; siendo  $K_I$

$$K_I = \frac{J_i}{2(1-\nu)} \frac{L}{L_0} \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (4)$$

donde  $L$  es la longitud del elemento y  $L_0$  la Apertura de Grieta de los nodos a un cuarto. Los resultados muestran un buen acuerdo con los obtenidos por Parton (1989).

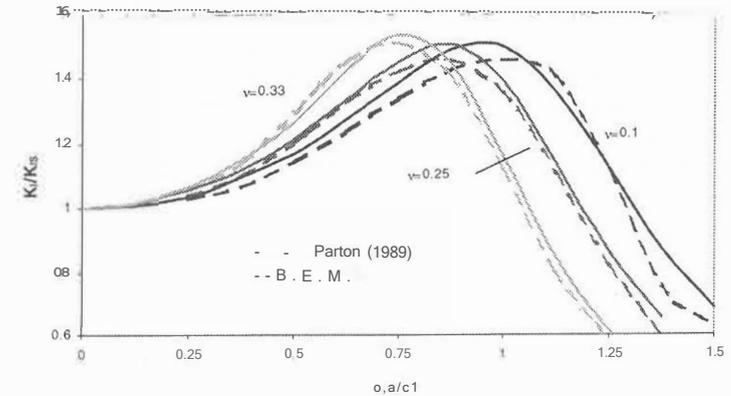


Fig. 3. Factor de intensidad de tensión de apertura para una onda de presión.

En la conferencia se discutirán otros dos ejemplos numéricos. Uno corresponde a una grieta elíptica en medio infinito sometida al efecto de ondas longitudinales armónicas. El último ejemplo corresponde a una grieta semi-elíptica de borde contenida en una barra prismática sometida a tracción armónica uniforme en las caras paralelas a la grieta.

## 5.- CONCLUSIONES

En este trabajo se extiende a problemas dinámicos tridimensionales en el dominio de la frecuencia una formulación que permite tratar la EIC en tracciones sin grandes dificultades. Las integrales hipersingulares se transforman para dar lugar a integrales de superficie regulares o débilmente singulares que pueden integrarse numéricamente.

El procedimiento de integración es tan general que permite transformar la formulación hipersingular de EC en algo tan claro, general y fácil de manejar como la formulación clásica. Los elementos a un cuarto se emplean para problemas de grietas sin ninguna dificultad. Los resultados numéricos obtenidos para grietas con geometrías diferentes muestran que el método es preciso y robusto.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a la Dirección General de Enseñanza Superior del Ministerio de Educación y Cultura el apoyo económico recibido a través de los proyectos PB96-1 380 y PB96-1 322-C03-01.

## 7.- REFERENCIAS

1. BUDRECK, O.E. y J.D. ACHENBACH (1988) "Scattering from Three-Dimensional Planar Cracks by the Boundary Integral Equation Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 55, pp. 405-412.
2. DOMÍNGUEZ, J., M.P. ARIZA y R. GALLEGO (2000) "Flux and Traction Boundary Elements without Hypersingular or Strongly-singular Integrals", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 48, pp. 111-135.
3. GALLEGO, R. Y J. DOMÍNGUEZ (1996) "Hypersingular BEM for Transient Elastodynamics". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 39, pp. 1681-1705.
4. MAL, A.K. (1970) "Interaction of Elastic Waves with Penny Shape Crack", *Int. J. Eng. Sci.*, 8, pp. 381-388.
5. MI, Y. y M.H. ALIABADI (1992) "Dual Boundary Element Method for Three-Dimensional Fracture Mechanics Analysis", *Eng. An. B.E.*, 10, pp. 161-171.
6. PARTON, V.Z. y V.G. BORISKVSKY (1989) "Dynamic Fracture Mechanics. Vol.1 Stationary Cracks", Hemisphere Publishing Corporation. New York.
7. SÁEZ, A. Y J. DOMÍNGUEZ (1999) "Scattering of Elastic Waves by Cracks in 3-D Transversely Isotropic Solids", *B.E. Techniques. Queen Mary and Westfield College. University of London. M.H. Aliabadi (Ed.)*, pp. 455-463.
8. WEN, P.H., M.H. ALIABADI y D.P. ROOKE (1998) "Cracks in Three Dimensions: A Dynamic Dual Boundary Element Analysis", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 167, pp 139-151.