

COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SÓLIDOS TRANSVERSALMENTE ISÓTROPAS

Sáez, A. y Domínguez, J.

Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla

Resumen

La formulación del problema dinámico en medios homogéneos y elástico-lineales se reduce a un conjunto de Ecuaciones Integrales de Contorno. Estas ecuaciones se resuelven numéricamente, en el dominio de la frecuencia, mediante el Método de los Elementos de Contorno. Para ello resulta necesario el conocimiento de una solución fundamental (i.e., respuesta de un medio infinito a la aplicación de una carga concentrada armónica) que pueda ser eficientemente implementada en un programa de Elementos de Contorno. En este trabajo se presentan resultados, correspondientes a la difracción de ondas por una cavidad irunersa en un sólido transversalmente isótropo, obtenidos empleando la solución fundamental de Wang y Achenbach (1995) y las expresiones asintóticas de Buchwald (1959) para campo lejano.

1 Introducción

El análisis de problemas dinámicos en sólidos elástico-lineales es únicamente abordable en términos generales mediante el empleo de técnicas numéricas. Entre estas técnicas, la reducción del problema a un conjunto de Ecuaciones Integrales de Contorno (EJC) y su posterior resolución mediante el Método de los Elementos de Contorno (MEC) se ha mostrado como una alternativa competitiva (Domínguez, 1993) frente al más difundido Método de los Elementos Finitos.

En este sentido, el MEC resulta especialmente atractivo para el estudio de problemas de difracción de ondas en medios infinitos, ya que tan sólo los contornos internos del problema tienen que ser discretizados y las condiciones de radiación se satisfacen automáticamente. Los problemas de difracción de ondas juegan un papel clave en muchas ramas de la ingeniería, tales como el ensayo no destructivo de componentes mecánicos.

A su vez, el desarrollo de nuevos materiales, fundamentalmente los materiales compuestos o "composites", ha conllevado la necesidad de considerar leyes de comportamiento no isótropas.

La aplicación del MEC pasa por la disposición de una solución fundamental (i.e., campos de movimientos y tensiones en un sólido infinito generados por la aplicación de una carga puntual) en una forma relativamente sencilla, que facilite su implementación numérica. Pero si bien la solución fundamental isótropa constituye un resultado clásico en elastodinámica (véase, e.g., Achenbach, 1973), no sucede lo mismo con casos de anisotropía más generales, a pesar de la amplia atención que ha recibido este tópico (baste citar los trabajos de Buchwald (1959), Lighthill (1960), Musgrave (1970), Payton (1983) o Zhu (1992) entre otros).

En este artículo, se emplea la solución fundamental 3-D en el dominio de la frecuencia propuesta por Wang y Achenbach (1995) para el caso de los materiales transversalmente isótropos, debidamente transformada para permitir su eficiente evaluación numérica (Sáez y Domínguez, 1996). Sin embargo, dicha solución se muestra inadecuada para la obtención de resultados de campo lejano, por lo que en tal caso se propone la utilización de las expresiones asintóticas obtenidas aquí empleando técnicas desarrolladas por Buchwald (1959) y Lighthill (1960).

2 Ecuaciones básicas de la propagación de ondas en sólidos transversalmente isótropos

Sea un cuerpo n (de contorno r) elástico lineal, homogéneo y transversalmente isótropo, libre de fuerzas de volumen y sometido a una excitación armónica de frecuencia ω si bien el término $\exp(-i\omega t)$ se suprimirá en el siguiente análisis. Las ecuaciones de Navier del equilibrio dinámico vienen dadas por

$$c_{ijkl}u_{k,lj} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad (1)$$

donde u_i son las componentes de los desplazamientos, ρ es la densidad y c_{ijkl} son las constantes elásticas que relacionan tensiones y deformaciones en la ley de Hooke.

Un material transversalmente isótropo se caracteriza por presentar propiedades simétricas en todos los planos normales a una dirección dada, que escogeremos coincidente con el eje x_3 del sistema cartesiano global de referencia. En tal caso, la ley de Hooke se expresa en función de cinco constantes elásticas independientes como

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ c_{13} \\ c_{23} \\ a_{31} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - c_{12})/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} u \\ c_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ 2c_{23} \\ 2c_{31} \\ 2c_{12} \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde c_{ij} son las constantes elásticas en notación condensada: (11)=1; (22)=2; (33)=3; (23)=4.

Consideremos a continuación la expresión de una onda armónica plana

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = U d \exp \{ i k (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - e(\mathbf{n}) t) \} \quad (3)$$

donde U es la amplitud escalar, d es el vector unitario que define la dirección del movimiento que el frente de onda deja tras de sí, $k = \omega/c$ es el número de onda, \mathbf{n} define la dirección de propagación del frente y $e(\mathbf{n})$ es la velocidad de fase asociada a dicha dirección. Alternativamente, (3) puede expresarse en función de un vector de retardo s como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = U d \exp \{ i \omega (\mathbf{x} \cdot \mathbf{s} - t) \} \quad (4)$$

Sustituyendo (3) en las ecuaciones de Navier (1) se obtiene

$$(\Gamma_{ik} - \rho c^2 \delta_{ik}) d_k = 0 \quad \text{donde} \quad \Gamma_{ik} = c_{ijkl} n_j n_l \quad (5)$$

Las soluciones no triviales de (5), i.e. $d_k \neq 0$ se obtienen para

$$V : \det |\Gamma_{ik} - \rho c^2 \delta_{ik}| = 0 \quad (6)$$

De esta ecuación, cúbica en ρc^2 , se obtienen tres raíces reales positivas (c ; $n=1, 2, 3$) dado que, al igual que el tensor c_{ijkl} , Γ_{ik} es real, simétrico y definido positivo. Los tres autovectores d asociados a c ; son ortogonales entre sí, aunque tan sólo uno de ellos resulta perpendicular a la dirección de propagación \mathbf{n} , estando asociado por tanto a un desplazamiento puramente transversal (T1). En general, ninguno de los otros dos autovectores resultará paralelo o perpendicular a \mathbf{n} , por lo que estarán asociados a desplazamientos cuasi-transversales (T2) y cuasi-longitudinales (L) respectivamente. En la figura 1(a) se muestra la superficie de velocidades de fase V , definida por la ecuación (6), para un composite grafito-epoxy.

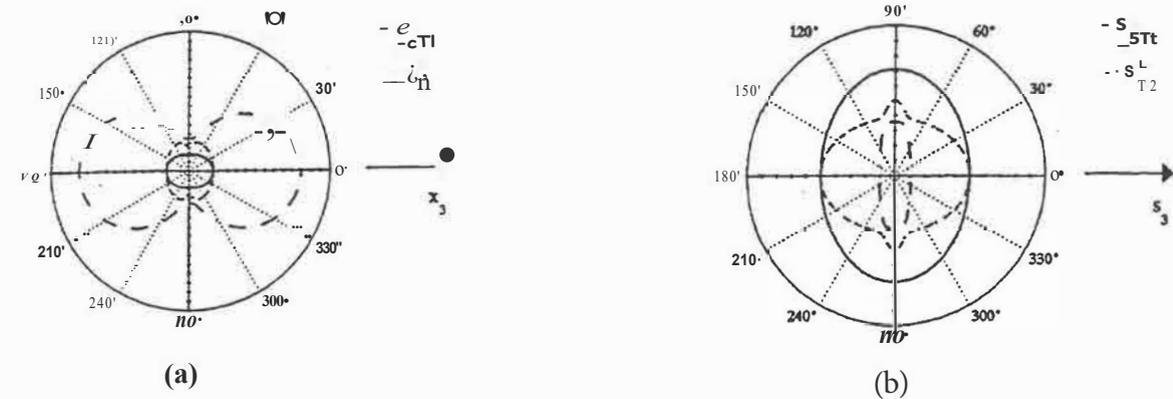


Figura 1: Sección de la superficie de (a) velocidades de fase y (b) retardo para un composite grafito-epoxy

Análogamente, sustituyendo (4) en las ecuaciones de Navier (1) obtendremos

$$(c_{ijkl} s_j s_l - \rho \delta_{ik}) d_k = 0 \quad \xrightarrow{d_k \neq 0} \quad S : \det |c_{ijkl} s_j s_l - \rho \delta_{ik}| = 0 \quad (7)$$

obteniéndose así la ecuación de sexto grado que define la denominada superficie de retardo S . Esta superficie ha jugado tradicionalmente un papel clave en la teoría de propagación de ondas en medios anisótropos. En general, S consta de tres hojas, cada una de ellas asociada a una de las raíces c_i de (6). En la figura 1(b) se muestra la superficie de retardo S para un composite grafito-epoxy.

Las ecuaciones de sexto grado que definen V y S están formadas por la superposición de las ecuaciones de un elipsoide separable asociado a los movimientos puramente transversales (T1), y una cuártica de dos hojas asociada a los movimientos cuasitransversales (T2) y cuasilongitudinales (L).

Un estudio más detallado de la propagación de ondas elásticas en materiales transversalmente isótropos puede encontrarse en los libros de Musgrave (1970) y Payton (1983).

3 Formulación del problema en términos de EIC. El MEC

Sea n un sólido transversalmente isótropo de contorno r , sometido a condiciones de carga armónica. La aplicación del teorema de reciprocidad entre el estado elastodinámico bajo estudio y la solución fundamental cuando la carga concentrada se aplica en un punto "i", en dirección l , da como resultado la Ecuación Integral de Contorno (EIC)

$$c_k u_i + \int_{\Gamma} T_{ik} u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ikt} k d\Gamma \quad (8)$$

que relaciona los desplazamientos en el punto "i", u_i , con los desplazamientos, u_k , y las tracciones, t_k , en el contorno Γ y con los desplazamientos, U_k (desplazamiento en dirección k originado por la aplicación de una carga puntual en el punto "i" en dirección l) y las tracciones, T_{tk} , de la solución fundamental en el contorno Γ . El término libre $c_k = \delta_{ik}$ cuando "i" es un punto interno, $c_k = 0$ para puntos externos y $c_k = 1/2\delta_{ik}$ para puntos situados sobre un contorno suave. Las integrales en (8) deben entenderse en el sentido de un Valor Principal de Cauchy.

En casos de geometría y carga generales la ecuación (8) sólo podrá ser resuelta numéricamente, y es aquí donde surge el MEC. A continuación se resumen las ideas básicas de este método. Para un tratamiento detallado del mismo, puede consultarse el libro de Domínguez (1993).

El contorno Γ se subdivide en NE elementos sobre los cuales se interpolan desplazamientos y tracciones a partir de sus v -valores nodales. Así, para un elemento "j"

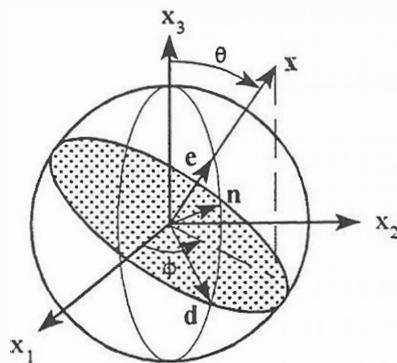


Figura 2: Geometría de la esfera unidad y los vectores x , n y d

$$u = \Phi u^j \quad ; \quad t = \Phi t^j \quad (9)$$

donde los vectores u_i y t_i contienen los valores de desplazamientos y tracciones, respectivamente, en los nodos del elemento "j" y Φ es la matriz de las funciones de forma.

De esta forma se obtiene la versión discretizada de la ecuación (8) como

$$c^j u^j + \int_{\Gamma_M} \mathcal{H} u_i = \int_{\Gamma_M} \mathcal{H} t_i \quad (10)$$

en notación matricial. Planteando (10) en todos los nodos del contorno se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas

$$H u = G t \quad (11)$$

que junto con las condiciones de contorno proporcionan la solución del problema.

4 Solución fundamental para materiales transversalmente isótropos

En este artículo se emplea la solución fundamental obtenida por Wang y Achenbach {1995} mediante el uso de la transformada de Radon. Dicha solución puede expresarse como

$$U_{ij}(x,w) = U_{ij}^s(x) + U_{ij}^l(x,w) \quad (12)$$

donde $U_{ij}^s \rightarrow 0$ cuando $w \rightarrow 0$ es una función regular y U_{ij}^l es singular y corresponde a la solución fundamental estática. Las tracciones sobre una superficie de normal r_j se obtienen a partir de las derivadas de los movimientos mediante la ley de Hooke

$$T_{jk}(x,w) = C_{kpq} \frac{\partial U_{ip}(x,w)}{\partial x_q} r_j \quad (13)$$

La parte singular (estática) de la solución de Wang y Achenbach {1995} viene expresada en forma de una integral sobre la circunferencia del círculo unidad definido en el plano normal al vector de posición

$$U_{ij}^s(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{J,d,F=1} \text{Atk}(d) dL(d) \quad ; \quad r = |x| \quad (14)$$

donde d es la normal exterior al círculo unidad en su plano.

La parte regular de la solución viene expresada en forma de integrales sobre la superficie de una esfera de radio unidad

$$U_{ij}^l(x,w) = \int_{|r|=1} \int_{m=1}^3 \mathcal{B}_{ik}(n,w) e^{ik_{m,n} \cdot x} dS(n) \quad (15)$$

donde n es la normal exterior a la esfera unidad, $k_{m,n} = \omega c_m$ es el número de onda y c_m ($m = 1, 2, 3$) son las velocidades de fase. Las expresiones de los núcleos $\text{Atk}(d)$ y $\mathcal{B}_{ik}(n,w)$ pueden consultarse en Wang y Achenbach {1995}. En la figura 2 se puede observar la geometría de x , n y d .

La evaluación numérica directa de las integrales en {14} y {15} se muestra costosa en lo que a tiempo de computación se refiere (Wang, Sáez y Achenbach, 1995), por lo que se hace necesaria la transformación de {14} y {15} de cara a su óptima implementación en un código de elementos de contorno. En Sáez y Domínguez {1996} se proponen una serie de simplificaciones que reducen notablemente el proceso de cálculo. Ahora bien, el carácter oscilatorio del integrando en {15} hace que la solución de Wang y Achenbach (1995) no sea apropiada para la evaluación de la solución fundamental en el campo lejano, siendo ésta una aplicación de extraordinaria importancia en problemas de difracción de ondas. Desde el punto de vista numérico, la obtención de un desarrollo asintótico de {15} resultaría costosa, por lo que en este trabajo se propone el empleo de las expresiones asintóticas de Buchwald (1959), quien aplicó a la elastodinámica el método de estimación asintótica de integrales de Fourier desarrollado por Lighthill (1960). De esta manera, se obtiene una solución fundamental de campo lejano en la forma

$$U_{ij}^l(x,w) = \sum_{l=1}^4 \sum_{r=1}^{N_s} f_{lk}(s^r, w) e^{i k_{l,r} \cdot x} \quad (16)$$

donde el sumatorio se extiende a los N_s puntos s^r de la superficie de retardo S (ecuación (7)) en los que x y la normal a la superficie S son paralelos y $s^r \cdot x > 0$. Los coeficientes f_{lk} dependen de características geométricas de la superficie S tales como su curvatura de Gauss o su convexidad. Dado que en el caso transversalmente isótropo la superficie de retardo presenta simetría de revolución en torno al eje s_3 , la obtención de los puntos s^r se simplifica reduciéndose a un problema 2-D. Faltaría por caracterizar el número de puntos s^r existente en cada caso. Como ya se ha mencionado, la superficie S se define como

$$S : E_{T1}(s_1, s_2, s_3) \cdot Q_{L,T2}(s_1, s_2, s_3) = 0 \Rightarrow E_{T1} = 0 \quad ; \quad Q_{L,T2} = \dot{U} \quad (17)$$

donde $E_n = 0$ es la ecuación de un elipsoide, definiendo así una hoja separable asociada a los movimientos puramente transversales (T1). Sobre esta hoja sólo podrá existir un punto s^r en el que la normal al elipsoide sea paralela a una dirección dada x y $s^r \cdot x > 0$. $Q_{L,T2} = 0$ es la ecuación de una cuártica, asociada a los movimientos cuasilongitudinales (L) y cuasitransversales (T2). Puesto que la hoja más interior de dicha cuártica (QL) es convexa, sólo podrá existir sobre ella un punto del tipo s^r . En cuanto a la hoja Q_{r2} , podrá o no ser convexa dependiendo de las constantes elásticas del material, pudiendo existir entre uno y tres puntos del tipo s^r , ya que una cuártica no puede presentar más de ocho puntos de inflexión y adicionalmente $Q_{L,T2}$ presenta simetrías respecto del eje s_3 y del plano s_1-s_2 .

5 Aplicaciones

A continuación se presentan los resultados numéricos correspondientes a la difracción de ondas elásticas por una cavidad esférica, libre de tracciones superficiales e inmersa en un sólido transversalmente isótropo

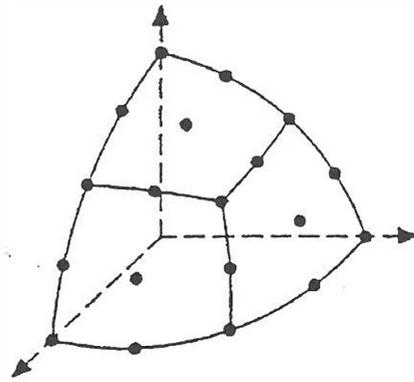


Figura 3: Discretización de la cavidad: 3 elementos cuadráticos por octante

El campo de desplazamientos total se expresa como la superposición de un campo incidente conocido u^{in} y un campo difractado u^{sc}

$$u = u^{in} + u^{sc} \quad (18)$$

En este caso la representación integral del campo total de desplazamientos adopta la forma

$$c_{ik}^i u_k^i + \int_{\Gamma_c} T_{ik} u_k d\Gamma = u_k^{i(in)} \quad (19)$$

donde Γ_c es el contorno de la cavidad.

Para la solución del problema de contorno se ha empleado la solución fundamental de Wang y Achenbach (1995), mientras que para la obtención de los resultados de campo lejano se ha utilizado la de Buchwald (1959).

Para caracterizar las frecuencias en estudio se ha escogido el número de onda adimensional $aK_L = aw/cL$, donde a es el radio de la cavidad y cL la velocidad de fase de las ondas cuasilongitudinales. La cavidad se ha modelado mediante 24 elementos cuadráticos (figura 3).

Para validar la formulación anteriormente propuesta se considera en primer lugar un material cuasi-isótropo, de características similares al acero ($c_{11} = 320$, $c_{33} = 280$, $c_{12} = 120$, $c_{13} = 150$; $c_{44} = 74.5$ en GPa y densidad $\rho = 7800$ Kg/m³). Se considera como movimiento incidente una onda plana longitudinal que viaja en la dirección del eje x_3 de simetría del material ($n = (0,0,1)$). La solución numérica obtenida mediante el MEC se compara con la solución analítica propuesta por Pao y Mow (1973), existiendo en todos los casos buen acuerdo entre ambas. Así, en las figuras 4.(a) y 4.(b) se muestran los desplazamientos totales en direcciones radial y circunferencial, respectivamente, sobre la superficie de la cavidad para números de onda $aK_L = 0.4$ y $aK_L = 1.0$. Tales resultados corresponden a una sección de la cavidad por un plano conteniendo al eje x_3 , ya que presentan simetría de revolución en torno a dicho eje. En la figura 5 se muestra la evolución con el número de onda del campo (lejano) difractado en dos puntos situados sobre la dirección x_3 de propagación del frente de onda, con coordenadas $x_3 = 300a$ y $x_3 = -300a$.

A continuación se considera un material transversalmente isótropo, cuyas constantes elásticas representan un composite grafito-epoxy ($c_{11} = 13.92$, $c_{33} = 160.7$, $c_{12} = 6.92$, $c_{13} = 6.44$; $c_{44} = 7.07$ en GPa y densidad $\rho = 1700$ Kg/m³). A este material corresponden las superficies de velocidades de fase y retardo de la figura 1. Se consideran dos movimientos incidentes. El primero es de nuevo una onda longitudinal en la dirección del eje x_3 . El segundo corresponde a una onda longitudinal que viaja según la dirección del eje x_1 ($n = (1,0,0)$).

En las figuras 6.(a) y 6.(b) se muestran los desplazamientos totales en direcciones radial y circunferencial sobre la superficie de la cavidad, en una sección que contiene al eje x_3 según el cual incide el frente

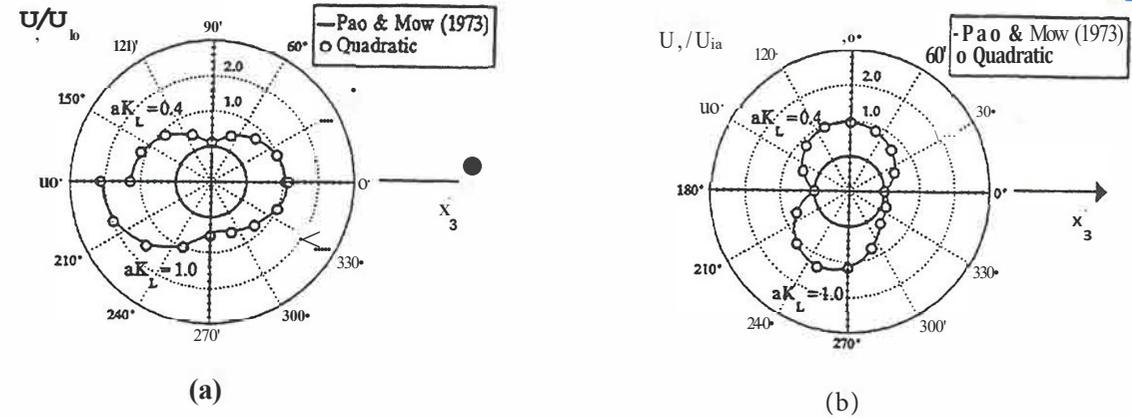


Figura 4: Desplazamientos en dirección (a) radial y (b) circunferencial sobre la superficie de la cavidad. Material cuasi-isótropo

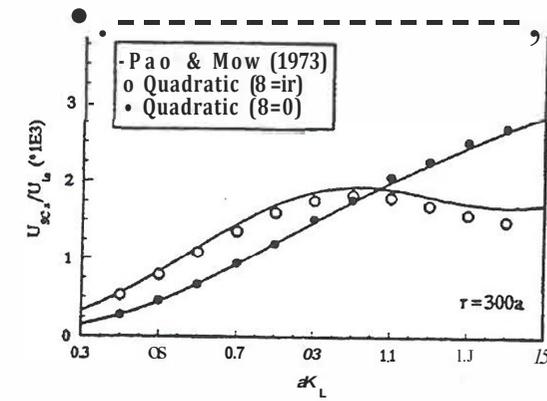


Figura 5: Campo difractado. Material cuasi-isótropo

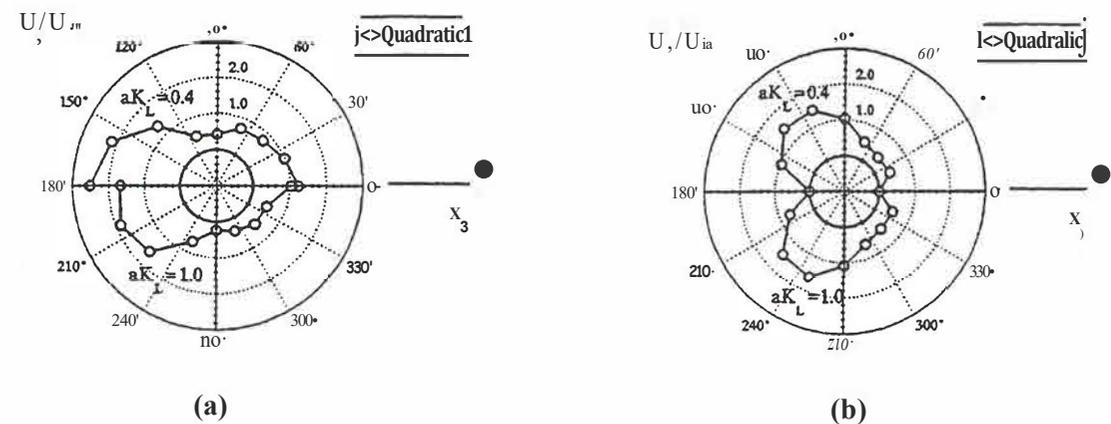


Figura 6: Desplazamientos en dirección (a) radial y (b) circunferencial sobre la superficie de la cavidad. Onda incidente según x_3 . Grafito-epoxy

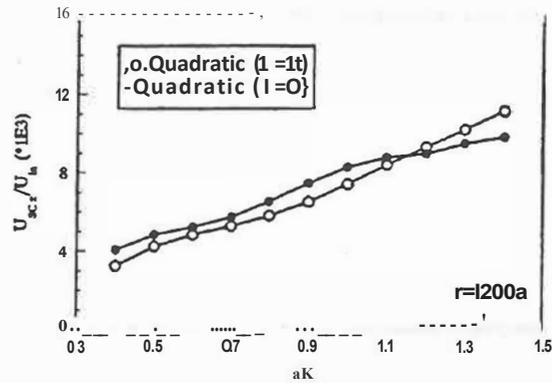


Figura 7: Campo difractado. Onda incidente según X3. Grafito-epoxy

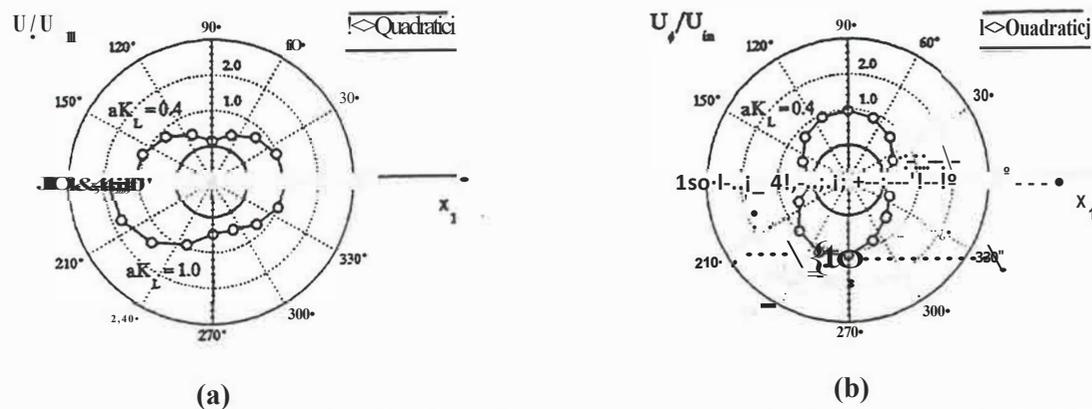


Figura 8: Desplazamientos en dirección (a) radial y (b) circunferencial sobre la superficie de la cavidad. Onda incidente según x1. Grafito-epoxy

de onda. Estos resultados siguen manteniendo la simetría de revolución en torno al eje x3, ya que el movimiento incidente es puramente longitudinal. En la figura 7 se muestra la evolución en frecuencia del campo difractado en dos puntos situados sobre el eje X3 en cotas $x_3 = \pm 1200a$.

Las figuras 8 y 9 corresponden a la onda longitudinal según el eje X1. Así, en las figuras 8.(a) y 8.(b) se pueden observar los desplazamientos totales en direcciones radial y circunferencial sobre la superficie de la cavidad para números de onda $aK_L = 0.4$ y $aK_L = 1.0$, en una sección por el plano x_1-x_2 . Estos resultados tan sólo son simétricos respecto del eje x_1 y, dado que el plano x_1-x_2 es de isotropía, su aspecto resulta muy similar a los obtenidos para un material isotrópico. Finalmente, en la figura 9 se muestra la evolución con el número de onda del campo difractado en dos puntos situados sobre el eje x_1 en cotas $x_1 = \pm 1200a$.

6 Conclusiones

El problema elastodinámico en sólidos transversalmente isotrópicos se ha reducido a un conjunto de EIC. Estas ecuaciones se han resuelto mediante el MEC en el dominio de la frecuencia. Para ello ha resultado clave evaluar, en la manera más eficiente posible, la solución fundamental. Aquí se ha empleado la solución de Wang y Achenbach (1995) -debidamente transformada para optimizar el tiempo de computación (Sáez y Domínguez, 1996)- para resolver el problema de contorno; y las expresiones asintóticas de Buchwald (1959) para la obtención de resultados de campo lejano.

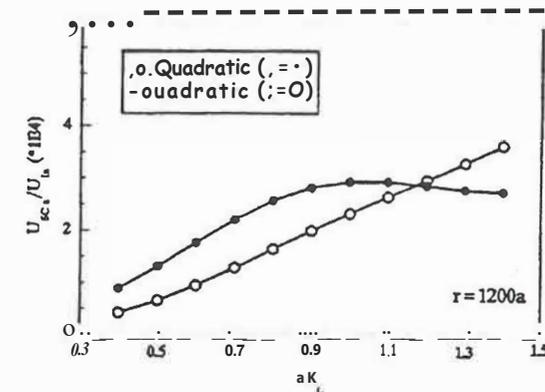


Figura 9: Campo difractado. Onda incidente según x1. Grafito-epoxy

A modo de aplicación se han presentado resultados para la difracción de ondas longitudinales por una cavidad esférica inmersa en un composite grafito-epoxy. Otras geometrías y condiciones de contorno pueden estudiarse sin problema alguno.

Debe insistirse en el gran potencial del MEC en este tipo de problemas: sólo los contornos interiores necesitan ser modelados y las condiciones de radiación se satisfacen automáticamente.

El análisis de materiales anisótropos más generales también sería posible empleando las soluciones de Wang y Achenbach (1995) y Buchwald (1959). Sin embargo, de nuevo resultaría necesario transformar dichas expresiones para que su implantación en un código de elementos de contorno resultase eficiente.

7 Referencias

- Achenbach, J.D. (1973), Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, Amsterdam.
- Buchwald, V.T. (1959), Elastic Waves in Anisotropic Media, Proc. Roy. Soc. London, A253, 563-580.
- Domínguez, J. (1993), Boundary Elements in Dynamics, CMP and Elsevier Appl. Sci., Southampton and London.
- Lighthill, M.J. (1960), Studies on Magneto-Hydrodynamic Waves and Other Anisotropic Wave Motions, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A252, 397-430.
- Musgrave, M.J.P. (1970), Crystal Acoustics, Holden-Day Inc., San Francisco.
- Pao, Y.-H., Mow, C.-C. (1973), Diffraction of Elastic Waves in Dynamic Stress Concentrations, Crane-Russak, New York.
- Payton, R.G. (1983), Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media, Martinus Nijhoff Publ., The Hague.
- Sáez, A., Domínguez, J. (1996), Boundary Element Analysis of Wave Scattering in Transversely Isotropic Solids, Proc. Third Int. Conf. in Comp. Str. Tech, Advances in B.E.M., B.H.V. Topping Ed., Civil-Comp Press, Edinburgh, 43-51.
- Wang, C.-Y., Achenbach, J.D. (1995), 3-D Time-Harmonic Elastodynamic Green's Functions for Anisotropic Solids, Proc. Roy. Soc. London, A449, 441-458.
- Wang, C.-Y., Sáez, A., Achenbach, J.D. (1995), 3-D Elastodynamic Green's Functions for BEM Applications to Anisotropic Solids, Proc. IUTAM Symp. on Anis., Inhom. and Nonli. in Sol. Mech., D.F. Parker and A.R. England Eds., Kluwer, The Netherlands, 307-320.
- Zhu, H. (1992), A Method to Evaluate Three-Dimensional Time-Harmonic Elastodynamic Green's Functions in Transversely Isotropic Media, J. Appl. Mech., 587-590.