



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Cinemática galáctica local y constante de precesión

Jorge Núñez de Murga



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement- Compartitqual 4.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento - Compartitqual 4.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0. Spain License.**

CÁTEDRA DE ASTRONOMÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE
LA TIERRA Y DEL COSMOS
FACULTAD DE FÍSICA
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

CINEMATICA GALACTICA LOCAL Y CONSTANTE DE PRECESION

Memoria presentada por
D. Jorge Núñez de Murga
para optar al Grado de
Doctor en Ciencias,
Sección de Físicas

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA



0700448352

A mis Padres

A Marta

INDICE

Introducción.	1
1.- Catálogos y datos utilizados.	4
1.1.- Generalidades	4
1.2.- Selección de las muestras de estrellas.	6
1.3.- Distribución por poblaciones.	12
1.4.- Crítica	16
2.- Momentos centrados de la distribución de velocidades.	21
2.1.- Planteamiento del problema.	21
2.2.- Método estadístico.	26
2.3.- Resultados obtenidos.	33
2.4.- Discusión	37
3.- Análisis cinemático del campo de velocidades.	48
3.1.- Modelo tridimensional	48
3.2.- Ecuaciones de condición	57
3.3.- Resultados obtenidos.	61
3.4.- Correcciones a la constante de la precesión	69
4.- Modelo galáctico a simetría cilíndrica.	75
4.1.- Hipótesis de trabajo.	75
4.2.- Ecuaciones hidrodinámicas	76
4.3.- Planteamiento del sistema.	84
4.4.- Resultados obtenidos.	87
4.5.- Conclusiones.	94
Bibliografía.	97

INTRODUCCION

La distribución de las velocidades residuales y los parámetros cinemáticos en el entorno solar han sido calculados por diversos autores (DELHAYE, 1965). Sin embargo, las diferencias significativas que aparecen entre las distintas determinaciones nos animaron a profundizar en este tema. El método estadístico aplicado y los datos utilizados son las principales causas de tales discrepancias. Por ello, hemos dedicado el primer Capítulo a analizar los datos disponibles, para tratar de encontrar las causas de dichas discrepancias y obtener una fuente de datos que —con la misma muestra de estrellas— nos permitiese atacar el estudio de la distribución de las velocidades residuales y de los parámetros cinemáticos del movimiento macroscópico de la Galaxia en el entorno del Sol.

En cuanto se refiere al estudio de la distribución de las velocidades residuales, en el Capítulo segundo se han calculado los momentos centrados hasta el cuarto orden. Hasta hace poco, únicamente se consideraban los momentos de segundo orden y sólo CHARLIER (1926) había estimado los momentos hasta el cuarto orden, si bien los datos entonces disponibles eran de menor calidad. Recientemente, ERICKSON (1975) ha publicado momentos hasta el cuarto orden para el Catálogo de GLIESE (1969), y ello nos ha animado a atacar el problema por otro método de cálculo obteniendo plena coincidencia al aplicarlo a su muestra de estrellas, lo cual nos ha permitido extender estos cálculos al Catálogo FK4.

Al desarrollo del modelo tridimensional de OGORODNIKOV-MILNE para calcular el gradiente del campo galáctico de velocidades hemos dedicado el Capítulo tercero, sin más hipótesis que la de la aproximación lineal. Para interpretar los valores hallados en función de los parámetros cinemáticos de la Galaxia, necesitamos separar la parte hemisimétrica de dicho gradiente de las correcciones de precesión con las cuales aparece mezclada. Para ello, en lugar de admitir hipótesis de dudosa justificación, hemos preferido adoptar un modelo galáctico.

El modelo galáctico elegido con el fin de paliar el problema expuesto ha sido un modelo isoterma, el cual se justifica perfectamente en las proximidades del Sol. Dicho modelo se ha desarrollado en el cuarto Capítulo, planteándose las ecuaciones hidrodinámicas que de él se deducen y que nos han permitido cerrar el problema y calcular los parámetros cinemáticos de la Galaxia en el entorno del Sol, así como las correcciones a la constante de la precesión. La concordancia con otros autores y la coherencia interna de los resultados obtenidos pone de manifiesto la bondad del método de cálculo empleado y la necesidad de atacar los problemas de dinámica galáctica mediante modelos tridimensionales, así como, al propio tiempo, justifica la adopción del citado modelo isoterma.

Deseo agradecer a todos los miembros del Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos de la Universidad de Barcelona la ayuda de todo tipo recibida y, muy especialmente, al Director de este trabajo, Prof. Dr. D. Juan J. DE ORÚS NAVARRO, el habérmelo propuesto, así como su constante dirección y ayuda, sin las cuales no me hubiese sido posible su realización, y a D. Jorge TORRA ROCA, con quien trabajo habitualmente en todos los temas astronómicos, por su fraternal dedicación.

Quiero expresar también mi agradecimiento al Prof. Dr. R. ERICKSON, por facilitarnos la relación de las estrellas usadas en su trabajo, y al Dr. W. GLIESE, por proporcionarnos gentilmente el Catálogo que lleva su nombre.

Asimismo, deseo hacer patente mi más profundo agradecimiento al Prof. Dr. D. Antonio NÚÑEZ CACHAZA, mi padre, y a Araceli DE MURGA, mi madre, cuyos continuos ánimos y desvelos han tenido influencia decisiva en la realización de esta Tesis.

1. CATALOGOS Y DATOS UTILIZADOS

1.1. Generalidades

Es evidente que en toda investigación —y, por supuesto, en Astronomía— es de fundamental importancia la elección del conjunto de datos que se utilizan, puesto que de ellos se pretende obtener resultados válidos para la totalidad de una población, en nuestro caso de estrellas, ya sea del entorno solar, de la Galaxia o del Universo. Las grandes discrepancias que se observan entre los diversos autores, incluso al atacar un mismo problema por el mismo método matemático, se deben a la heterogeneidad de los datos usados. En este sentido, se comprende el interés que para la investigación astronómica tiene el disponer de Catálogos estelares de elevada precisión que sean una muestra representativa de la población que se intenta estudiar.

En nuestro caso pretendemos conjugar el estudio de los momentos centrados de la población estelar en las cercanías del Sol, los parámetros cinemáticos de la Galaxia y el desarrollo de un modelo para la misma cuyos valores en las proximidades de aquél sean compatibles con los experimentales. Para ello necesitamos Catálogos que, además de darnos la posición de las estrellas, nos proporcionen con la mayor precisión posible su velocidad espacial, para lo cual, además de los movimientos propios, habituales en los Catálogos, necesitamos la distancia y la velocidad radial de las mismas. Tam-

bién necesitamos, para el estudio que queremos hacer, el tipo espectral y la clase de luminosidad de cada estrella.

Al considerar la estructura galáctica, diversos autores hacen un estudio de los movimientos propios sin conocer las distancias de las estrellas ni las velocidades radiales de las mismas (CLUBE, 1972; GÓMEZ, 1974; FRICKE, 1977). Para ello es necesario entonces hacer alguna hipótesis sobre la distancia media de las estrellas según su posición galáctica y tipo espectral, cosa a la que en este trabajo hemos preferido no recurrir.

De lo expuesto anteriormente se deduce que debe descartarse el uso de los Catálogos con gran número de estrellas: S.A.O. (1965) y AGK3 (DIECKVOSS et al., 1975) pues no figuran en ellos la distancia ni la velocidad radial de las estrellas. Dada la precisión que se necesita para el presente estudio, hemos adoptado como Catálogo básico de estrellas próximas el "*Catalogue of Nearby Stars*" (GLIESE, 1969), al cual nos referiremos frecuentemente como "Catálogo de GLIESE", y, para las estrellas lejanas, la selección de estrellas distantes de los Catálogos FK4 y FK4 Supplement (FRICKE y KOPFF, 1963). Esta selección, denominada "*512 FK4/FK4 Suppl. Distant Stars*" (FRICKE, 1977), contiene la velocidad radial de 500 estrellas, la distancia espectroscópica o fotométrica, el tipo espectral y la clase de luminosidad. A esta selección nos referiremos de ahora en adelante como "Catálogo de FRICKE".

La elección de estos dos catálogos ha sido motivada por la necesidad de disponer de datos de una muestra de estrellas próximas al Sol, a fin de poder comprobar con ella el método

estadístico usado para el cálculo de los momentos centrados, confirmando los valores dados por otros autores, y por la necesidad de disponer de datos de estrellas alejadas del Sol, a fin de que haga sentir su efecto la estructura a mayor escala (brazos espirales, etc.). En este sentido, el Catálogo "*Bright Stars*" (HOFFLEIT, 1964), cuyo contenido será muy valioso para futuras investigaciones, no ha sido usado puesto que, al limitarse a la magnitud visual 6.5, posee muy pocas estrellas próximas de tipos espectrales avanzados.

1.2. Selección de las muestras de estrellas

El Catálogo FK4 y sus suplementos (FK4 Suppl.), publicados en 1963, contienen en total 3522 estrellas, de las cuales 1535 pertenecen al FK4 y las 1987 restantes a los suplementos. Se trata del cuarto Catálogo fundamental publicado por el *Astronomisches Rechen-Institut* de Heidelberg y, como su nombre indica, se trata de un Catálogo fundamental para la astrometría. Como se recordará en el Capítulo tercero, se denomina Catálogo fundamental a aquel cuyas posiciones y movimientos propios han sido corregidos de precesión y sirven de base a los catálogos fotográficos, meridianos y, en general, astrométricos. En la actualidad, los sistemas basados en los Catálogos fundamentales constituyen las mejores aproximaciones al sistema inercial.

La precisión del Catálogo FK4 es de 0.15 "/siglo en movimiento propio en ascensión recta ($\mu_{\alpha} \cos \delta$) y de 0.07 "/siglo

en movimiento propio en declinación (μ_δ); este error hace que la precisión en posición varíe con el tiempo siendo, para la época media 1935 de $0''030$ en ascensión recta ($\alpha \cos \delta$) y de $0''020$ en declinación (δ). Para el estudio que se pretende hacer no es necesaria una precisión muy grande en la posición ($0''01$ es suficiente), pero sí lo es en los movimientos propios. Nótese que en éstos últimos la precisión en declinación es doble que en ascensión recta, la misma relación de precisiones que se obtiene al determinar la posición de las estrellas mediante círculos meridianos clásicos no fotoeléctricos.

Las muestras de estrellas del FK4/FK4 Suppl. que usaremos serán extraídas del Catálogo "*512 FK4/FK4 Suppl. Distant Stars*" (FRICKE, 1977). Esta selección, realizada por FRICKE (1967a), se basa en los datos astrofísicos publicados para las estrellas del FK4 (SINZI, 1972) y posteriormente mejorada y ampliada al FK4 Suppl. por diversos autores. Dicha selección ha sido efectuada atendiendo a los siguientes criterios: a) Que la distancia sea superior a 100 pc, aproximadamente, con el fin de eliminar las irregularidades locales en los estudios de rotación galáctica; b) Que la velocidad residual sea inferior a 35 km s^{-1} con respecto al centroide publicado por DELHAYE (1965).

La selección de FRICKE contiene pues datos para 512 estrellas, los cuales comprenden el número en distintos Catálogos, la posición, la magnitud visual, el índice de color B-V, el tipo espectral y la clase de luminosidad, los movimientos propios en el FK4, N30, FK3 y GC, la velocidad radial de 500 de ellas y la distancia heliocéntrica. Estos datos nos proporcionan la suficiente información como para trabajar con 500 de las

estrellas citadas. Estas 500 estrellas son las que utilizaremos en nuestro estudio, a las que nos referiremos igualmente de ahora en adelante como "Catálogo de FRICKE".

Dado que ERICKSON (1975) ha publicado momentos centrados obtenidos mediante el Catálogo de GLIESE (1969), es evidente que este Catálogo es la fuente ideal de datos necesarios para poder comprobar nuestro método. Por otra parte, la obtención de momentos para una muestra cercana nos permitirá, comparándolos con los obtenidos para muestras más lejanas, establecer las variaciones de los mismos con la distancia. Veamos, por tanto, las características generales de este Catálogo.

El Catálogo de GLIESE, edición de 1969, es la reedición del Catálogo "*Near Star Catalogue*" publicado en 1957 y que contenía 915 estrellas. En esta nueva edición se han incluido los datos disponibles hasta 1968 y es, hasta el presente, el Catálogo más completo de estrellas próximas. Contiene 1529 estrellas y sistemas estelares (con un total de 1890 componentes) de los cuales 1328 muestran paralajes mayores o iguales a $0''.045$ (a la que corresponde una distancia de 22 parsecs) y 1132 poseen los datos necesarios para calcular la velocidad espacial, es decir: posición, movimientos propios, paralaje y velocidad radial. El Catálogo contiene también el número en distintos catálogos, la magnitud visual, los índices de color B-V y U-B, el tipo espectral y la clase de luminosidad.

La muestra de estrellas utilizada en este trabajo es la misma usada por ERICKSON (1975) y consta de 870 estrellas (869 en nuestro caso, por exclusión del Sol). La selección fué efectuada atendiendo a los siguientes criterios: a) Se consideran

sólamente aquellas estrellas cuya paralaje resultante sea mayor o igual a $0''.045$; **b)** Se excluyen aquellas estrellas cuya paralaje no tenga asignado un valor probable para su error; **c)** Se excluyen las enanas blancas simples y aquellos sistemas estelares para los cuales sólo se haya medido la velocidad radial para la componente enana blanca (este criterio se establece debido a la fuerte corrección gravitatoria, 50 km s^{-1} , que hay que aplicar a la velocidad radial); **d)** Se excluyen los sistemas que posean una componente clasificada como subenana, por no ser dichas estrellas representativas del disco galáctico; **e)** Se excluyen los sistemas para los cuales no se conozca la clase de luminosidad para alguna de sus componentes, con lo cual se evita el incluir subenanas no conocidas.

Después de aplicar estos criterios quedan 869 estrellas y sistemas estelares. De éstos últimos sólo se considera la componente A como representativa del comportamiento del sistema, pues, en general, todas las componentes de un sistema estelar poseen los mismos movimientos propios y velocidad radial. La lista de las 869 estrellas puede encontrarse en la Tabla 1.1.

Recientemente (GLIESE y JAHREISS, 1979) se han publicado nuevos datos relativos a 294 estrellas y sistemas estelares con paralajes mayores o iguales a $0''.045$. Dichos objetos no han sido incluidos en este trabajo puesto que, por una parte, para poder comparar los resultados nos interesa respetar la muestra original y, por otra parte, si se aplican a estas estrellas los criterios de selección ya mencionados sólo 27 estrellas y sistemas estelares cumplen todas las condiciones impuestas. Esto es debido principalmente a que para muy pocas de las 294 estrellas se conoce velocidad radial y tipo espectral a la vez.

Tabla 1.1. Selección de las 869 estrellas del Catálogo de GLIESE. Los números corresponden a la edición 1969.

1	2	3	4	4.1	4.2	5	8	10
13	14	17	17.2	17.3	18	19	20	22
23	25	26	27	27.2	28	29	30	31
31.1	31.2	31.4	31.5	32	33	34	34.1	36
37	38	39	40	41	42	45	47	48
49	52	53.1	53.4	54.2	55	55.2	55.3	56.3
56.4	56.5	57.1	58.2	59	59.1	59.2	60	61
65	66	67	68	69	70	72	75	78.1
79	80	81	82.1	83.2	84.3	86	86.1	87
87.1	90	91.2	92	95	96	97	98	99.1
103	105	105.2	105.4	105.5	106	106.1	107	108
109	111	112	112.1	113	114	116	117	118.1
118.2	120	120.2	121	122	123	124	125	127
128	131	134	136	137	138	139	140.1	141
142	143	143.2	144	146	147	148	150	152
154.1	154.2	155	156	156.1	156.2	157	157.1	159
160	160.1	160.2	161	161.1	162.1	166	167	167.1
167.3	169	171.1	171.2	172	174	174.1	176	176.1
176.3	177	177.1	178	181	182	183	184	185
186	187	187.2	188	189	189.1	189.2	193	194
195	196	197	198	199	200	201	202	204
204.1	205	206	208	209.1	211	212	215	216
217	217.1	219	221	222	224	224.1	225	225.2
226	226.3	227	228	229	230	231	231.1	233
234	239	239.1	240	241	242	243	244	245
247	248	249	249.1	250	251	252	254	256
257.1	259	260	262	264	264.1	265	268	268.1
269	270	271	273	273.1	274	275.1	276	277
278	279	280	281	282	284	285	285.1	286
287	288	290	291	292	292.1	292.2	293.1	293.2
294	295	296	296.1	296.2	297.1	297.2	299	301
301.1	302	303	305	306	307.1	309	310	310.1
311	312	314	315	316	319	320	321	321.1
321.3	322	323	324	325	327	328	331	332
333.1	333.2	333.3	334.2	335	337	337.1	338	339
339.2	340	340.3	341.1	342	343.1	344	348	349
351	352	353	354	354.1	355.1	355.2	356	361
364	365	366	366.1	368	368.1	369	370	371
373	376	378	378.1	378.2	379	379.1	380	382
385.1	387	388	388.1	391	392	393	394	395
397	397.1	397.2	398	400	402	403.1	406	406.1
407	408	410	411	412	412.1	414	414.1	415
416	418	419	420	421	423	423.1	424	425
426	428	429	429.3	429.4	430	430.1	432	433.2
434	435	435.1	436	439	441	442	444	446
447	448	449	450	452.4	453	454	455.3	546
456.1	457	458	459	459.3	461	462	463	464
465	466	468	471	471.2	472	473	475	480
481	482	483	484	485	486	486.1	487	488
489	490	491	493	494	496.1	499	500	501
501.2	502	503	504	505	506	507	507.1	508
508.1	509	511.1	512	512.1	514	516	517	519

(Tabla 1.1. continuación)

520	521	521.1	522	524.1	525	525.1	526	527
528	529	530	531	532	532.1	533	534	534.1
535	537	538	539	539.1	540	540.3	541	541.1
542	542.1	542.2	544	546	547	548	549	550.2
551	552	553	554	556	557	558	559	560
562	563.1	563.4	564	564.1	565	566	567	569
570	570.1	570.2	571	571.1	572	575	576	578
579	579.4	580	580.2	581	582	583	584	586
591	593	594	596.1	596.2	598	599	600	601
602	603	604	606.2	609.1	609.2	610	611	611.1
612	613	614	615	615.1	615.2	616	616.1	616.2
617	619	620.1	621	623	624	624.1	626	626.1
627	628	629	631	632.1	635	636	637.1	638
638.1	639	639.1	641	641.1	642	646	648	649
649.1	651	652	653	654	654.1	654.3	656	656.1
657	659	661	663	664	665.1	666	667	668.1
669	670	672	673	673.1	675	677	678	678.1
679	681	683.1	683.2	684	685	686	686.1	686.2
687	688	689	690	691	692	692.1	694	694.1
694.2	695	695.1	696	697	697.1	698	699.2	700.1
700.2	701	702	702.1	704	705.1	706	707	708
708.1	708.2	708.4	710	711	713	715	716	717
718	719	720	720.1	721	722	724.2	725	725.2
726	727	728	729	730	731	734	735	736
737	738	740	743.1	743.2	746	747	747.2	747.3
748	750	751	752	754.2	755	756.1	758	759
760	761.1	761.2	762.1	763	764	764.2	765	765.1
765.4	767	767.1	768	768.1	770	770.1	771	773
773.1	773.3	773.4	773.5	773.6	775	775.1	776	777
778	779	779.1	780	781	782	783	783.2	784
785	786	787	788	788.3	790	791.3	792.1	793
793.1	794.2	795	796	797	798	799	800	803
804	805	806	806.1	807	808	808.3	809	811
811.1	812	815	816.1	818	818.1	819	820	822
822.1	924	825	825.1	825.2	825.3	825.4	826	826.1
827	828	828.1	829	830	832	833	835	835.1
836.3	836.6	836.7	836.8	836.9	838	839	840	842.2
845	846	848	848.4	849	849.1	851	851.1	851.2
851.3	851.5	852	853	854	855.1	857	857.1	859
860	862	863	864	866	867	868	869	871
872	873	875	875.1	876	879	880	881	882
883	884	885	886	886.2	887	889	890	891.1
892	894.2	894.4	894.5	895	895.4	896	898	900
902	902.1	903	904	905	906	907.1	908	908.1
909	910	911	913	914				

1.3. Distribución por poblaciones

La distribución por poblaciones de las estrellas de las muestras de los dos Catálogos puede verse en las Tablas 1.2. y 1.3., así como en las figuras 1.1., 1.2., 1.3. y 1.4.

Como se aprecia en las figuras 1.1. y 1.2. la muestra del Catálogo de FRICKE tal como sugieren FRICKE y TSIUMIS (1975), ha sido dividida en dos grupos: el primero, con distancias inferiores a 300 pc, contiene 377 estrellas mientras que el segundo, con distancias superiores a 300 pc, contiene 123 estrellas. En dichas figuras puede apreciarse fácilmente la densidad decreciente de cada grupo al alejarnos del Sol.

Si denominamos estrellas "jóvenes" a aquellas cuyos tipos espectrales sean O-B2 y B2.5-G de las clases de luminosidad I y II (edades inferiores a $4 \cdot 10^7$ años) y "viejas" a las demás estrellas, encontramos 184 estrellas "jóvenes" pertenecientes casi todas al segundo grupo (estrellas con distancias superiores a 300 pc) y 316 estrellas "viejas" situadas principalmente dentro de la esfera de 300 pc.

Para la muestra del Catálogo de GLIESE puede apreciarse igualmente en la figura 1.4. que la densidad es decreciente al alejarnos del Sol, figurando en la Tabla 1.3. la distribución por tipos espectrales.

Comparando las Tablas 1.2. y 1.3. se observa una notable diferencia entre los dos Catálogos, pues mientras que en la muestra del de FRICKE sólo un 26% de las estrellas pertenece a la secuencia principal (tipo V) y la mayoría de ellas es de

Tabla 1.2. Composición de la muestra del Catálogo de FRICKE

Tipo Clase	O	B0-B2	B2.5-B9.5	A	F	G	K	M	Total
I-II	2	16	19	8	20	26	23	8	122
III-IV	1	44	60	15	0	9	26	27	182
V	2	43	75	8	0	0	0	0	128
No det.	3	0	13	19	9	4	11	9	68
Total	8	103	167	50	29	39	60	44	500

Tabla 1.3. Composición de la muestra del Catálogo de GLIESE

Tipo Clase	A	F	G	K	M	Total
III-IV	5	24	27	24	0	80
V	23	100	162	252	252	789
Total	28	124	189	276	252	869

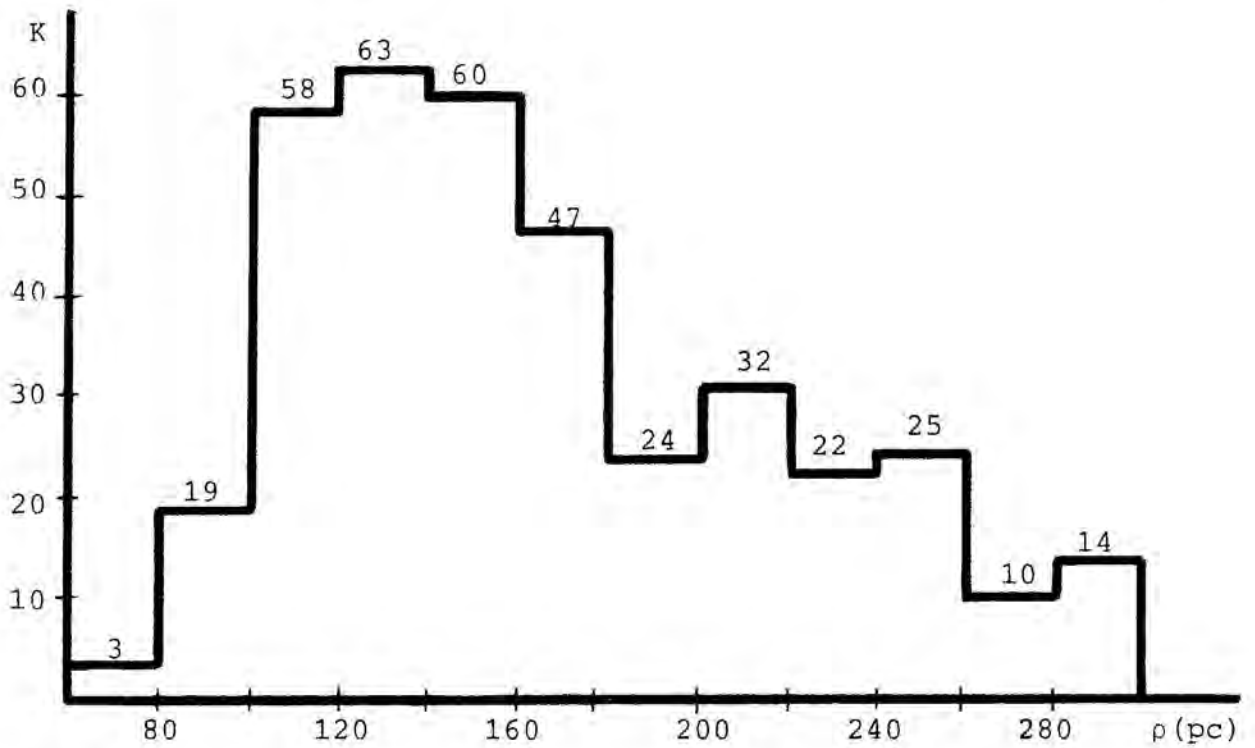


Figura 1.1. Distribución de las 377 estrellas del catálogo de FRICKE con distancias inferiores a 300 parsecs.

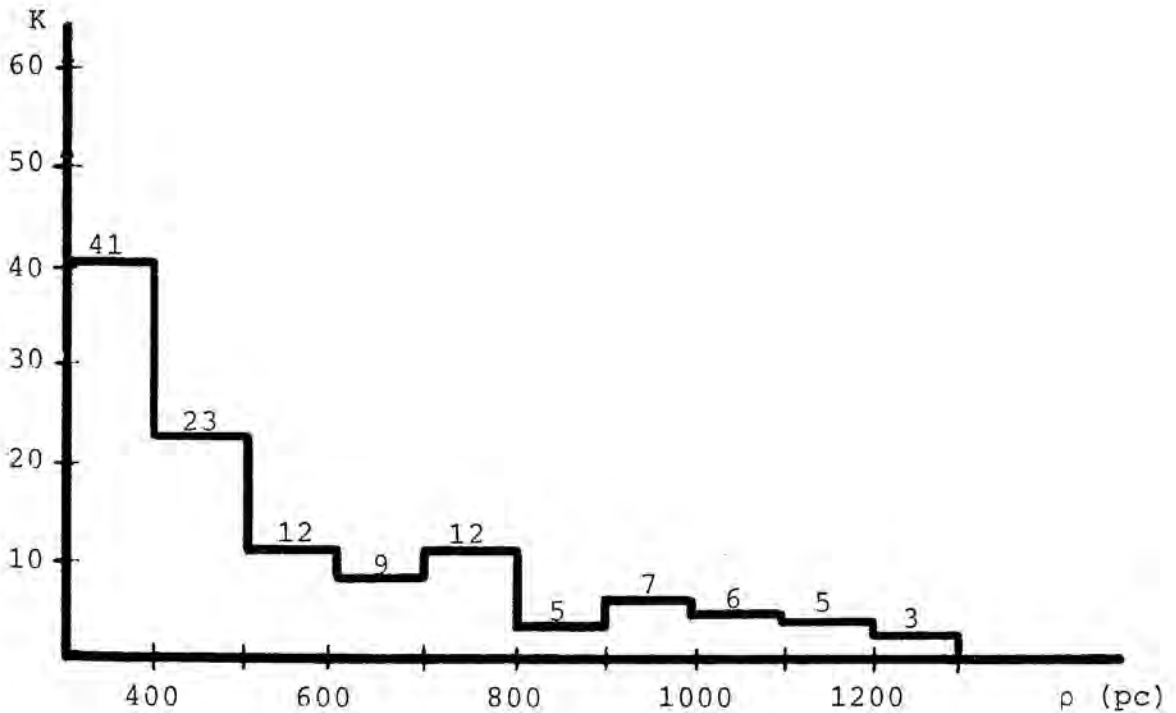


Figura 1.2. Distribución de las 123 estrellas del Catálogo de FRICKE con distancias superiores a 300 parsecs.

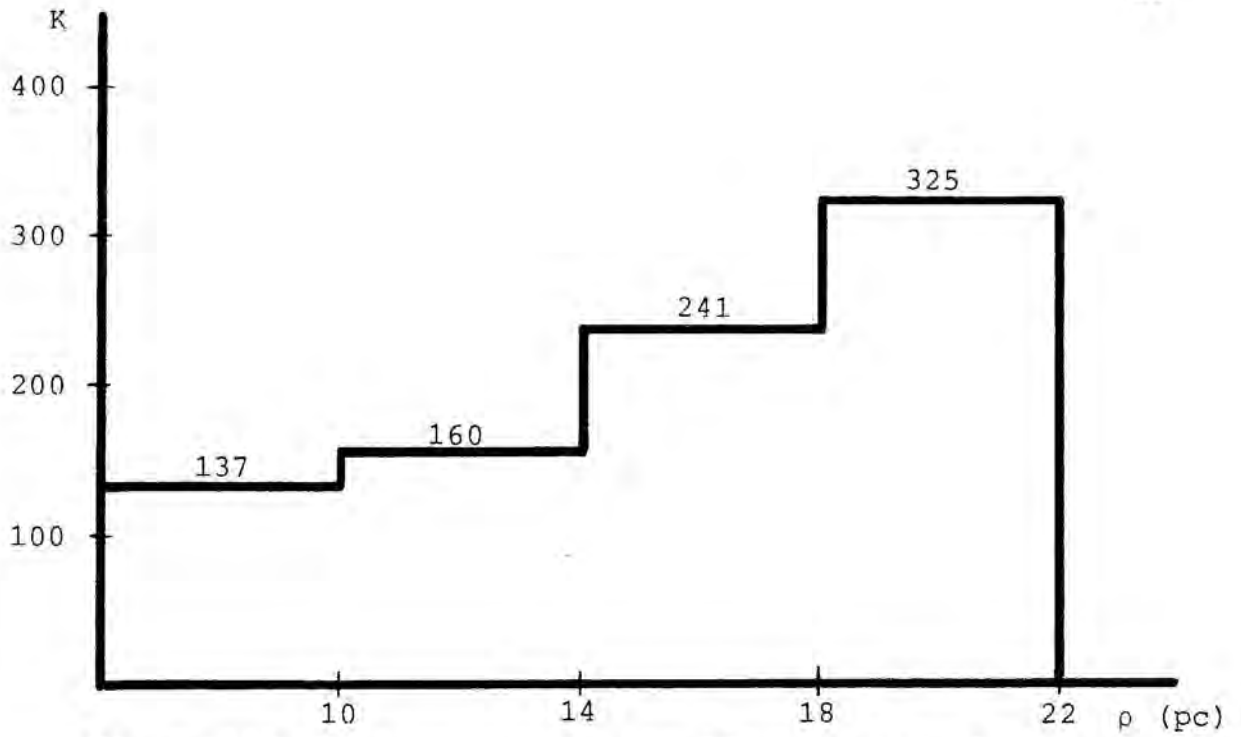


Figura 1.3. Distribución de las 869 estrellas de la selección del Catálogo de GLIESE.

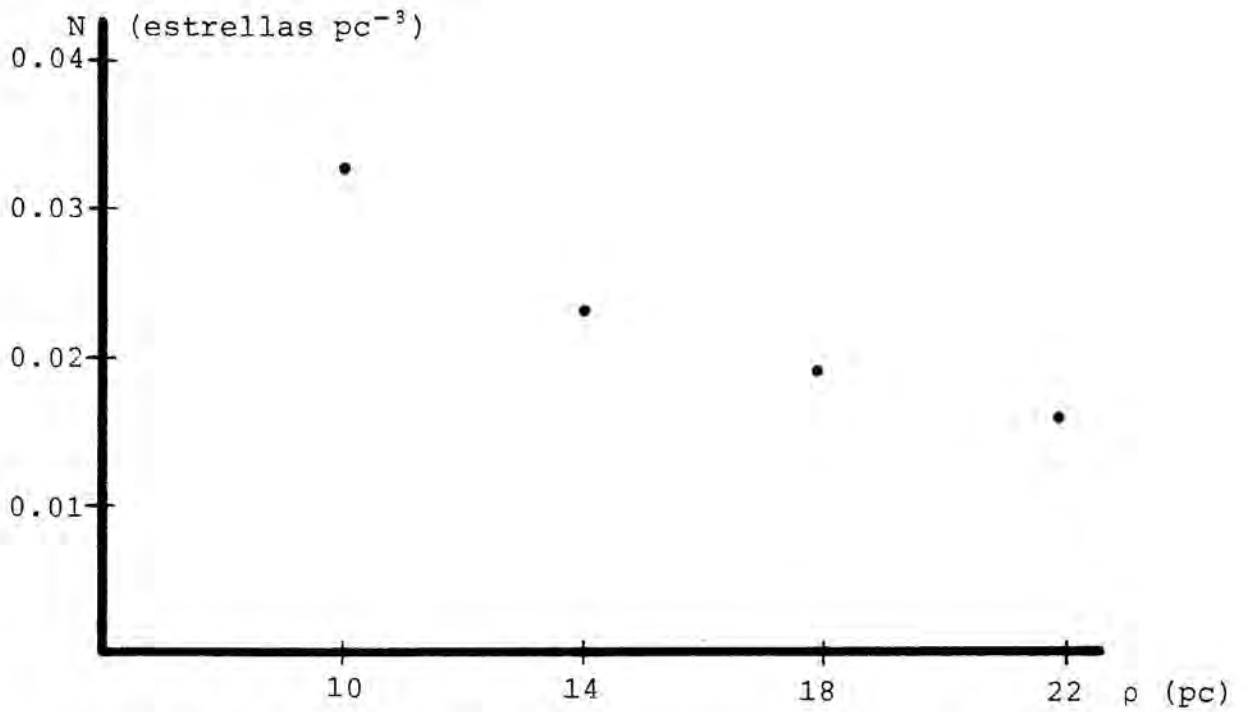


Figura 1.4. Variación de la densidad con la distancia en el Catálogo de GLIESE.

las clases I-IV, en la muestra del Catálogo de GLIESE un 91% de las estrellas pertenece a la secuencia principal, siendo los tipos K y M los más abundantes, mientras que en la muestra del Catálogo de FRICKE no hay estrellas de la clase V de los tipos F, G, K y M.

En cuanto se refiere a la distribución galáctica de las estrellas, el Catálogo de GLIESE está uniformemente distribuido en todas las latitudes galácticas, al igual que las estrellas del de FRICKE con distancias inferiores a 300 pc. Sin embargo, las estrellas de éste último Catálogo con distancias superiores a la citada están concentradas en una franja de 20° alrededor del ecuador galáctico, puesto que debido a su distancia sólo son visibles las estrellas muy brillantes, todas ellas situadas en el plano galáctico. En lo que a la posición galáctica se refiere, la distribución de estos grupos de estrellas del Catálogo de FRICKE puede encontrarse con detalle en DU MONT (1975, págs. 20 y 21).

1.4. Crítica

Como ya se ha dicho, si se observan las Tablas 1.2. y 1.3. se aprecia claramente la diferencia existente entre las poblaciones de los dos Catálogos, lo cual es debido a la diferencia entre las distancias de las estrellas en un Catálogo y en el otro. En el Catálogo de FRICKE las distancias son superiores a 100 pc, lo cual implica que las estrellas intrínsecamente más débiles, como son las de tipos espectrales avanzados de la

secuencia principal, aparezcan en cantidad menor que las de tipos espectrales "jóvenes" supergigantes y gigantes, que al ser intrínsecamente más brillantes pueden ser observadas a ma yores distancias. Nótese que en el Catálogo de FRICKE no hay estrellas de la secuencia principal de los tipos avanzados, de bido a su pequeña magnitud aparente a la distancia a que se ha considerado la selección y a estar el Catálogo FK4/FK4 Suppl. limitado a estrellas de magnitud visual aparente menor que 7.5. Asimismo, a medida que consideramos estrellas más lejanas del Sol, la densidad es decreciente al aumentar el radio de la muestra, siendo este efecto tanto más pronunciado cuanto más avanzado sea el tipo espectral de las estrellas.

El Catálogo de GLIESE contiene todas las estrellas que se han detectado, por débiles que sean, cuya paralaje ha sido medida y resulta ser mayor que $0''.045$. Sin embargo, en la Tabla 1.3. se ve que es deficitario en los últimos tipos espectrales y en la figura 1.4. se observa asimismo que la densidad del Catálogo es decreciente, efecto más pronunciado para las estrellas del tipo M. El origen de estas deficiencias está, por una parte, en la dificultad de observar a grandes distancias estrellas de tipos espectrales avanzados y en el caso de las estrellas M, como han sugerido algunos autores (GLIESE, 1972), en la posibilidad de que existan varios millares de estrellas con distancias inferiores a 22 pc cuya paralaje no ha sido medida y que, por tanto, no aparecen en el Catálogo. El motivo de no haber sido medidas dichas paralajes estriba en que los programas para medir paralajes basan la selección de las estrellas débiles en que éstas presenten movimiento propio elevado, lo cual

teóricamente indica su proximidad. Sin embargo, si varios miles de estrellas de tipos avanzados —y, por tanto, débiles— poseen una dispersión pequeña y, consecuentemente, un movimiento propio también pequeño, dichas estrellas no habrán sido incluidas en los programas de medida de paralajes y, por tanto, no figurarán en el Catálogo de GLIESE el cual, de ser todo esto cierto, estará sesgado hacia los movimientos propios elevados. En este supuesto, el Catálogo no sería representativo de la población del disco galáctico y los momentos centrados que con él se obtuviesen serían mayores que los verdaderos. A fin de paliar en parte este problema, como se detallará en el Capítulo segundo, se ha adoptado una densidad uniforme en la muestra que se utiliza para el cálculo de los momentos centrados a partir del Catálogo de GLIESE.

También el Catálogo de FRICKE está sesgado puesto que, como ya se ha indicado, la selección se realizó de modo que la velocidad residual de cada estrella fuese inferior a 35 km s^{-1} con respecto al centroide clásico. Como se verá en los Capítulos tercero y cuarto, esta condición se justifica por efectuarse la selección para servir como base a las determinaciones de la constante de la precesión y de los parámetros de la rotación galáctica, los cuales son muy afectados por la presencia en la muestra de estrellas de alta velocidad. Esta imposición en la selección de la muestra, muy importante según hemos dicho para los estudios de la rotación galáctica, puede sin embargo afectar al cálculo de los momentos centrados, los cuales con este Catálogo se obtendrán menores que los verdaderos.

Con respecto a la precisión de los Catálogos considerados, la incertidumbre actual en los movimientos propios ($0.20''/\text{siglo}$, equivalente a $10 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$) hace que la velocidad de una estrella situada a 2000 pc posea un error de 20 km s^{-1} , aun si su distancia está perfectamente determinada, lo cual implica que por encima de los 1000 pc es necesario mejorar las determinaciones de movimientos propios y no solamente de distancias si se desea determinar con suficiente precisión la velocidad espacial de las estrellas. En cuanto se refiere a las determinaciones de distancias para el Catálogo de FRICKE, éstas son inciertas en muchos casos; sin embargo, para la realización de este trabajo han sido preferidas a los factores paralácticos introducidos por otros autores. En el Catálogo de GLIESE la determinación de distancias es en general trigonométrica; no obstante, en algunos casos las paralajes trigonométrica y espectrofotométrica no concuerdan. Usando el sistema fotométrico a 7 colores de Ginebra, GRENON (1978) ha hallado que de una muestra de 360 estrellas del Catálogo de GLIESE, de tipos espectrales de F5 a K5, un 35% de la muestra se encuentra fuera de la esfera de 22 pc de radio, indicando que la causa puede estar en las diferentes fuentes de paralaje usadas por GLIESE para la confección de su Catálogo.

Pese a todo lo expuesto hasta ahora, los Catálogos descritos son los mejores de que disponemos para el objetivo que nos proponemos alcanzar, puesto que el Catálogo de FRICKE es representativo de las estrellas que se observan a grandes distancias, lo cual le hace válido para el cálculo de la rotación galáctica

y de los momentos centrados de la distribución de velocidades a larga distancia. Con respecto al Catálogo de GLIESE es el más completo de que disponemos para las estrellas próximas y muy adecuado para el cálculo de los momentos centrados a pequeña distancia, permitiéndonos comprobar el método de cálculo estadístico y estudiar la variación de los momentos en función de la distancia. Sin embargo, de lo expuesto puede deducirse que los resultados que en este trabajo se presentan serán susceptibles de mejora cuando se disponga de datos más ajustados. En este sentido, el proyecto del satélite astrométrico *HIPPARCOS* (TORRA y NUÑEZ, 1980) pretende la obtención de posiciones, movimientos propios y paralajes de 100 000 estrellas hasta la magnitud visual 12, con una precisión dos órdenes de magnitud mayor que las mejores determinaciones realizadas hasta el presente. Cuando el Catálogo esté disponible, hacia 1990, el presente trabajo podrá ser claramente mejorado y ampliado.

2. MOMENTOS CENTRADOS DE LA DISTRIBUCION DE VELOCIDADES

2.1. Planteamiento del problema

Sabido es el interés que para el estudio de una población tiene el conocimiento de los distintos momentos de la misma, de los cuales se deduce la media, la desviación típica, la asimetría, la curtosis, etc. El presente Capítulo pretende estudiar la distribución de velocidades en la población de estrellas próximas al Sol mediante la obtención de sus momentos centrados.

Consideremos un conjunto de estrellas cuyo estado dinámico viene dado por una función de distribución $f(t, \underline{r}, \underline{v})$, donde \underline{r} denota la posición de la estrella, \underline{v} la velocidad de la misma y t el tiempo. Esta función nos proporciona, para cada instante t , el número de estrellas de igual masa contenidas en un paralelepípedo de volumen $d\underline{r} d\underline{v}$ centrado en el punto $\underline{r}, \underline{v}$ del espacio fásico. Según esto, la densidad estelar es (véase, por ejemplo, MIHAILAS, 1967):

$$N(t, \underline{r}) = \int \underline{v} f(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v}$$

y la velocidad media del conjunto de estrellas:

$$\underline{v}(t, \underline{r}) = \frac{1}{N(t, \underline{r})} \int \underline{v} \underline{v} f(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v}$$

Se define el momento de orden n de la distribución de velocidades como el tensor de orden n :

$$m_n(t, \underline{r}) = \frac{1}{N(t, \underline{r})} \int_{\underline{v}} \underline{v}^n f(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v}$$

donde \underline{v}^n denota el producto tensorial $\underline{v} \otimes \underline{v} \otimes \dots \otimes \underline{v}$ (n veces).

Si consideramos la velocidad residual \underline{u} de la estrella:

$$\underline{u} = \underline{v} - \underline{v}(t, \underline{r})$$

la función de distribución toma la forma:

$$f(t, \underline{r}, \underline{v}(t, \underline{r}) + \underline{u}) \equiv g(t, \underline{r}, \underline{u})$$

que nos permite definir el momento centrado de orden n de la distribución de velocidades como el tensor de orden n :

$$\mu_n(t, \underline{r}) = \frac{1}{N(t, \underline{r})} \int_{\underline{u}} \underline{u}^n g(t, \underline{r}, \underline{u}) d\underline{u} \quad (2.1)$$

En adelante, si no se especifica lo contrario, entenderemos por momentos los momentos centrados.

Para proceder al cálculo efectivo de estos momentos tenemos que calcularlos componente a componente, puesto que cada momento centrado de orden n es un tensor de $(n^2 + 3n + 2)/2$ componentes independientes. Para expresar dichas componentes definimos en primer lugar las siguientes bases que nos harán falta en el desarrollo del trabajo.

Sea G el centro de la Galaxia y S la posición del Sol en la misma:

Sea $B_1 \equiv (\underline{\hat{\rho}}, \underline{\hat{\alpha}}, \underline{\hat{\delta}})$ la base de vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas esféricas de la referencia ecuatorial heliocéntrica, es decir, con $\underline{\hat{\rho}}$ en la dirección de la estrella, $\underline{\hat{\alpha}}$ en el sentido de las ascensiones rectas crecientes y $\underline{\hat{\delta}}$ en el sentido de las declinaciones crecientes. Esta base es la adecuada para expresar la posición, el movimiento propio y la velocidad radial de las estrellas en los Catálogos estelares.

Sea $B_2 \equiv (\underline{\hat{e}}_1, \underline{\hat{e}}_2, \underline{\hat{e}}_3)$ la base ortonormal ecuatorial heliocéntrica, orientada en sentido directo, con $\underline{\hat{e}}_1$ dirigido hacia el punto Aries y $\underline{\hat{e}}_2$ hacia el polo Norte ecuatorial. Esta base es la adecuada para expresar parámetros ligados al giro de la Tierra, como ocurre por ejemplo con la precesión.

Sea $B_3 \equiv (\underline{\hat{g}}_1, \underline{\hat{g}}_2, \underline{\hat{g}}_3)$ la base ortonormal galáctica heliocéntrica, orientada en sentido directo, con $\underline{\hat{g}}_1$ dirigido hacia el eje galáctico paralelamente al plano galáctico, y $\underline{\hat{g}}_3$ dirigido hacia el polo Norte galáctico (fig. 2.1.). Esta base es la adecuada para expresar parámetros ligados al giro de la Galaxia.

Sea $B_4 \equiv (\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{\phi}}, \underline{\hat{z}})$ la base de vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas cilíndricas (fig. 2.1.), siendo $\underline{\hat{\theta}} \equiv -\underline{\hat{g}}_1$, $\underline{\hat{\phi}} \equiv \underline{\hat{g}}_2$ y $\underline{\hat{z}} \equiv \underline{\hat{g}}_3$. Nótese que esta base no está orientada en sentido directo, ya que se ha elegido como sentido de $\underline{\hat{\theta}}$ el comunmente aceptado para la rotación de la Galaxia. Esta base es la adecuada para expresar los movimientos macroscópicos de la Galaxia con respecto a su centro.

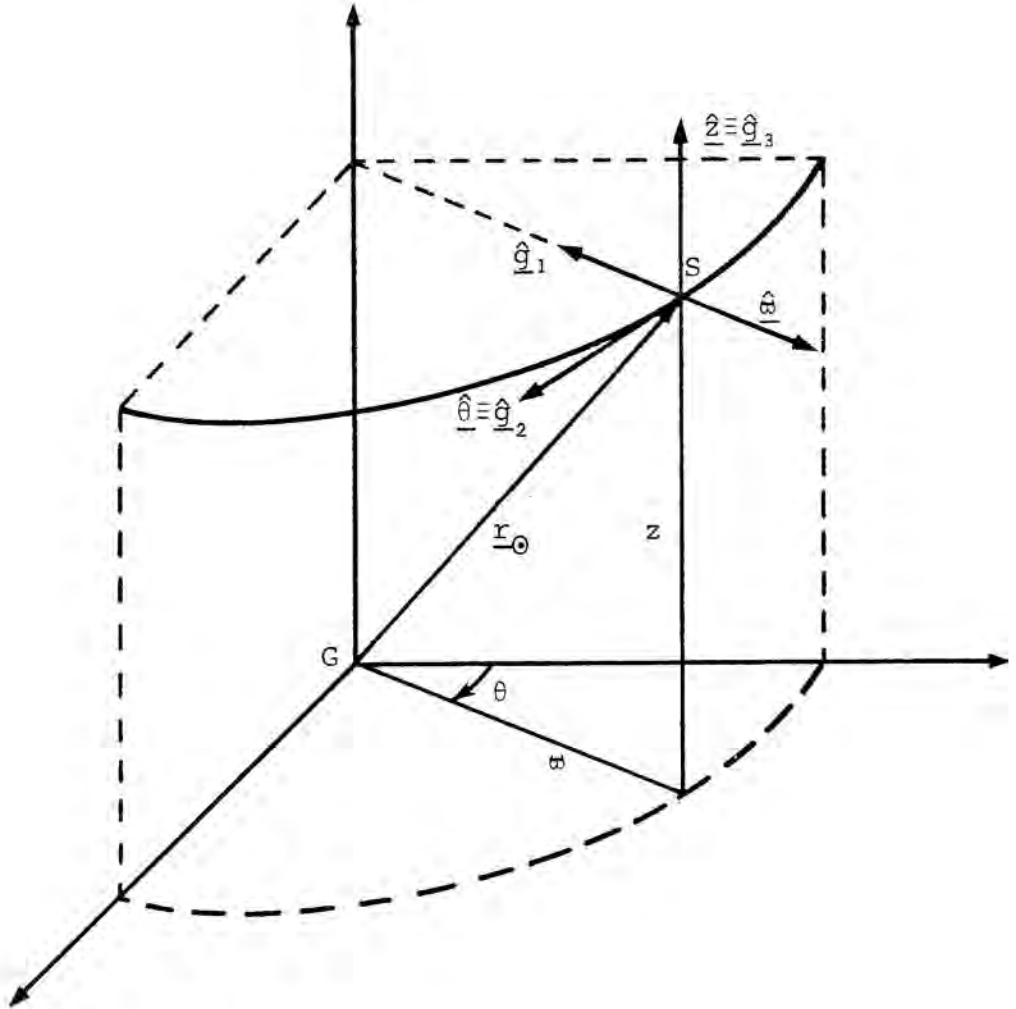


Figura 2.1. Bases de referencia B_3 y B_4

Definamos igualmente las matrices ${}_j C^1$ como las matrices de cambio de base de la base B_i a la base B_j .

Veamos ahora la expresión de la velocidad de la estrella en la base B_3 , en la cual expresaremos todos los momentos de la población estelar.

Sean α y δ la ascensión recta y la declinación de la estrella, μ_α el movimiento propio en ascensión recta, μ_δ el movimiento propio en declinación, V_ρ la velocidad radial y ρ la distancia heliocéntrica. La velocidad de la estrella en la base B_1 será entonces:

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} V_\rho \\ k \rho \mu_\alpha \cos \delta \\ k \rho \mu_\delta \end{pmatrix}_{B_1}$$

donde k representa la constante para el cambio de unidades, $k = 47.41 \text{ km siglo}/'' \text{ s kpc}$ si V_ρ se expresa en km s^{-1} , ρ en kpc y μ_α y μ_δ en $''/\text{siglo}$, expresándose \underline{V} entonces en km s^{-1} .

Para pasar \underline{V} de la base B_1 a la base B_3 aplicamos el cambio de base

$$\underline{V}_{B_3} = {}_3 C^1 \underline{V}_{B_1}$$

con:

$${}_3 C^1 \equiv R_3(-l) R_2(b) R_1(\phi)$$

donde l , b y ϕ son la longitud y la latitud galácticas y el ángulo paraláctico y R_i son las matrices de rotación (véase, por ejemplo, ORÚS, 1966). Efectuando las rotaciones indicadas obtenemos $\underline{V}_{B_3} \equiv (U, V, W)$, cuya expresión desarrollada es:

$$\begin{aligned}
 U &= V_{\rho} \cos l \cos b + k\mu_{\alpha} \cos \delta (\cos l \sin b \sin \phi - \\
 &\quad - \sin l \cos \phi) - k\mu_{\delta} (\cos l \sin b \cos \phi + \\
 &\quad + \sin l \sin \phi) \\
 V &= V_{\rho} \sin l \cos b + k\mu_{\alpha} \cos \delta (\sin l \sin b \sin \phi + \\
 &\quad + \cos l \cos \phi) - k\mu_{\delta} (\sin l \sin b \cos \phi - \\
 &\quad - \cos l \sin \phi) \\
 W &= V_{\rho} \sin b - k\mu_{\alpha} \cos \delta \cos b \sin \phi + \\
 &\quad + k\mu_{\delta} \cos b \cos \phi
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Las relaciones existentes entre α , δ , l , b y ϕ son:

$$\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_G) = -\cos b \sin(l - l_Q)$$

$$\cos \delta \cos(\alpha - \alpha_G) = -\cos b \sin \delta_G \cos(l - l_Q) + \cos \delta_G \sin b$$

$$\sin \delta = \cos b \cos \delta_G \cos(l - l_Q) + \sin \delta_G \sin b$$

$$\cos \delta \sin \phi = -\cos \delta_G \sin(l - l_Q)$$

$$\cos \delta \cos \phi = -\cos \delta_G \sin b \cos(l - l_Q) + \sin \delta_G \cos b$$

con $\alpha_G = 12^{\text{h}}49^{\text{m}}$ y $\delta_G = 27^{\circ}24'$ las coordenadas ecuatoriales del polo Norte galáctico y $l_Q = 123^{\circ}$ la longitud galáctica del polo Norte ecuatorial (ALLEN, 1964).

2.2. Método estadístico

Conocidas en la base B_3 las componentes (2.2) de la velocidad de cada estrella de la muestra, para el cálculo de los distintos momentos de la población expresamos en forma discreta

el tensor (2.1). En este caso, si a, b, c , denotan el número de veces que cada componente de la velocidad aparece en el índice del tensor, tenemos:

$$\mu_n \Big]_{a,b,c} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (U_i - U_0)^a (V_i - V_0)^b (W_i - W_0)^c \quad (2.3)$$

donde U_0, V_0 y W_0 son las medias de la muestra que nos dan el movimiento del centroide con respecto del Sol y son el reflejo del movimiento solar, y K es el número de estrellas de la muestra. Es evidente que U_0, V_0 y W_0 son las componentes del momento no centrado m_1 y que $\mu_1 = \underline{0}$.

Los momentos así calculados son los llamados momentos de la muestra y son unos estimadores de los momentos de la población. Estos momentos son unos estimadores sesgados de los momentos de la población; sin embargo, dado el tamaño de las muestras (varios centenares de estrellas), los errores que se introducen, considerando directamente los momentos de la muestra como estimadores de los momentos de la población, son mucho menores que los debidos al tamaño finito de la muestra. Se ha adoptado, por tanto, la expresión (2.3) como estimadora de los momentos de la población de estrellas de nuestra Galaxia.

Diversos autores (GÓMEZ, 1974; ERICKSON, 1975) emplean otros métodos para el cálculo de los momentos. GÓMEZ utiliza el método de los mínimos cuadrados, aplicándolo a las ecuaciones que relacionan los momentos de la distribución de velocidades con los de la distribución de probabilidad observada; Así calcula los momentos de primer y segundo orden de la distribución.

ERICKSON realiza el cálculo mediante cumulantes, sumas de productos de los momentos de la muestra y que son estimadores insesgados de los cumulantes de la población; el principal motivo de utilizarlos es el evitar el problema del cálculo de las expresiones de las covarianzas de los momentos centralizados, que se dan más adelante. La coincidencia de nuestros resultados con los de ERICKSON prueba que es correcto el adoptar la expresión (2.3), dentro de los márgenes de error en los que nos movemos. El trabajo de ERICKSON es el único moderno, hasta el presente estudio, que calcula y trata momentos de tercer y cuarto orden, por lo que será citado con frecuencia a lo largo de este trabajo.

Es evidente que, para poder valorar los resultados que se obtengan mediante la expresión (2.3), es preciso calcular también los errores con que estos momentos pueden conocerse. Tales errores pueden ser observacionales y estadísticos.

Los errores observacionales ΔV_ρ , $\Delta \mu_\alpha$, $\Delta \mu_\delta$ y $\Delta \rho$, de ser conocidos, pueden influir en los errores con que se obtienen los momentos de la población. Excepto los errores en los movimientos propios —que, sin embargo, pueden ser asimilados al valor de la última cifra significativa— estos errores, con las limitaciones del Capítulo primero, se conocen para el Catálogo de GLIESE aunque no figuran en el de FRICKE y habría que acudir a los valores de los errores publicados para el FK4. En su trabajo, ERICKSON publica la matriz de las covarianzas observacionales, teniéndolas en cuenta para calcular las covarianzas entre los distintos momentos debidas a los errores observacionales. En nuestro trabajo, al utilizar también el Catálogo de

FRICKE, se ha preferido no tener en cuenta los errores observacionales ya que además, en general, son mucho menores que los errores estadísticos que se expondrán a continuación. Comparando los errores obtenidos por ERICKSON en su trabajo con los obtenidos por nosotros con su misma muestra, se observan diferencias inferiores al 10% entre el valor del error total (observacional + estadístico) calculado por él y el estadístico calculado por nosotros, diferencias no significativas a la vista de los valores que se obtienen.

Los errores estadísticos son las incertidumbres debidas al tamaño finito de la muestra. Las expresiones de las covarianzas de los momentos centrados producidas por el citado tamaño finito de la muestra, tambien llamadas covarianzas de muestreo, son de difícil deducción debido a las correlaciones entre las distintas estrellas que se introducen al restar la media de la muestra. Un método usual consiste en calcular los momentos centrados empleando expresiones que los dan en función de los no centrados, deduciendo luego las covarianzas de éstos a través de la propagación de los errores de los momentos no centrados, los cuales son ya fáciles de obtener. En efecto, las ecuaciones que dan las varianzas de los momentos no centrados son:

$$\text{Var } m_n]_{a,b,c} = \frac{m_{2n}]_{2a,2b,2c} - (m_n]_{a,b,c})^2}{K}$$

donde K es el número de estrellas de la muestra. Sin embargo, este método puede presentar inexactitudes numéricas, debido a la gran cantidad de sumandos que aparecen en las expresiones de los momentos de orden elevado.

Se han publicado (KAPLAN, 1952) las fórmulas que dan las covarianzas de los cumulantes de una distribución hasta el cuarto orden, pero no las correspondientes a los momentos. En su trabajo, ERICKSON utiliza los cumulantes como paso intermedio para poder emplear las fórmulas de KAPLAN; sin embargo, en nuestro trabajo, hemos preferido deducir directamente las fórmulas que dan las varianzas de los momentos centrados. Para ello, hemos utilizado las expresiones de KAPLAN en segundo y tercer orden, ya que, en estos órdenes, salvo una constante muy próxima a la unidad, los momentos y los cumulantes de una población son coincidentes. Para transformar las expresiones en cumulantes de KAPLAN en las correspondientes a momentos, hemos necesitado poner los cumulantes en función de los momentos centrados hasta el sexto orden, ya que en las expresiones de las covarianzas de los cumulantes o momentos de orden n aparecen todos los cumulantes o momentos hasta el orden $2n$. Esta tarea es sumamente laboriosa, por lo cual no puede proseguirse dicho método de deducción indefinidamente. Una vez obtenidas las expresiones de los momentos de segundo y tercer orden, las de las covarianzas de los momentos de cuarto orden se han deducido generalizando las correspondientes a los de segundo y tercer orden, restringiéndonos a las varianzas y cuidando de que las simplificaciones de todas ellas a una dimensión sean coincidentes con las fórmulas aproximadas que para una sola dimensión se suelen utilizar (MOTHES, 1960, pág. 88) y con las que se han publicado para dos dimensiones (KENDALL y STUART, 1979).

Las expresiones que se han deducido y que se emplearán en los cálculos se exponen a continuación.

Como ya se ha indicado, para obtener los momentos centrados de una población estelar usamos la expresión (2.3), para lo cual, dada una determinada muestra de estrellas, procedemos a calcular para cada estrella, según las ecuaciones (2.2), las componentes de la velocidad espacial en la base B_3 y, una vez calculadas las medias de toda la muestra U_0 , V_0 y W_0 se introducen en la expresión (2.3) para obtener todos los momentos. Recordemos que al deducir los momentos hasta el cuarto orden, es necesario calcular todos los momentos hasta el octavo orden, pues en las varianzas de los primeros intervienen todos los que hay hasta el octavo orden.

Veamos ahora las expresiones de las varianzas de los momentos hasta el cuarto orden. Para ello consideremos en primer lugar un cambio de notación pasando los índices a, b, c del tensor de orden n (con $a+b+c = n$) a la forma i, j, k, l, \dots, n , donde cada índice puede valer 1, 2 ó 3 según sea la primera, segunda o tercera componente, es decir:

$$\mu_n \Big|_{a,b,c} = \mu_{1,1,\dots,1,2,2,\dots,2,3,3,\dots,3}$$

En general, denotaremos $\mu_{i,j,k,\dots,n}$ el momento de orden n , siendo muy útil esta notación para escribir las varianzas, pues sus expresiones en la forma a, b, c son mucho más complicadas.

Las expresiones de las varianzas de los momentos centrados son las siguientes:

Orden 2:

$$\text{var } \mu_{ij} = \frac{1}{K} \mu_{ijij} + \mu_{ij}^2 \left(\frac{1}{K-1} - \frac{2}{K} \right) + \mu_{ii} \mu_{jj} \left(\frac{1}{K-1} - \frac{1}{K} \right)$$

siendo K el número de estrellas de la muestra. Si K es grande esta expresión puede aproximarse por:

$$\text{var } \mu_{ij} = \frac{1}{K} (\mu_{ijij} - \mu_{ij}^2) \quad (2.4)$$

Orden 3:

$$\begin{aligned} \text{var } \mu_{ijk} = & \frac{1}{K} \mu_{ijkijk} + \left(\frac{2}{K-1} - \frac{4}{K} \right) (\mu_{iijk} \mu_{jk} + \mu_{ijjk} \mu_{ik} + \\ & + \mu_{ijkk} \mu_{ij}) + \left(\frac{1}{K-1} - \frac{1}{K} \right) (\mu_{iijj} \mu_{kk} + \mu_{iikk} \mu_{jj} + \\ & + \mu_{jjkk} \mu_{ii}) + \left(\frac{3}{K-1} - \frac{4}{K} \right) \mu_{ijk}^2 + \left(\frac{2}{K-1} - \frac{2}{K} \right) (\mu_{iij} \mu_{jkk} + \\ & + \mu_{ijj} \mu_{ikk} + \mu_{iik} \mu_{jjk}) + \left(\frac{2}{K} - \frac{3}{K-1} + \frac{K}{(K-1)(K-2)} \right) \\ & \mu_{ii} \mu_{jj} \mu_{kk} + \left(\frac{4}{K} - \frac{4}{K-1} + \frac{K}{(K-1)(K-2)} \right) (\mu_{ii} \mu_{jk}^2 + \\ & + \mu_{jj} \mu_{ik}^2 + \mu_{kk} \mu_{ij}^2) + \left(\frac{16}{K} - \frac{12}{K-1} + \frac{2K}{(K-1)(K-2)} \right) \\ & \mu_{ij} \mu_{ik} \mu_{jk} \end{aligned}$$

cuya expresión aproximada para K grande es:

$$\begin{aligned} \text{var } \mu_{ijk} = & \frac{1}{K} \left[\mu_{ijkijk} - 2(\mu_{iijk} \mu_{jk} + \mu_{ijjk} \mu_{ik} + \right. \\ & + \mu_{ijkk} \mu_{ij}) - \mu_{ijk}^2 + (\mu_{ii} \mu_{jk}^2 + \mu_{jj} \mu_{ik}^2 + \\ & \left. + \mu_{kk} \mu_{ij}^2) + 6\mu_{ij} \mu_{ik} \mu_{jk} \right] \quad (2.5) \end{aligned}$$

Orden 4:

La expresión de la fórmula aproximada para el cuarto orden es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{var } \mu_{ijkl} = & \frac{1}{K} \mu_{ijkl} \mu_{ijkl} - \frac{1}{K} \mu_{ijkl}^2 - \frac{2}{K} (\mu_{iijkl} \mu_{jkl} + \\
 & + \mu_{ijjkl} \mu_{ikl} + \mu_{ijkkl} \mu_{ijl} + \mu_{ijkl} \mu_{ijk}) + \\
 & + \frac{1}{K} (\mu_{ii} \mu_{jkl}^2 + \mu_{jj} \mu_{ikl}^2 + \mu_{kk} \mu_{ijl}^2 + \mu_{ll} \mu_{ijk}^2) + \\
 & + \frac{1}{K} (\mu_{ij} \mu_{ijk} \mu_{kk} + \mu_{ij} \mu_{ijl} \mu_{kk} + \mu_{ik} \mu_{ikl} \mu_{jll} + \\
 & + \mu_{ik} \mu_{ijk} \mu_{jll} + \mu_{il} \mu_{ijl} \mu_{jkk} + \mu_{il} \mu_{ikl} \mu_{jjk} + \\
 & + \mu_{jk} \mu_{ijk} \mu_{ill} + \mu_{jk} \mu_{jkl} \mu_{iil} + \mu_{jl} \mu_{ijl} \mu_{ikk} + \\
 & + \mu_{jl} \mu_{jkl} \mu_{iik} + \mu_{kl} \mu_{ikl} \mu_{ijj} + \mu_{kl} \mu_{jkl} \mu_{iij}) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Para los cálculos, en lugar de aplicar las fórmulas exactas se han utilizado las fórmulas aproximadas, después de comprobar para cada orden la prácticamente nula diferencia entre los resultados de ambas expresiones.

2.3. Resultados obtenidos

Los cálculos que aquí se presentan han sido efectuados con 3 muestras distintas, una de ellas obtenida con el Catálogo de GLIESE y las dos restantes con el Catálogo de FRICKE. Se han elegido estas 3 muestras como las más representativas para los

finés que se persiguen en este trabajo. Resultados obtenidos con otras muestras de estos mismos Catálogos, así como una discusión general de los valores de los momentos centrados, pueden verse en NÚÑEZ y TORRA (1980a; 1981). Los cálculos, al igual que los de los Capítulos tercero y cuarto se han realizado con la ayuda del ordenador *Facom 230/38 S* del Centro de Cálculo de la Universidad Politécnica de Barcelona.

Los resultados de las tres muestras citadas figuran en la Tabla 2.1., siendo las muestras utilizadas:

- 1.- Catálogo de GLIESE, con densidad uniforme de 0.016 pc^{-3} (712 estrellas).
- 2.- Catálogo de FRICKE, muestra completa de 500 estrellas.
- 3.- Catálogo de FRICKE, estrellas de tipos espectrales A-M (222 estrellas).

El grupo 1 ha sido hecho a partir de la muestra de 869 estrellas del Catálogo de GLIESE (Tabla 1.1.), eliminando aleatoriamente algunas estrellas con el fin de conseguir para toda la esfera de 22 pc de radio una densidad uniforme de $N = 0.016 \text{ pc}^{-3}$. El trabajar con esta muestra y no con la original de 869 estrellas se justifica porque los resultados que se obtienen, prácticamente idénticos a los de ERICKSON, se refieren a una muestra de densidad uniforme y, por tanto, es más representativa del entorno solar.

El grupo 2 es la totalidad del Catálogo de FRICKE, cuyos resultados nos servirán para comparar con los demás.

Tabla 2.1. Momentos centrados de la distribución de velocidades y sus errores standard. U_0 , V_0 , W_0 son las medias de la muestra. La primera columna indica las componentes del tensor.

	1		2		3	
U_0	-10.3±	1.4	-9.8±	0.7	-8.1±	1.2
V_0	-20.5	0.9	-12.1	0.7	-9.7	0.9
W_0	-7.6	0.7	-7.6	0.7	-5.9	0.8
μ_{200}	1 310±	80	270±	50	330±	90
μ_{110}	105	45	20	30	-40	50
μ_{020}	600	45	220	50	160	30
μ_{101}	10	30	30	30	50	20
μ_{011}	20	20	-60	60	-10	10
μ_{002}	340	25	220	80	140	20
μ_{300}	-4 600±	6 500	-6 200±	4 800	-13 300±	10 000
μ_{210}	-13 200	3 200	4 100	3 000	6 500	6 000
μ_{120}	1 500	2 800	950	3 600	-4 100	3 800
μ_{030}	-14 400	2 700	7 300	6 800	2 900	2 300
μ_{201}	2 900	2 300	-1 600	1 800	- 900	500
μ_{111}	- 900	1 400	-4 100	4 100	200	400
μ_{021}	- 200	1 500	-9 100	8 800	- 200	300
μ_{102}	-1 400	1 200	5 800	5 500	400	600
μ_{012}	-2 600	900	11 600	11 900	- 100	300
μ_{003}	900	1 200	-15 300	15 600	- 200	800
μ_{400}	6 710 000±1 000 000		1 120 000± 600 000		1 800 000±1 300 000	
μ_{310}	370 000	370 000	- 250 000	360 000	- 850 000	800 000
μ_{220}	1 470 000	280 000	500 000	320 000	550 000	490 000
μ_{130}	-70 000	260 000	350 000	500 000	- 350 000	310 000
μ_{040}	1 760 000	290 000	1 300 000	1 000 000	270 000	200 000
μ_{301}	-60 000	310 000	-70 000	140 000	80 000	40 000
μ_{211}	-40 000	130 000	- 290 000	290 000	-25 000	20 000
μ_{121}	40 000	110 000	- 620 000	630 000	20 000	20 000
μ_{031}	60 000	130 000	1 400 000	1 400 000	-16 000	20 000
μ_{202}	770 000	120 000	450 000	380 000	70 000	20 000
μ_{112}	10 000	60 000	850 000	830 000	-20 000	15 000
μ_{022}	370 000	70 000	1 900 000	1 820 000	30 000	10 000
μ_{103}	40 000	70 000	- 990 000	1 100 000	25 000	25 000
μ_{013}	40 000	60 000	-2 400 000	2 400 000	-20 000	10 000
μ_{004}	570 000	110 000	3 350 000	3 200 000	130 000	45 000

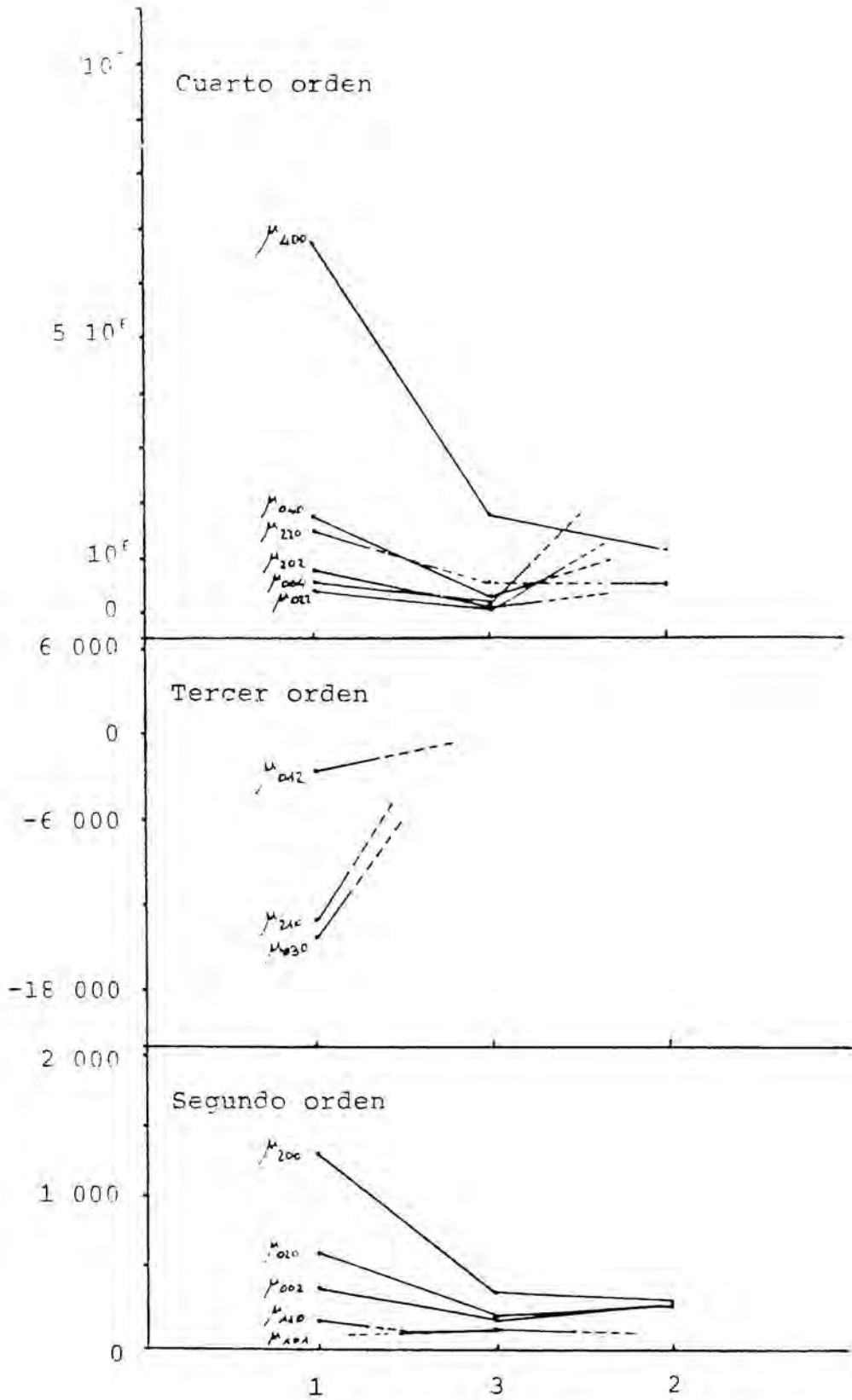


Figura 2.2. Valores comparativos de los momentos centrados más notables obtenidos con las muestras de los Catálogos de GLIESE y de FRICKE. Unidades: $\text{km}^n \text{s}^{-n}$ para el orden n .

El grupo 3 contiene las 222 estrellas del Catálogo de FRICKE cuyos tipos espectrales están comprendidos entre los A y M, es decir, se han eliminado todas las estrellas de los tipos O y B por no ser representativas de la población común del disco galáctico. Dado que se pretende obtener una muestra, representativa del entorno solar, con la cual calcular los momentos centrados y los gradientes del campo de velocidades, creemos que esta muestra es la adecuada para el trabajo que nos proponemos.

Los resultados más sobresalientes de los tres grupos pueden verse, asimismo, en la fig. 2.2., la cual constituye una visualización de la Tabla 2.1.

2.4. Discusión

En primer lugar, vemos que muchos de los momentos calculados son bastante mayores que sus respectivas desviaciones típicas, lo cual prueba que momentos de un orden tan elevado como el cuarto pueden ser determinados con suficiente exactitud. En general, supondremos no nulo aquel momento cuyo valor sea, por lo menos, el doble que su respectiva desviación standard.

Una rápida ojeada a los valores obtenidos muestra grandes diferencias entre los grupos 1, 2 y 3, por lo que antes de pasar a discutir los resultados concretos haremos algunas consideraciones con el fin de analizar las posibles causas de tales discrepancias.

Es bien conocido el hecho observacional de que la distribución de velocidades de un grupo de estrellas está íntimamente relacionada con su tipo espectral. En particular, los semi-ejes del elipsoide de velocidades residuales tienden a crecer al tratar con tipos espectrales cada vez más avanzados.

Se han dado varias explicaciones de este hecho experimental (DELHAYE, 1965); por ejemplo, la equipartición de la energía en las estrellas. Una de las posibles causas, de las mejor estudiadas, sería la dependencia de las propiedades cinemáticas de la edad de las estrellas, ya que la edad media de las mismas aumenta al avanzar el tipo espectral. En este sentido, el aumento de la dispersión sería debido a los encuentros estelares, que tenderían a acelerar las estrellas más viejas; sin embargo, CHANDRASEKHAR (1942) ha demostrado que esto no es posible, pues el tiempo de relajación necesario para ello es demasiado largo. SPITZER y SCHWARZSCHILD (1953) sugirieron que podrían ser la causa los encuentros acumulados entre estrellas individuales y grandes nubes complejas de gas. Basándose en esta hipótesis, VON HOERNER (1960) estudió con detalle las variaciones de las propiedades cinemáticas de las estrellas con su edad, desarrollando para ello una fórmula basada en la hipótesis citada. Dicha fórmula suministra la velocidad media de las estrellas en función de su edad; sin embargo, es dudosa la existencia de un número de agregados masivos gaseosos lo suficientemente grande como para causar el efecto descrito. PARENAGO (1950) advierte la presencia de una discontinuidad a lo largo de la secuencia principal, alrededor del tipo F5, cuando se estudia la relación existente entre las propiedades cinemáticas

y el tipo espectral; según PARENAGO y MASEVITCH (1950) ello es debido a que existen diferentes relaciones masa-radio y masa-luminosidad para las dos zonas de la secuencia principal. Otra explicación de esta discontinuidad es que, según las teorías de la evolución de la Galaxia, las estrellas de tipos espectrales avanzados tienen edades comparables o incluso mayores que la edad de la Galaxia, mientras que las de los primeros tipos tienen edades más pequeñas; el paso de un grupo al otro se realiza alrededor de la magnitud absoluta $M_V = 3.5$ (SANDAGE, 1958), la cual corresponde al tipo F6. Esta teoría es similar a la de SALPETER (1955) para explicar la discontinuidad en la función de luminosidad, que aparece para la magnitud absoluta $M_V = 3.5$, puesto que dicha función nos da para cada magnitud absoluta el número de estrellas por unidad de volumen en el entorno solar. BARBANIS y WOLTJER (1967) sugieren que la acción gravitatoria de las perturbaciones espirales, las cuales decaen exponencialmente con el tiempo, haría crecer la dispersión de las velocidades. Siguiendo esta idea BYL (1974), analizando el Catálogo de GLIESE, deduce que la dependencia entre las propiedades cinemáticas y la edad puede explicarse si los brazos espirales se han disuelto y rehecho varias veces. Esta última posibilidad es defendida por CLUBE (1978), quien mantiene que la estructura espiral de la Galaxia se deshace y se vuelve a formar en poco tiempo por medio de violentas eyecciones desde el núcleo galáctico.

Además de todo esto, dentro de determinados tipos espectrales se han detectado subgrupos con diferentes propiedades

cinemáticas, por ejemplo, las enanas de los tipos M y Me (DELHAYE, 1953). En vista de este hecho, EINASTO (1954) subdivide la secuencia principal en dos grupos cinemáticamente diferentes, sin atender a los tipos espectrales, y describe la distribución de velocidades por superposición de dos elipsoides de diferentes media y dispersión. Las características de los dos grupos encontrados por EINASTO son: Grupo I con una dispersión en dirección de su eje mayor de 14.5 km s^{-1} y Grupo II con una dispersión en la dirección del correspondiente eje mayor de 29.1 km s^{-1} . Una Tabla con los porcentajes de pertenencia de cada tipo espectral a cada grupo puede encontrarse en DELHAYE (1965, pág. 79).

Esta relación entre las propiedades cinemáticas, el tipo espectral y la edad de las estrellas se ha usado para estimar la edad media de las estrellas de los distintos tipos espectrales a partir de sus propiedades cinemáticas (MAYOR, 1974; GÓMEZ, 1974; WIELEN, 1974), estableciendo para ello la relación dispersión-edad que permite calcular la edad media de un grupo conociendo sólo su cinemática.

En nuestro trabajo no pretendemos justificar una u otra teorías, sino utilizar estos hechos para discutir los resultados.

Si observamos nuestros resultados y comparamos los grupos 1, 2 y 3 (véase fig. 2.2.), se ve inmediatamente que los valores del grupo 1 son mayores que los del grupo 2. Esto era de esperar pues, como se ha indicado en el Capítulo primero,

la muestra del grupo 1 está formada por estrellas del Catálogo de GLIESE, las cuales son principalmente de los tipos A-M de la secuencia principal, mientras que la muestra de 500 estrellas del Catálogo de FRICKE posee un elevado porcentaje de estrellas de los primeros tipos espectrales (supergigantes O-B y gigantes), las cuales poseen menor dispersión. Este mismo efecto se presenta al observar los resultados del grupo 3, el cual, a pesar de estar excluidas las estrellas de los tipos O y B, sigue poseyendo una importante parte de estrellas supergigantes y gigantes. Lo expuesto en el Capítulo primero sobre el sesgo del Catálogo de GLIESE hacia dispersiones grandes y del de FRICKE hacia dispersiones menores, no puede justificar tan notables diferencias, las cuales han de ser debidas a que se trata con distintos tipos de estrellas. Estos resultados nos confirman, una vez más, la relación existente entre las propiedades cinemáticas de los distintos grupos y el tipo espectral y la clase de luminosidad de las estrellas, o, si se prefiere, la relación dispersión-edad.

Comparando nuestros resultados con los de otros autores, vemos que es prácticamente total la concordancia existente entre los valores obtenidos en el grupo 1 y los de ERICKSON (1975). Por ejemplo, los valores obtenidos por ERICKSON para los momentos de segundo orden son: $\mu_{200} = 1310 \pm 77 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$, $\mu_{110} = 111 \pm 42 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$, $\mu_{020} = 595 \pm 42 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ y $\mu_{002} = 347 \pm 25 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$, todos ellos en buena concordancia con el grupo 1, lo cual prueba la bondad del método de cálculo utilizado y de las expresiones (2.4), (2.5) y (2.6). Igualmente,

los valores de los reseñados errores totales (observacionales + estadísticos) comparados con los de la Tabla 2.1., que son sólo errores estadísticos, indican que en estos casos se puede prescindir sin cometer graves errores de los errores observacionales frente a los estadísticos, ya que, además, la discrepancia es menor precisamente en los valores más significativos. Nótese que la muestra 1 no es idéntica a la de ERICKSON, pues tiene densidad uniforme, lo cual sugiere que los valores con ella obtenidos pueden ser más indicativos que los del propio ERICKSON, los cuales, en todo caso, quedan plenamente con firmados.

Otro autor (GÓMEZ, 1974) publica momentos de segundo orden para una muestra de estrellas de la secuencia principal y gigantes del tipo III. Dado que su muestra se extiende hasta 1 kpc, podemos compararla con la del grupo 3, de 222 estrellas de tipos A-M y distancias comprendidas entre 100 pc y 1 kpc. Dado que en su trabajo GÓMEZ divide su muestra en grupos más pequeños, según el tipo espectral, la comparación es ahora menos sencilla de lo deseado, ya que el autor obtiene valores dispares entre sus distintos grupos, debido al pequeño tamaño de las muestras empleadas; a pesar de ello, se observa una buena concordancia con nuestros valores.

Veamos ahora qué puede esperarse *a priori* de los momentos centrados de la población de estrellas. Es conocido que, para una población normal (KENDALL y STUART, 1979), los momentos centrados de orden impar son nulos y los de orden par también lo son, excepto aquellos cuyos índices sean iguales o iguales dos a dos; en este tipo de distribución los momentos de tercer

orden son nulos y su presencia experimental constituye un *test* para ver si la distribución de velocidades residuales en el entorno del Sol obedece a la ley normal. Por otro lado las simetrías comunmente asumidas para la Galaxia implican paridad en las direcciones radial y perpendicular al plano galáctico (ϖ y z), por lo que los momentos que sean pares en U , W , o ámbos a la vez, podrán ser no-nulos mientras que los demás deberán ser nulos. Según esto los momentos que pueden ser no-nulos son: μ_{200} , μ_{020} , μ_{002} de segundo orden, μ_{210} , μ_{030} , μ_{012} de tercer orden y μ_{400} , μ_{220} , μ_{202} , μ_{040} , μ_{022} y μ_{004} de cuarto orden, debiendo ser nulos todos los demás de estos ordenes, entendiendo por "nulos" aquellos claramente inferiores a sus errores.

El grupo al que hay que referirse en primer lugar es el 1, pues es la muestra cercana con densidad uniforme y en él puede apreciarse que son no-nulos todos los momentos citados anteriormente, apareciendo además el μ_{110} , al cual podemos calificar de "prohibido". Por otra parte, el obtener momentos de tercer orden no-nulos confirma la no-normalidad de la distribución de las velocidades residuales en las proximidades del Sol. En cambio el grupo 2, de forma clara, sólo muestra no-nulos los momentos principales de segundo orden, si bien ello es debido a la presencia de gran cantidad de estrellas gigantes y supergigantes de los tipos O y B, que enmascaran la distribución de velocidades. Estas estrellas han sido eliminadas en el grupo 3 con lo cual, además de los momentos de segundo orden, ya se aprecian claramente varios momentos de cuarto orden, como

son los μ_{202} , μ_{022} y μ_{004} ; los demás, μ_{400} , μ_{220} y μ_{040} , también son superiores a sus errores, pero la precisión con la que se conocen es algo menor. En cuanto se refiere a los momentos "prohibidos", en este grupo no aparecen ni los de tercer orden ni el μ_{110} , pero sí en cambio lo hace el momento μ_{101} .

Vemos, por tanto, que cuando consideramos estrellas próximas la ley normal no se verifica, puesto que aparecen momentos de tercer orden y el μ_{110} . Por otra parte, utilizando únicamente momentos "permitidos" por la ley normal, ORÚS (1975) ha demostrado que la distribución de velocidades no puede ser cuadrática en las velocidades residuales cuando se adoptan los valores de ERICKSON, equivalentes a los de nuestro grupo 1.

Según hemos visto, el grupo 3 no presenta desviación del vértex, al ser μ_{110} nulo, ni momentos de tercer orden; si además aplicamos a los resultados de este grupo los criterios dados por ORÚS (1975), dichos resultados, inciertos debido a los errores asociados, no son, en principio, incompatibles con la ley normal. Por tanto, excepto a lo que al valor de μ_{101} se refiere, la distribución de las velocidades residuales de las estrellas alejadas del entorno solar es compatible con la ley normal, mientras se desvía considerablemente de ella para las estrellas próximas.

Ambos grupos 1 y 3 son compatibles, sin embargo, con las simetrías comunmente asumidas para la Galaxia y ya descritas anteriormente, excepto en cuanto se refiere a los dos momentos "prohibidos" μ_{110} y μ_{101} , el primero de los cuales está

provocado por la desviación del vértex estudiada por diversos autores (DELHAYE, 1965; MAYOR, 1972). En este trabajo podemos ver que dicha desviación parece ser de origen puramente local, ya que no se presenta al considerar el grupo 3 de estrellas más lejanas, apareciendo en cambio la desviación del eje del elipsoide con respecto del plano galáctico debida a la presencia del μ_{101} . Podemos deducir, por tanto, que, al alejarnos del Sol, va difuminándose la influencia de las estrellas cercanas, que provocan la desviación del vértex, apareciendo la desviación en dirección del plano galáctico. NÚÑEZ y TORRA (1981) han mostrado que la desviación del vértex varía fuertemente según el hemisferio, manteniéndose constantes los demás momentos, lo cual indica que las simetrías comunmente asumidas para la Galaxia son correctas y consistentes con el muestreo, mientras que las desviaciones que aparecen, tipo desviación del vértex, son debidas a determinados grupos de estrellas que producen irregularidades locales por la distribución de las velocidades residuales.

Hechas estas consideraciones generales, pasemos ahora a estudiar los valores que hemos obtenido para el movimiento solar y los momentos centrados.

En cuanto se refiere al movimiento del Sol respecto al centroide, que se expresa $(-U_0, -V_0, -W_0)$, los valores que se obtienen son del orden de $(10.3 \pm 1.4, 20.5 \pm 0.9, 7.6 \pm 0.7)$ km s⁻¹ para el Catálogo de GLIESE (grupo 1), de $(9.8 \pm 0.7, 12.1 \pm 0.7, 7.6 \pm 0.7)$ km s⁻¹ para el Catálogo de FRICKE (grupo 2) y de

(8.1 ± 1.2 , 9.7 ± 0.9 , 5.9 ± 0.8) km s^{-1} para el grupo 3. Dichos valores están en perfecto acuerdo con los corrientemente adoptados (DELHAYE, 1965) según se trate de estrellas próximas o lejanas y, en particular, los deducidos con el Catálogo de FRICKE concuerdan con los obtenidos en el próximo Capítulo por el método de los mínimos cuadrados aplicado a las ecuaciones de condición que se plantean. Como comparación, los valores standard admitidos (DELHAYE, 1965) son (9, 12, 7) km s^{-1} , en plena concordancia con los obtenidos con el Catálogo de FRICKE.

Los momentos de segundo orden que se obtienen ya han sido comentados anteriormente y su valor está de acuerdo con las de terminaciones previas de los mismos. Nótese que $\mu_{200} > \mu_{020} > \mu_{002}$ y la pequeñez de los valores de μ_{110} y de μ_{101} . Es de destacar igualmente que para el grupo 1 se obtienen claramente los tres ejes del elipsoide de velocidades, mientras que en el grupo 2 no se aprecian debido a la presencia de las estrellas O y B. En el grupo 3, al haber sido eliminadas éstas, el elipsoide presenta de nuevo los tres ejes distintos aunque, naturalmente, menores; sin embargo, la relación entre los semiejes sigue conservándose bastante bien.

En cuanto a los momentos de tercer orden, no disponemos de valores clásicos, por lo que la única comparación posible es con los de ERICKSON, con los cuales concuerdan plenamente los del grupo 1. Estos momentos no se obtienen con las muestras del Catálogo de FRICKE —ni siquiera con el grupo 3— lo cual parece indicar que los momentos de orden impar (al menos los de tercer orden) son nulos si se toma una muestra alejada del Sol.

Para los momentos de cuarto orden, tampoco tenemos más fuente de comparación que el trabajo de ERICKSON, con cuyos resultados concuerda perfectamente el grupo 1. En este caso, sí se obtienen momentos en el grupo 3, también menores que los del grupo 1. Como ya se ha dicho, estos valores del grupo 3 son los que cabría esperar en función de las simetrías aceptadas para la Galaxia.

A la vista de la discusión precedente, vamos a elegir el grupo 3 como el más representativo para los estudios posteriores, ya que con él también podemos calcular los gradientes y disponer, por primera vez, de un conjunto de momentos y gradientes obtenidos con una misma muestra de estrellas, representativa del entorno solar y a una distancia lo suficientemente lejana como para poder obtener conclusiones de carácter general.

Al cálculo de los citados gradientes del campo galáctico de velocidades vamos a dedicar el próximo Capítulo.

3. ANALISIS CINEMATICO DEL CAMPO DE VELOCIDADES

3.1. Modelo tridimensional

Clásicamente, el estudio del campo galáctico de velocidades se había realizado mediante un modelo plano bidimensional de OORT-LINDBLAD. OGORODNIKOV (1932) e, independientemente, MILNE (1935) desarrollaron el modelo tridimensional, llamado de OGORODNIKOV-MILNE, que fué aplicado por primera vez por CLUBE (1972; 1973; 1974) a los movimientos propios de las estrellas del FK4, del AGK3 y del programa piloto de Lick. Posteriormente RIUS (1974), DU MONT (1977), NÚÑEZ (1977) y NÚÑEZ y TORRA (1980b) han considerado este modelo, siendo sus resultados bastante concordantes entre sí y radicalmente distintos de los de CLUBE. El propósito del presente Capítulo es profundizar en estos estudios, aplicando dicho modelo tridimensional a las mismas estrellas con las cuales hemos calculado los momentos centrados de la distribución de velocidades, con el fin de disponer, por primera vez, de gradientes y momentos obtenidos con un mismo conjunto de estrellas. Estos gradientes, además de darnos una valiosa información, junto con los valores de los momentos y las ecuaciones hidrodinámicas, nos permitirán cerrar el problema en el siguiente Capítulo.

Como es sabido, el efecto de la precesión sobre la ascensión recta y la declinación de las estrellas puede expresarse mediante las fórmulas (SMART, 1953):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= m + n \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \delta + \mu_{\alpha} \\ \dot{\delta} &= n \operatorname{cos} \alpha + \mu_{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

siendo:

$$m = p_1 \operatorname{cose} - \lambda$$

$$n = p_1 \operatorname{sene}$$

donde p_1 es la precesión lunisolar, λ la precesión planetaria y ε la oblicuidad de la eclíptica.

Es evidente que un relativo desconocimiento de la precesión repercutirá en la determinación de los movimientos propios de las estrellas, haciendo, por tanto, muy difícil el establecimiento de sistemas inerciales en Astronomía. Hasta la fecha los sistemas que más se asemejan a los inerciales son los llamados fundamentales, basados en los movimientos propios de las estrellas de nuestra Galaxia y deducidos a partir de valores previos de las constantes de la precesión. La corrección de dichas constantes con el fin de obtener un sistema inercial es, por tanto, de capital importancia para alcanzar los resultados de nivel galáctico que de los movimientos propios de las estrellas se derivan. En este sentido, en la actualidad, se está procediendo a la confección de un nuevo Catálogo fundamental, el FK5, con la intención de que sea cuasi-inercial (FRICKE, 1980).

Supongamos un sistema inercial galactocéntrico referido a determinados puntos lo más fijos posible, por ejemplo un conjunto de galaxias muy lejanas. La velocidad de una estrella en este sistema se expresa:

$$\underline{V} = \underline{V}_{\odot} + \underline{V}^F + \underline{CP} \quad (3.2)$$

siendo \underline{V} la velocidad de la estrella en el referido sistema inercial, \underline{V}_{\odot} la velocidad del Sol en este mismo sistema, \underline{V}^F la velocidad heliocéntrica de la estrella en un sistema fundamental y \underline{CP} las correcciones de precesión.

Si debido a estas correcciones de precesión \underline{CP} los valores de m y n han de corregirse en Δm y Δn , teniendo en cuenta (3.1) y al ser $\dot{\alpha}$ y $\dot{\delta}$ cantidades fijas observables, deducimos:

$$\Delta\mu_{\alpha} = -\Delta k - \Delta n \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \delta$$

$$\Delta\mu_{\delta} = -\Delta n \cos \alpha$$

siendo $\Delta k = \Delta m - \Delta e$, es decir, introduciendo la pequeña corrección Δe producida por el movimiento del equinoccio.

Los incrementos $\Delta\mu_{\alpha}$ y $\Delta\mu_{\delta}$ equivalen a una rotación ficticia del sistema fundamental con respecto al inercial, cuya expresión en la base B_2 ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) se escribe:

$$\underline{\omega}^F = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta n \\ -\Delta k \end{bmatrix}_{B_2}$$

siendo las correcciones de precesión:

$$\underline{CP} = \underline{\omega}^F \wedge \underline{\rho}$$

donde $\underline{\rho}$ es el vector de posición ecuatorial de la estrella.

Introduciendo ahora las velocidades media \underline{v} del centroide y residual \underline{u} de la estrella y llamando \underline{r}_\odot y $\underline{r}_\odot + \underline{\rho}$ a las posiciones galactocéntricas del Sol y de la estrella, la ecuación (3.2) se transforma en la:

$$\underline{v}^F = -\underline{u}_\odot + \underline{v}(\underline{r}_\odot + \underline{\rho}) - \underline{v}(\underline{r}_\odot) - \underline{\omega}^F \wedge \underline{\rho} + \underline{u} \quad (3.3)$$

Admitiendo la aproximación lineal, el desarrollo de TAYLOR queda en la forma:

$$\underline{v}(\underline{r}_\odot + \underline{\rho}) - \underline{v}(\underline{r}_\odot) = D\underline{v}(\underline{r}_\odot) \underline{\rho}$$

Nótese que con esta aproximación el problema de conocer el campo de velocidades $\underline{v}(\underline{r}_\odot)$ se reduce al de obtener su diferencial $D\underline{v}(\underline{r}_\odot)$. Este diferencial es una matriz 3×3 que se puede separar en sus partes simétrica $S(\underline{r}_\odot)$ y hemisimétrica $H(\underline{r}_\odot)$, la última de las cuales puede expresarse en función de su vector asociado $\underline{\Omega}$:

$$H(\underline{r}_\odot) \underline{\rho} = \underline{\Omega} \wedge \underline{\rho}$$

Haciendo ahora:

$$\underline{\omega} = \underline{\Omega} - \underline{\omega}^F$$

y considerando como errores las velocidades residuales \underline{u} , la ecuación (3.3) toma la forma:

$$\underline{v}^F = -\underline{u}_\odot + \underline{\omega} \wedge \underline{\rho} + S(\underline{r}_\odot) \underline{\rho} \quad (3.4)$$

Estas ecuaciones, denominadas ecuaciones de condición, se resolverán en el apartado siguiente aplicándolas a los datos

de un Catálogo fundamental, con lo cual de cada estrella se obtendrán tres ecuaciones (una para cada componente), siendo las incógnitas los vectores \underline{u}_0 y $\underline{\omega}$ y el tensor simétrico $S(\underline{r}_0)$.

Obsérvese que los vectores $\underline{\Omega}$ y $\underline{\omega}^F$ aparecen mezclados en $\underline{\omega}$, con lo cual los valores de Δn y Δk se barajan con la parte hemisimétrica del gradiente del campo de velocidades; esto significa que el conocimiento de $\underline{\omega}$ no es suficiente para determinar $\underline{\Omega}$, Δn y Δk , necesitándose plantear nuevas ecuaciones. Con el fin de cerrar el problema, en el siguiente Capítulo se abordará éste mediante las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar. Nótese igualmente que las ecuaciones en la componente radial del sistema (3.4) no dan información alguna acerca de $\underline{\omega}$. Asimismo, las ecuaciones en los movimientos propios no definen totalmente la diagonal principal de $S(\underline{r}_0)$, ya que ésta queda determinada salvo una constante aditiva común a todos sus elementos, puesto que si \underline{p} es un vector ortogonal a $\underline{\rho}$:

$$\underline{p} \cdot [S(\underline{r}_0) \underline{\rho}] = \underline{p} \cdot [(S(\underline{r}_0) + \lambda I) \underline{\rho}]$$

siendo I la identidad y λ una constante arbitraria. Será pues necesario recurrir a una solución combinada de las ecuaciones para deducir los parámetros cinemáticos.

Veamos ahora la relación existente entre los parámetros cinemáticos de la Galaxia y los elementos del tensor $D\underline{v}(\underline{r}_0)$. Para ello expresemos la velocidad media \underline{v} en la base $B_4(\hat{\underline{\omega}}, \hat{\underline{\theta}}, \hat{\underline{z}})$:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \Pi(\varpi, \theta, z) \\ \Theta(\varpi, \theta, z) \\ Z(\varpi, \theta, z) \end{bmatrix}_{B_4} \quad (3.5)$$

Nos interesa conocer el tensor $D\underline{v}(\underline{r}_0)$ en la base galáctica $B_3(\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$, para lo cual debemos tener en cuenta que es el transpuesto del gradiente $\nabla\underline{v}(\underline{r}_0)$. Para calcular este gradiente en coordenadas cilíndricas, recordemos que si Y^i son dichas coordenadas, v^k la componente contravariante k -ésima de la velocidad media y $\Gamma_{\alpha i}^k$ los símbolos de CHRISTOFFEL de segunda especie relativos a la métrica, la expresión del gradiente es (BRAND, 1962, pág. 364):

$$\nabla\underline{v}]_i^k = \frac{\partial v^k}{\partial Y^i} + \Gamma_{\alpha i}^k v^\alpha$$

En coordenadas cilíndricas:

$$Y^1 = \varpi \quad Y^2 = \theta \quad Y^3 = z$$

$$ds^2 = d\varpi^2 + \varpi^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\varpi \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\varpi}$$

siendo los anteriores los únicos símbolos de CHRISTOFFEL no nulos en coordenadas cilíndricas.

Expresando las componentes contravariantes en función de las componentes en la base $B_4(\hat{\underline{e}}, \hat{\underline{\theta}}, \hat{\underline{z}})$:

$$v^1 = \pi \quad v^2 = \frac{\theta}{\varpi} \quad v^3 = z$$

y pasando a las componentes físicas:

$$\begin{aligned}
(\nabla \underline{v})_{\alpha\alpha} &= (\nabla \underline{v})^{11} & (\nabla \underline{v})_{\theta\theta} &= \alpha^2 (\nabla \underline{v})^{22} & (\nabla \underline{v})_{zz} &= (\nabla \underline{v})^{33} \\
(\nabla \underline{v})_{\alpha\theta} &= \alpha (\nabla \underline{v})^{12} & (\nabla \underline{v})_{\theta z} &= \alpha (\nabla \underline{v})^{23} & (\nabla \underline{v})_{\alpha z} &= (\nabla \underline{v})^{13} \\
(\nabla \underline{v})_{\theta\alpha} &= \alpha (\nabla \underline{v})^{21} & (\nabla \underline{v})_{z\theta} &= \alpha (\nabla \underline{v})^{32} & (\nabla \underline{v})_{z\alpha} &= (\nabla \underline{v})^{31}
\end{aligned}$$

dado que:

$$D\underline{v}(\underline{r}_0) \equiv \left[\nabla \underline{v}(\underline{r}_0) \right]^T$$

se obtiene:

$$D\underline{v}(\underline{r}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} & \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} - \frac{\theta}{\alpha} & \frac{\partial \Pi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} & \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + \frac{\Pi}{\alpha} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{1}{\alpha} \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix}_{B_4}$$

Pasemos ahora, finalmente, a la base $B_3(\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$ en la cual según hemos visto:

$$\hat{\underline{e}}_1 = -\hat{\underline{e}} \quad \hat{\underline{e}}_2 = \hat{\underline{e}} \quad \hat{\underline{e}}_3 = \hat{\underline{z}}$$

luego:

$$D\underline{v}(\underline{r}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} & -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + \frac{\theta}{\alpha} & -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} & \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + \frac{\Pi}{\alpha} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{1}{\alpha} \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix}_{B_3}$$

que en la base galáctica B_3 es la expresión del diferencial del campo de velocidades en el modelo tridimensional.

Considerando ahora la citada descomposición del tensor $D\underline{v}(\underline{r}_0)$ en sus partes simétrica y hemisimétrica asociada al vector $\underline{\Omega}$:

$$S(\underline{r}_0) = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}_{B_3} \quad H(\underline{r}_0) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}_{B_3}$$

identificando:

$$D\underline{v}(\underline{r}_0) \equiv S(\underline{r}_0) + H(\underline{r}_0)$$

se tiene:

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \varpi} & S_{12} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varpi} - \frac{\theta}{\varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) \\ S_{13} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z} + \frac{\partial Z}{\partial \varpi} \right) & S_{22} &= \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + \frac{\Pi}{\varpi} \\ S_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) & S_{33} &= \frac{\partial Z}{\partial Z} \\ \Omega_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} - \frac{1}{\varpi} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) & \Omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \varpi} - \frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right) \\ \Omega_3 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varpi} + \frac{\theta}{\varpi} - \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

ecuaciones que nos relacionan los valores de S_{ij} y Ω_i con los parámetros cinemáticos de la Galaxia. Nótese que en el modelo plano de OORT-LINDBLAD, donde (2.5) se reduce a $\underline{v}=(0, \theta(\varpi), 0)$, resulta $S_{11}=S_{13}=S_{22}=S_{23}=S_{33}=0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ y

$$S_{12} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varpi} - \frac{\theta}{\varpi} \right) \equiv A \quad \Omega_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varpi} + \frac{\theta}{\varpi} \right) \equiv B$$

siendo A y B las denominadas constantes de OORT. Las componentes S_{12} y Ω_3 del modelo tridimensional que figuran en (3.6) son pues una generalización de dichas constantes.

Como ya se ha dicho, el sistema (3.4) nos proporciona el vector $\underline{\omega}$ pero no los vectores $\underline{\Omega}$ y $\underline{\omega}^F$. Teniendo en cuenta que nos interesa conocer los vectores $\underline{\omega}$ y $\underline{\omega}^F$ en la base B_2 ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) y el vector $\underline{\Omega}$ en la base B_3 ($\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3$), la relación $\underline{\omega} = \underline{\Omega} - \underline{\omega}^F$ puede escribirse en la forma:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}_{B_2} = {}_2C^3 \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}_{B_3} - \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta n \\ -\Delta k \end{bmatrix}_{B_2}$$

donde ${}_2C^3$ es la matriz del cambio de base de B_3 a B_2 . La matriz que nos permite pasar de la base ecuatorial B_2 a la galáctica B_3 es:

$${}_3C^2 = R_3(180^\circ - l_Q) R_2(90^\circ - \delta_G) R_3(\alpha_G)$$

donde α_G , δ_G y l_Q ya han sido definidas en el Capítulo anterior. Por tanto, teniendo en cuenta que ${}_2C^3$ es la transpuesta de ${}_3C^2$ y aplicando valores, obtenemos, finalmente:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -0.0670 \Omega_1 + 0.4927 \Omega_2 - 0.8676 \Omega_3 \\ \omega_2 &= -0.8728 \Omega_1 - 0.4503 \Omega_2 - 0.1884 \Omega_3 - \Delta n \\ \omega_3 &= -0.4835 \Omega_1 + 0.7446 \Omega_2 + 0.4602 \Omega_3 + \Delta k \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

La resolución del sistema (3.4) junto con las relaciones (3.6) y (3.7) nos permitirá el cálculo de los parámetros cinemáticos de la Galaxia, si bien ya se ve que al formar (3.7) un sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas, serán necesarias nuevas relaciones.

3.2. Ecuaciones de condición

Expresemos ahora (3.4) en forma explícita, con el fin de proceder a su resolución y calcular las componentes de los vectores \underline{u}_\odot y $\underline{\omega}$ y del tensor $S(\underline{r}_\odot)$. Recordemos que:

$$\underline{v}^F = -\underline{u}_\odot + \underline{\omega} \wedge \underline{\rho} + S(\underline{r}_\odot) \underline{\rho}$$

\underline{v}^F es la velocidad heliocéntrica de la estrella y viene dada en la base $B_1(\hat{\underline{\rho}}, \hat{\underline{\alpha}}, \hat{\underline{\delta}})$, con lo cual las ecuaciones han de plantearse en esta base; \underline{u}_\odot es la velocidad residual del Sol y se calcula en la base $B_2(\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$; $\underline{\omega}$ también interesa conocerlo en la base B_2 , puesto que aparece mezclado con $\underline{\omega}^F$, cuyas componentes son las correcciones de precesión en ascensión recta y declinación; $S(\underline{r}_\odot)$ debe darse en la base $B_3(\hat{\underline{g}}_1, \hat{\underline{g}}_2, \hat{\underline{g}}_3)$, puesto que tiene significado e interpretación galáctica. Expresando los vectores en las bases descritas y teniendo en cuenta las matrices de cambio ${}_j C^i$ correspondientes, la ecuación (3.4) puede escribirse en la forma:

$$\begin{bmatrix} V_{\rho} \\ k\rho\mu_{\alpha} \cos\delta \\ k\rho\mu_{\delta} \end{bmatrix}_{B_1} = {}_1C^2 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{B_2} + {}_1C^2 \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}_{B_2} \wedge \begin{bmatrix} \rho\cos\delta \cos\alpha \\ \rho\cos\delta \sin\alpha \\ \rho\sin\delta \end{bmatrix}_{B_2} + \\
 + {}_1C^3 \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}_{B_3} \begin{bmatrix} \rho\cos b \cos l \\ \rho\cos b \sin l \\ \rho\sin b \end{bmatrix}_{B_3}$$

siendo las matrices de cambio de base:

$${}_1C^2 = R_2(-\delta) R_3(\alpha) \qquad {}_1C^3 = R_1(-\phi) R_2(-b) R_3(l)$$

Desarrollando las operaciones indicadas obtenemos finalmente las ecuaciones de condición en la forma (3.8), (3.9) y (3.10) (véase pág. 59), las cuales han de resolverse aplicándolas a los datos de un Catálogo. Adviértase que en las expresiones (3.9) y (3.10) no aparece la constante k con lo cual las ecuaciones se plantean en unidades de "/siglo, obteniéndose todas las incógnitas en esas mismas unidades; si se desea transformarlas en $\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$ debe multiplicarse por la constante k ($= 47.41 \text{ km siglo}/" \text{ s kpc}$). Nótese que, en total, aparecen 12 incógnitas: 3 de \underline{u}_0 , 3 de $\underline{\omega}$ y 6 de $S(\underline{r}_0)$. La ecuación (3.8) posee 9 incógnitas, la (3.9) 10 incógnitas y la (3.10) también 10 incógnitas. Obsérvese que las incógnitas S_{11} , S_{22} y S_{33} se han agrupado en $S_{11}-S_{33}$, $S_{22}-S_{33}$ y S_{33} ya que, como se ha dicho,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} V_{\rho} &= \frac{1}{\rho} (-\cos\alpha \cos\delta X - \text{sen}\alpha \cos\delta Y - \text{sen}\delta Z) + \\
&+ \cos^2 b \cos^2 l (S_{11} - S_{33}) + \cos^2 b \text{sen } 2l S_{12} + \\
&+ \text{sen } 2b \cos l S_{13} + \cos^2 b \text{sen}^2 l (S_{22} - S_{33}) + \\
&+ \text{sen } 2b \text{sen } l S_{23} + S_{33}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha} \cos\delta &= \frac{1}{\rho} (\text{sen}\alpha X - \cos\alpha Y) - \cos\alpha \text{sen}\delta \omega_1 - \\
&- \text{sen}\alpha \text{sen}\delta \omega_2 + \cos\delta \omega_3 + \\
&+ \frac{1}{2} (\cos^2 l \text{sen } 2b \text{sen}\phi - \text{sen } 2l \cos b \cos\phi) (S_{11} - S_{33}) + \\
&+ (\cos 2l \cos b \cos\phi + \frac{1}{2} \text{sen } 2l \text{sen } 2b \text{sen}\phi) S_{12} - \\
&- (\cos l \cos 2b \text{sen}\phi + \text{sen } l \text{sen } b \cos\phi) S_{13} + \\
&+ \frac{1}{2} (\text{sen } 2l \cos b \cos\phi + \text{sen}^2 l \text{sen } 2b \text{sen}\phi) (S_{22} - S_{33}) + \\
&+ (\cos l \text{sen } b \cos\phi - \text{sen } l \cos 2b \text{sen}\phi) S_{23}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{\delta} &= \frac{1}{\rho} (\cos\alpha \text{sen}\delta X + \text{sen}\alpha \text{sen}\delta Y - \cos\delta Z) + \\
&+ \text{sen}\alpha \omega_1 - \cos\alpha \omega_2 - \\
&- \frac{1}{2} (\text{sen } 2l \cos b \text{sen}\phi + \cos^2 l \text{sen } 2b \cos\phi) (S_{11} - S_{33}) + \\
&+ (\cos 2l \cos b \text{sen}\phi - \frac{1}{2} \text{sen } 2l \text{sen } 2b \cos\phi) S_{12} + \\
&+ (\cos l \cos 2b \cos\phi - \text{sen } l \text{sen } b \text{sen}\phi) S_{13} + \\
&+ \frac{1}{2} (\text{sen } 2l \cos b \text{sen}\phi - \text{sen}^2 l \text{sen } 2b \cos\phi) (S_{22} - S_{33}) + \\
&+ (\text{sen } l \cos 2b \cos\phi + \cos l \text{sen } b \text{sen}\phi) S_{23}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

cuando sólo se consideran movimientos propios —ecuaciones (3.9) y (3.10)— estas incógnitas quedan determinadas salvo una constante aditiva común a todas ellas; así, se ha procedido a agruparlas del modo expuesto, siendo sólomente determinables las diferencias $S_{11} - S_{33}$ y $S_{22} - S_{33}$ en las ecuaciones (3.9) y (3.10). Para obtener todas las incógnitas es necesario, por tanto, acudir a la solución global de las tres ecuaciones. Véase también que en la ecuación (3.8) no aparecen las componentes de $\underline{\omega}$, por lo expuesto anteriormente, y tampoco aparece la componente Z en (3.9) ni ω_3 en (3.10).

Pasemos ahora a la resolución práctica del sistema de ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10).

Para la resolución del sistema hemos utilizado el método de los mínimos cuadrados, al que generalmente se recurre en estos casos, puesto que, al no considerarse efectos de magnitud u otros factores, el método de máxima verosimilitud alternativo (MENNESSIER, 1972) no representa muchas ventajas y sí una considerable complicación en el cálculo.

Recordemos brevemente el método de los mínimos cuadrados (KENDALL y STUART, 1979):

Expresando el sistema a resolver en forma matricial

$$A X = Y$$

donde A es la matriz de los coeficientes, X el vector de las incógnitas e Y el de los términos independientes, la solución mínimo-cuadrática es:

$$\tilde{X} = C^{-1} A^T P Y$$

donde $C = A^T P A$, siendo P la matriz diagonal de los pesos.

El error probable de la estimación de la componente X_i viene dado por la fórmula:

$$\Delta X_i = 0.6745 \sqrt{\frac{V^T P V}{N-n} C_{ii}^{-1}}$$

con $V = A \tilde{X} - Y$ y siendo N el número de ecuaciones, n el número de incógnitas y C_{ii} el elemento ii de la matriz C .

Finalmente, el elemento ij de la matriz de covarianza se obtiene por la expresión:

$$\text{Cov}_{ij} = \frac{C_{ij}^{-1}}{\sqrt{C_{ii}^{-1} C_{jj}^{-1}}}$$

3.3. Resultados obtenidos

Es evidente que, al pretender obtener parámetros ligados a la rotación galáctica, necesitamos una muestra de estrellas lo suficientemente alejada como para eliminar los efectos puramente locales, con lo cual, de los descritos en el Capítulo primero, el Catálogo a utilizar es el de FRICKE, en particular las mismas muestras de este Catálogo que se han empleado en el Capítulo segundo. El Catálogo de GLIESE no es ahora útil ya que, al reducirse a 22 pc de distancia, no podemos extraer del mismo resultados de alcance galáctico.

Dado que se dispone de 500 estrellas y de tres tipos de ecuaciones, el sistema puede resolverse de distintas maneras. En nuestro caso hemos adoptado resolver por mínimos cuadrados el de 500 ecuaciones (3.8) en velocidades radiales, el de 500 ecuaciones (3.10) en movimientos propios en declinación, la combinada de 1000 ecuaciones (3.9) y (3.10) en movimientos propios y la combinada general de 1500 ecuaciones en velocidades radiales y movimientos propios simultáneamente, siendo ésta última la única que nos suministra todas las incógnitas. Con respecto a la ecuación (3.9), con la cual se podría formar un sistema independiente de 500 ecuaciones en movimientos propios en ascensión recta, es fácil demostrar (expresando también $S(\underline{r}_0)$ en la base B_2) que el rango del sistema es sólo 7 en lugar de 10, por lo cual sólo son determinables 7 combinaciones de las 10 incógnitas que aparecen. Ante este mismo problema, DU MONT (1975) adopta para (3.9) la forma de la ecuación en el modelo plano de OORT-LINDBLAD, ignorando los demás términos y quedándose sólo con las incógnitas $X, Y, Z, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ y S_{12} , lo cual creemos que es incorrecto puesto que luego interpreta los resultados a la luz del modelo tridimensional, utilizando además la ecuación completa (3.9) para las soluciones combinadas. En nuestro caso hemos preferido emplear la ecuación completa (3.9) teniéndola en cuenta sólo para las soluciones combinadas, y prescindir de la solución del sistema individualmente generado por ella, ya que las 7 posibles combinaciones de incógnitas no aportan información de gran interés.

Las soluciones que se han obtenido se encuentran en la Tabla 3.1., en la cual los grupos utilizados, todos ellos perte-

necientes al Catálogo de FRICKE y respetando la numeración del Capítulo segundo, son:

- 2.- Muestra completa de 500 estrellas.
- 3.- Estrellas de tipos espectrales A-M (222 estrellas).
- 4.- Estrellas de tipos espectrales O-B (278 estrellas).

Las covarianzas de la solución combinada del grupo 3 se encuentran en la Tabla 3.2.

Nótese que los dos primeros grupos (numerados 2 y 3) son los considerados con la misma numeración en el Capítulo segundo, mientras que el grupo 1 no ha sido calculado por tratarse de estrellas demasiado próximas del Catálogo de GLIESE.

En todos los grupos se han utilizado las distancias publicadas en el Catálogo y no distancias promediadas o factores paralácticos medios, como hacen muchos autores cuando desconocen las distancias de las estrellas. En todas las soluciones combinadas se ha dado el mismo peso tanto a las ecuaciones en velocidades radiales como a las relativas a los movimientos propios en ascensión recta y declinación, pues creemos que dar distintos pesos, como hacen otros autores, favorece a determinadas incógnitas que sólo aparecen en alguna de las ecuaciones y perjudica a otras.

Para poder comprobar la bondad del método de cálculo utilizado, hemos calculado un cuarto grupo —no expuesto en la relación anterior— en el cual se ha dado peso 0.5 a los movimientos propios en ascensión recta y peso 1 a los movimientos propios en declinación, usándose además los factores paralácticos publicados por FRICKE (1967b). La confección de este

Tabla 3.1. Resultados de la resolución por mínimos cuadrados de las ecuaciones de condición (3.8), (3.9) y (3.10). En las soluciones combinadas se ha dado el mismo peso a todas las ecuaciones. Unidades: "/siglo.

Muestra 2	V_ρ	μ_δ	$\mu_\alpha + \mu_\delta$	$V_\rho + \mu_\alpha + \mu_\delta$
X	0.00±0.01	-0.04±0.01	-0.02±0.01	-0.01±0.01
Y	-0.36 0.01	-0.25 0.01	-0.24 0.01	-0.28 0.01
Z	0.19 0.01	0.13 0.01	0.13 0.01	0.16 0.01
S ₁₁ -S ₃₃	-0.46 0.21	-0.48 0.27	-0.15 0.13	-0.22 0.11
S ₁₂	0.20 0.08	0.20 0.10	0.34 0.05	0.30 0.05
S ₁₃	-0.20 0.11	-0.33 0.14	0.16 0.06	0.05 0.06
S ₂₂ -S ₃₃	-0.42 0.20	0.35 0.22	0.38 0.13	0.02 0.11
S ₂₃	0.06 0.11	-0.34 0.13	0.13 0.06	0.09 0.06
S ₃₃	0.69 0.16	-----	-----	0.39 0.09
ω_1	-----	0.18 0.06	0.31 0.04	0.31 0.05
ω_2	-----	-0.45 0.07	-0.34 0.05	-0.34 0.06
ω_3	-----	-----	-0.24 0.05	-0.27 0.05

Muestra 3

X	-0.02±0.02	-0.06±0.02	-0.02±0.01	-0.02±0.01
Y	-0.31 0.02	-0.17 0.02	-0.16 0.01	-0.21 0.01
Z	0.13 0.02	0.10 0.01	0.10 0.01	0.12 0.01
S ₁₁ -S ₃₃	-0.89 0.36	-0.49 0.45	0.18 0.22	-0.23 0.20
S ₁₂	0.27 0.16	0.16 0.19	0.49 0.10	0.38 0.09
S ₁₃	-0.60 0.20	-0.17 0.33	0.17 0.10	-0.13 0.10
S ₂₂ -S ₃₃	-0.51 0.34	-0.17 0.35	0.25 0.21	-0.06 0.19
S ₂₃	0.04 0.17	-0.49 0.20	0.00 0.11	0.01 0.09
S ₃₃	0.62 0.25	-----	-----	0.19 0.15
ω_1	-----	0.01 0.10	0.12 0.08	0.18 0.09
ω_2	-----	-0.48 0.11	-0.35 0.09	-0.32 0.10
ω_3	-----	-----	-0.26 0.08	-0.27 0.10

Muestra 4

X	0.00±0.02	-0.03±0.01	-0.01±0.01	-0.01±0.01
Y	-0.36 0.01	-0.24 0.01	-0.23 0.01	-0.28 0.01
Z	0.19 0.01	0.13 0.01	0.13 0.01	0.16 0.01
S ₁₁ -S ₃₃	-0.42 0.26	-0.29 0.34	0.04 0.16	-0.08 0.14
S ₁₂	0.20 0.11	0.23 0.13	0.39 0.07	0.32 0.06
S ₁₃	-0.26 0.14	-0.41 0.17	0.14 0.08	0.01 0.07
S ₂₂ -S ₃₃	-0.34 0.26	0.67 0.26	0.70 0.16	0.23 0.14
S ₂₃	0.06 0.14	-0.37 0.16	0.16 0.08	0.11 0.07
S ₃₃	0.71 0.19	-----	-----	0.32 0.12
ω_1	-----	0.16 0.07	0.30 0.06	0.32 0.06
ω_2	-----	-0.45 0.08	-0.35 0.07	-0.34 0.07
ω_3	-----	-----	-0.30 0.06	-0.32 0.07

Tabla 3.2. Covarianzas de la solución combinada de la muestra 3

X	Y	$S_{11}-S_{33}$	S_{12}	S_{13}	$S_{22}-S_{33}$	S_{23}	ω_1	ω_2	ω_3	Z	S_{33}	
1.00	0.00	0.15	-0.02	0.00	0.21	-0.01	0.00	0.17	0.07	0.00	-0.19	X
	1.00	0.05	-0.11	-0.14	-0.01	-0.09	-0.17	-0.01	-0.09	0.00	-0.05	Y
		1.00	-0.01	0.00	0.59	-0.02	0.04	-0.03	0.07	-0.07	-0.75	$S_{11}-S_{33}$
			1.00	0.01	-0.01	0.13	-0.12	0.04	0.10	-0.06	0.01	S_{12}
				1.00	-0.04	0.00	0.07	-0.05	0.09	-0.09	0.06	S_{13}
					1.00	-0.06	0.04	-0.02	0.03	0.00	-0.79	$S_{22}-S_{33}$
						1.00	-0.14	0.28	0.14	0.16	0.05	S_{23}
							1.00	-0.12	0.06	-0.09	-0.04	ω_1
								1.00	0.00	0.10	0.03	ω_2
									1.00	0.00	-0.04	ω_3
										1.00	0.11	Z
											1.00	S_{33}

grupo se ha llevado a cabo con el fin de comparar los resultados obtenidos con los de DU MONT (1977), con las mismas hipótesis para la solución combinada de movimientos propios. La coincidencia entre los resultados es total, excepto en alguna centésima de segundo de arco, debido a que DU MONT utiliza las 512 estrellas del Catálogo y en este trabajo sólo las 500 que también poseen velocidad radial. Esta concordancia prueba la bondad del método empleado y la validez de los programas de cálculo confeccionados.

En este trabajo sólo comentaremos los tres grupos citados. Resultados correspondientes a diversos grupos, siguiendo otros criterios de selección, pueden encontrarse en NÚÑEZ y TORRA (1980b).

La interpretación de estos resultados ha de hacerse a través de los sistemas (3.6) y (3.7). Es evidente que la resolución del sistema (3.7) requiere nuevas hipótesis, puesto que tenemos 3 ecuaciones y 5 incógnitas, con lo cual pospondremos para el siguiente Capítulo la discusión general en función de los parámetros cinemáticos de la Galaxia, dedicándonos tan sólo ahora a una discusión comparativa tendente a elegir el adecuado grupo de resultados y a plantear el método de resolución del sistema (3.7).

Comparemos en primer lugar los valores de las soluciones para velocidades radiales, movimientos propios y combinadas dentro de cada grupo. Es evidente que algunas de las incógnitas, como X, Y y Z, mantienen valores parecidos en los distin-

tos tipos de solución mientras que otras, como S_{13} y S_{23} e incluso las mejor determinadas S_{12} , ω_1 , ω_2 y ω_3 , presentan variación según se consideren unas u otras. Esto nos indica, en primer lugar, que las soluciones a considerar serán las combinadas totales (velocidad radial y movimientos propios), puesto que en ellas se da la solución intermedia en la cual se han considerado simultáneamente los tres tipos de ecuaciones.

En cuanto se refiere a la comparación de los distintos grupos entre sí, y fijándonos ahora sólo en las soluciones combinadas, observamos que existen algunas discrepancias entre ellas, dado que se trata de grupos formados por estrellas de distinto tipo espectral. En este sentido, el grupo 4 puede considerarse de estrellas "jóvenes" supergigantes y gigantes de los tipos O-B9. Nótese que el grupo 2 es la unión de los 3 y 4, si bien sus valores no son la media de los de estos dos grupos.

Como ya se ha indicado en el Capítulo segundo, por ser su composición la más representativa de la población de la Galaxia, creemos ha de considerarse prioritariamente el grupo 3, si bien en algún momento lo compararemos con los demás.

Con respecto al movimiento solar y siguiendo la notación del Capítulo anterior, si transformamos las componentes (X, Y, Z) de la base B_2 en las $(-U_0, -V_0, -W_0)$ de la base B_3 , de la solución 3 obtenemos $\underline{u}_0 = (6.0 \pm 0.5, 8.3 \pm 0.5, 5.3 \pm 0.5)$. Denotaremos con u_0 , v_0 y w_0 a estas componentes, cuyos valores están en buena concordancia con los dados en el Capítulo anterior (Tabla 2.1.) si consideramos los errores asociados y tenemos en

cuenta que en el modelo tridimensional, además del movimiento solar han intervenido las otras 9 incógnitas. Adoptaremos pues los valores expresados como resultados definitivos para el movimiento solar. Debemos añadir que estos valores son concordantes con la mayoría de las determinaciones de los demás autores y con los valores standard aceptados, siendo parecidos al expresado los resultados de los grupos 2 y 4.

La constante de OORT generalizada $A \equiv S_{1,2}$, una vez reducida a las unidades habituales, resulta valer $A = 18.0 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ para el grupo 3, mientras que se obtiene 14.2 y 9.5 $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ para los grupos 2 y 4, respectivamente. Nótese que el valor del grupo 2 es muy próximo al valor standard de $15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, puesto que la muestra 2 es representativa de la totalidad del Catálogo FK4/FK4 Suppl. habitualmente utilizado para calcularla. Sin embargo, creemos que es más correcto el obtenido con la solución 3, por ser ésta más representativa de la población de la Galaxia. Dicho valor es bastante próximo al publicado por ASTERIAS (1977) para estrellas de un tipo espectral similar y, dado el error con que se determina ($\pm 4.3 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ a partir de la Tabla 3.1.), no se separa de los valores comunmente aceptados para esta constante. El valor del error dado disminuye sensiblemente ($\pm 3.0 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$) una vez efectuados los cálculos que se expondrán en el cuarto Capítulo. El valor del grupo 4 es cercano a los publicados por VASILEVSKIS y KLEMOLA (1971) y DU MONT (1978), ambos obtenidos estudiando el movimiento propio, con respecto a las galaxias, de las estrellas del programa piloto de Lick y comparándolo con el AGK3. Una discusión

más detallada sobre el valor de esta constante se realizará más adelante, al plantear la solución general en el próximo Capítulo.

Los resultados generales de los tres grupos muestran buena concordancia con aquellos de otros autores, obtenidos con hipótesis similares, si bien sólo pueden compararse algunas de las incógnitas pues, al usar generalmente el modelo plano de OORT-LINDBLAD, dichos autores sólo determinan algunas de las consideradas en este trabajo. Únicamente presentan grandes discordancias con los obtenidos en este trabajo los resultados de CLUBE (1972; 1973; 1974), así como los de RIUS (1974) en lo que a S_{11} , S_{22} y S_{33} se refiere, aunque dada la incertidumbre de estas últimas incógnitas debido a la constante aditiva que las afecta, esta discrepancia puede calificarse como poco importante.

Para proseguir el análisis que estamos realizando es ahora necesario proceder a la resolución de los sistemas (3.6) y (3.7), a lo que dedicaremos el próximo apartado y el siguiente Capítulo.

3.3. Correcciones a la constante de la precesión

El método más sencillo de resolver los sistemas (3.6) y (3.7) es operar primero con el (3.7) y llevar sus resultados al (3.6). Recordemos que, según (3.7);

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_1 &= -0.0670 \Omega_1 + 0.4927 \Omega_2 - 0.8676 \Omega_3 \\
 \omega_2 &= -0.8728 \Omega_1 - 0.4503 \Omega_2 - 0.1884 \Omega_3 - \Delta n \\
 \omega_3 &= -0.4835 \Omega_1 + 0.7446 \Omega_2 + 0.4602 \Omega_3 + \Delta k
 \end{aligned} \right\}$$

sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas para cuya resolución hacen falta nuevas hipótesis, como es el adoptar valores para dos de ellas o bien recurrir a nuevas ecuaciones.

La adopción del modelo plano de OORT-LINDBLAD soslaya totalmente el problema, pues en él $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ y el sistema es resoluble. Este método es el empleado por DU MONT (1977) pero su proceder no es correcto, puesto que si se utiliza el modelo tridimensional de OGORODNIKOV-MILNE no se puede suponer $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, ya que estos valores son los que se expresan en (3.6). La adopción de la hipótesis de simetría cilíndrica simplifica, en parte, el problema, pues en este caso $\partial Z / \partial \theta = 0$ y, por tanto, $\Omega_1 = -S_{23}$; con ello desaparece una de las incógnitas, pero para resolver el problema debe recurrirse todavía a una nueva hipótesis. RIUS (1974) lo resuelve suponiendo nulas algunas de las componentes del tensor de presiones y calculando previamente la constante de OORT $B \equiv \Omega_3$.

Otra manera de proceder consiste en tratar de obtener valores para las correcciones de precesión Δn y Δk . En 1976 la Unión Astronómica Internacional ha adoptado un nuevo sistema de constantes astronómicas (LEDERLE, 1980) entre las que se encuentran las Δn y Δk propuestas por FRICKE (1977) (una revisión de los métodos y resultados de FRICKE puede encontrarse asimismo en ese importante trabajo). Los valores adoptados,

$\Delta n = 0.44 \pm 0.04$ "/siglo y $\Delta k = -0.19 \pm 0.06$ "/siglo, son los elegidos en principio para la confección del nuevo Catálogo fundamental FK5. En este trabajo, sin embargo, no vamos a adoptar dichos valores, ya que nuestra intención es calcular estas importantes incógnitas; como se verá más adelante, a pesar de su adopción todavía existen fuertes discrepancias entre los diversos autores. Por otra parte, la mayoría de las determinaciones en las que se basan dichos valores provienen del análisis de movimientos propios de las estrellas en los Catálogos fundamentales según el modelo de OORT-LINDBLAD, modelo al que no se recurre en nuestro trabajo. Algunas de estas determinaciones pueden verse en la Tabla 3.3.

Otro método para conocer los valores de Δn y Δk es el obtenerlos directamente de la observación, lo cual se intenta actualmente tanto en los U.S.A. (Observatorio de Lick) como en la U.R.S.S. (Observatorios de Pulkovo y de Tashkent). Estos programas tratan de confeccionar catálogos referidos a sistemas inerciales, mediante la determinación de las posiciones de las estrellas con respecto a las galaxias lejanas. Para ello, en épocas separadas el mayor tiempo posible, consiguen fotografías de distintas regiones del cielo y, comparándolas entre sí, determinan el movimiento propio de las estrellas con respecto a las galaxias. Su diferencia con respecto al movimiento propio que figura en un Catálogo fundamental nos da el valor de la corrección al mismo:

$$\Delta\mu = \mu_{gal} - \mu_{cat}$$

Tabla 3.3. Correcciones a la constante de la precesión obtenidas por el análisis de los movimientos propios de las estrellas de los Catálogos fundamentales.

Sistema	Δn ("/siglo)	Δk ("/siglo)	Referencia
FK3/N30	0.30±0.10	-0.40±0.10	MORGAN-OORT (1951)
AUWERS/PGC/FK3	0.43±0.10	-0.24±0.10	GORDON (1952)
FK4/N30	0.44±0.06	-0.19±0.09	FRICKE (1967)
AGK3 (prel.)	0.51±0.01	-0.32±0.01	DIECKVOSS (1967)
FK4/FK4 Suppl.	0.47±0.08	-0.23±0.07	RIUS (1974)
FK4/N30	0.39±0.02	-0.21±0.06	THÜRING (1975)
AGK3 (final)	0.44±0.02	-0.36±0.02	ASTERIADIS (1977)
CK	0.49±0.06	-0.31±0.04	POLOZHENTSEV (1979)

Tabla 3.4. Correcciones a la constante de la precesión obtenidas por el análisis de los movimientos propios de las estrellas con respecto a las galaxias.

Sistema	Δn ("/siglo)	Δk ("/siglo)	Referencia
Pulkovo - AGK3 (prel.)	0.41±0.12	+0.43±0.12	FATCIKHIN (1970)
Lick I y II - AGK3 (prel.)	0.31±0.07	-0.78±0.09	VASILEVSKIS y KLEMOLA (1971)
Lick II - AGK3 (prel.) corr.	0.48±0.23	-0.08±0.22	VASILEVSKIS y Mc NAMARA (1973)
Lick - AGK3 (final)	0.38±0.06	-0.34±0.11	DU MONT (1978)
Tashkent - AGK3 (final)	0.18±0.18	-0.24±0.18	RAKHIMOV (1978)
Galaxias-Moscú	0.37±0.14	-0.08±0.16	<i>Transactions of</i> IAU 17A p.2 (1979)

y como que, según hemos visto:

$$\Delta\mu_{\alpha} = -\Delta k - \Delta n \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\delta$$

$$\Delta\mu_{\delta} = -\Delta n \operatorname{cos}\alpha$$

podremos obtener los valores de las correcciones Δn y Δk .

En la actualidad ya existen algunas determinaciones de las constantes por el método de observación descrito (Tabla 3.4.). Este método es también uno de los propuestos (TORRA y NÚÑEZ, 1980) para el enlace del Catálogo del satélite astrométrico **HIPPARCOS** con el sistema inercial definido por los cuasares. Podrían adoptarse valores de dicha Tabla 3.4. con el fin de soslayar el problema ya que ahora no se ha considerado ninguna hipótesis o modelo como en la Tabla 3.3.; sin embargo, las discrepancias internas de la Tabla aconsejan no seguir este camino para resolver el sistema (3.7).

Otra manera de resolver el sistema formado por (3.6) y (3.7) es buscar nuevas ecuaciones con el fin de cerrarlo. El método natural de hacerlo es acudir a las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar, las cuales nos relacionan los momentos centrados calculados en el segundo Capítulo con los parámetros cinemáticos que aparecen en (3.6) y (3.7). Afortunadamente, para estos dos tipos de variables disponemos de valores calculados a partir de la misma fuente, puesto que el grupo 3, además de dar varios momentos con suficiente exactitud, nos suministra resultados coherentes para operar con el sistema formado por (3.6) y (3.7), con lo cual podemos plantear

las ecuaciones hidrodinámicas partiendo de un sistema homogéneo de datos.

A la resolución de estos sistemas con la ayuda de las ecuaciones hidrodinámicas y a la interpretación de los resultados así obtenidos dedicaremos el Capítulo siguiente.

4. MODELO GALACTICO A SIMETRIA CILINDRICA

4.1. Hipótesis de trabajo

Hasta el momento, la única hipótesis que se ha hecho es la aproximación lineal del campo de velocidades, realizada en el apartado 3.1. por lo cual son válidos en cualquier hipótesis tanto los resultados de los momentos de la Tabla 2.1. como los de las ecuaciones de condición de la Tabla 3.1.. Para plantear las ecuaciones hidrodinámicas vamos a adoptar ahora un modelo galáctico cuyas características son las siguientes:

- El sistema galáctico es estacionario.
- El sistema galáctico posee simetría cilíndrica.
- El sistema galáctico es "isotermo" en las proximidades del Sol.

La primera hipótesis que define nuestro modelo se justifica por la invariabilidad de la forma de la Galaxia para cortos intervalos de tiempo. Ello implica que las magnitudes macroscópicas que aparecen no dependan explícitamente del tiempo, por lo cual son nulas todas las derivadas parciales con respecto al tiempo, $\partial / \partial t = 0$.

La segunda hipótesis que caracteriza nuestro modelo es la simetría cilíndrica. Esta hipótesis, que a primera vista puede parecer falsa dada la existencia de los brazos espirales de la Galaxia, adquiere credibilidad al interpretarse los brazos, según las teorías modernas, como acumulación de estrellas bri-

llantes gigantes y supergigantes, lo cual, incluso aceptando la teoría de la onda de densidad de LIN (LIN y SHU, 1964), no excluye la posibilidad de una distribución estelar a simetría cilíndrica. Esta supone hacer nulas todas las derivadas parciales con respecto a la variable azimutal, $\partial / \partial \theta = 0$ (véase, por ejemplo, ORÚS, 1954).

La tercera hipótesis de nuestro modelo es la "isotermia" del sistema, la cual se justifica por el hecho de que nuestra muestra de estrellas está lo suficientemente próxima como para suponer que los valores de los momentos se mantienen constantes en todo el entorno solar. Esta suposición no se contradice con las diferencias que presentan los momentos según se calculen con los Catálogos de GLIESE o de FRICKE, pues esas diferencias, como se expone en el Capítulo segundo, se interpretan como motivadas por la distinta composición de las dos muestras en tipos espectrales y no como consecuencia de su posición en la Galaxia. Esta hipótesis significa que todas las derivadas parciales de los momentos centrados son nulas.

Veamos ahora las expresiones de las ecuaciones hidrodinámicas válidas para nuestro modelo.

4.2. Ecuaciones hidrodinámicas

Para deducir las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar (véase, por ejemplo, OGORODNIKOV, 1965), tal como hemos hecho en el Capítulo segundo, adoptaremos un modelo continuo para describir el estado dinámico del sistema estelar me-

diante la función de distribución $f(t, \underline{r}, \underline{v})$. Supondremos además que en el sistema galáctico no se producen "colisiones" y que la función de distribución así como sus derivadas se anulan en el infinito. La función de distribución será entonces solución de la ecuación de LIOUVILLE (BOLTZMANN sin colisiones). Al no existir "colisiones", sobre cada estrella sólo actúa la fuerza gravitatoria que deriva del potencial $U(t, \underline{r})$ creado por el resto del sistema.

En el espacio fásico tenemos, por tanto:

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} = 0$$

y como que:

$$\frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

también:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\underline{r}} \cdot \nabla f - \nabla U \cdot \underline{\nabla}_V f = 0 \quad (4.1)$$

siendo:

$$(\underline{\nabla}_V f)_i = \frac{\partial f}{\partial v_i}$$

La ecuación (4.1) es la ecuación fundamental de la dinámica estelar. En coordenadas cilíndricas:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \\ z \end{bmatrix} \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} \Pi \\ \theta \\ z \end{bmatrix} \quad \dot{\underline{v}} = \begin{bmatrix} - \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\theta^2}{\alpha} \\ - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\Pi \theta}{\alpha} \\ - \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix}$$

desarrollando (4.1) se expresa:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \eta \frac{\partial f}{\partial \omega} + \frac{\theta}{\omega} \frac{\partial f}{\partial \theta} + z \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\theta^2}{\omega} \right) \frac{\partial f}{\partial \Pi} -$$

$$- \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\Pi \theta}{\omega} \right) \frac{\partial f}{\partial \Theta} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0$$

Para obtener las ecuaciones hidrodinámicas procederemos a integrar la ecuación fundamental multiplicada por \underline{v}^n , potencia tensorial n-ésima del vector \underline{v} , $\underline{v} \otimes \underline{v} \otimes \dots \otimes \underline{v}$, efectuando la integración en el espacio de las velocidades \underline{v} .

Para $n=0$ se obtiene **una** ecuación de continuidad.

Para $n=1$ se obtienen **tres** ecuaciones del movimiento.

Para $n=2$ se obtienen **seis** ecuaciones, en las cuales aparecen los momentos hasta el tercer orden.

Para $n=3$ se obtienen **diez** ecuaciones, en las cuales aparecen los momentos hasta el cuarto orden.

Nos limitaremos a estas ecuaciones hasta $n=3$, puesto que en el Capítulo segundo se han calculado los momentos centrados hasta el cuarto orden. En todas ellas aparecen las derivadas de los momentos hasta el orden $n+1$, si bien al suponer el sistema "isotermo" dichas derivadas se simplifican notablemente.

Las ecuaciones hidrodinámicas para nuestro modelo estacionario, cilíndrico e "isotermo" son las siguientes:

n=0

$$\pi \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \omega} + z \frac{\partial \text{LnN}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi}{\partial \omega} + \frac{\Pi}{\omega} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

n=1

$$\begin{aligned} & \pi \frac{\partial \pi}{\partial \omega} + z \frac{\partial \pi}{\partial z} - \frac{\Theta^2}{\omega} + \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \omega} \mu_{200} + \frac{\partial \text{LnN}}{\partial z} \mu_{101} + \\ & + \frac{1}{\omega} (\mu_{200} - \mu_{020}) = - \frac{\partial U}{\partial \omega} \\ & \text{-----} \\ & \pi \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} + z \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\pi \Theta}{\omega} + \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \omega} \mu_{110} + \frac{\partial \text{LnN}}{\partial z} \mu_{011} + \\ & + \frac{2}{\omega} \mu_{110} = 0 \\ & \text{-----} \\ & \pi \frac{\partial Z}{\partial \omega} + z \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \omega} \mu_{101} + \frac{\partial \text{LnN}}{\partial z} \mu_{002} + \\ & + \frac{1}{\omega} \mu_{101} = - \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.3)$$

n=2

$$\begin{aligned} & -4\mu_{110} \frac{\Theta}{\omega} + 2\mu_{200} \frac{\partial \pi}{\partial \omega} + 2\mu_{101} \frac{\partial \pi}{\partial z} = \\ & = - \mu_{300} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \omega} - \mu_{201} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial z} + \frac{1}{\omega} (2\mu_{120} - \mu_{300}) \\ & \text{-----} \\ & \mu_{110} \frac{\pi}{\omega} + (\mu_{200} - 2\mu_{020}) \frac{\Theta}{\omega} + \mu_{110} \frac{\partial \pi}{\partial \omega} + \\ & + \mu_{011} \frac{\partial \pi}{\partial z} + \mu_{200} \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} + \mu_{101} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \\ & = - \mu_{210} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \omega} - \mu_{111} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial z} + \frac{1}{\omega} (\mu_{030} - 2\mu_{210}) \\ & \text{-----} \end{aligned} \quad (4.4)$$

n=2 (continuación)

$$\begin{aligned}
& -2\mu_{011} \frac{\Theta}{\mathfrak{A}} + \mu_{101} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathfrak{A}} + \mu_{002} \frac{\partial \Pi}{\partial Z} + \mu_{200} \frac{\partial Z}{\partial \mathfrak{A}} + \\
& + \mu_{101} \frac{\partial Z}{\partial Z} = - \mu_{201} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \mathfrak{A}} - \mu_{102} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} + \\
& + \frac{1}{\mathfrak{A}} (\mu_{021} - \mu_{201}) \\
& \text{-----} \\
& 2\mu_{020} \frac{\Pi}{\mathfrak{A}} + 2\mu_{110} \frac{\Theta}{\mathfrak{A}} + 2\mu_{110} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{A}} + 2\mu_{011} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \\
& = - \mu_{120} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \mathfrak{A}} - \mu_{021} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} - \frac{3}{\mathfrak{A}} \mu_{120} \\
& \text{-----} \\
& \mu_{011} \frac{\Pi}{\mathfrak{A}} + \mu_{101} \frac{\Theta}{\mathfrak{A}} + \mu_{101} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{A}} + \mu_{002} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} + \\
& + \mu_{110} \frac{\partial Z}{\partial \mathfrak{A}} + \mu_{011} \frac{\partial Z}{\partial Z} = - \mu_{111} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \mathfrak{A}} - \\
& - \mu_{012} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} - \frac{2}{\mathfrak{A}} \mu_{111} \\
& \text{-----} \\
& 2\mu_{101} \frac{\partial Z}{\partial \mathfrak{A}} + 2\mu_{002} \frac{\partial Z}{\partial Z} = - \mu_{102} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \mathfrak{A}} - \\
& - \mu_{003} \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} - \frac{1}{\mathfrak{A}} \mu_{102}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

n=3

$$\begin{aligned}
& - 6\mu_{210} \frac{\Theta}{\mathfrak{A}} + 3\mu_{300} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathfrak{A}} + 3\mu_{201} \frac{\partial \Pi}{\partial Z} = \\
& = - (\mu_{400} - 3\mu_{200}^2) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \mathfrak{A}} - (\mu_{301} - 3\mu_{200} \mu_{101}) \\
&) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} + \frac{1}{\mathfrak{A}} (3\mu_{200} (\mu_{200} - \mu_{020}) - \mu_{400} + 3\mu_{220}) \\
& \text{-----}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

n=3 (continuación)

$$\begin{aligned}
 & 3\mu_{030} \frac{\Pi}{\omega} + 3\mu_{120} \frac{\Theta}{\omega} + 3\mu_{120} \frac{\partial\Theta}{\partial\omega} + 3\mu_{021} \frac{\partial\Theta}{\partial Z} = \\
 & = -(\mu_{130} - 3\mu_{020} \mu_{110}) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial\omega} - (\mu_{031} - 3\mu_{020} \mu_{011}) \\
 &) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} + \frac{1}{\omega} (6\mu_{020} \mu_{110} - 4\mu_{130}) \\
 & \text{-----} \\
 & 3\mu_{102} \frac{\partial Z}{\partial\omega} + 3\mu_{003} \frac{\partial Z}{\partial Z} = -(\mu_{103} - 3\mu_{002} \mu_{101}) \\
 &) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial\omega} - (\mu_{004} - 3\mu_{002}^2) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} + \\
 & + \frac{1}{\omega} (3\mu_{002} \mu_{101} - \mu_{103}) \\
 & \text{-----} \\
 & \mu_{210} \frac{\Pi}{\omega} + (\mu_{300} - 4\mu_{120}) \frac{\Theta}{\omega} + 2\mu_{210} \frac{\partial\Pi}{\partial\omega} + \\
 & + 2\mu_{111} \frac{\partial\Pi}{\partial Z} + \mu_{300} \frac{\partial\Theta}{\partial\omega} + \mu_{201} \frac{\partial\Theta}{\partial Z} = \\
 & = -(\mu_{310} - 3\mu_{200} \mu_{110}) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial\omega} - (\mu_{211} - \mu_{200} \mu_{011} - \\
 & - 2\mu_{110} \mu_{101}) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} + \frac{1}{\omega} (2\mu_{200} \mu_{110} + \\
 & + 2\mu_{110} (\mu_{200} - \mu_{020}) - 2\mu_{310} + 2\mu_{130}) \\
 & \text{-----} \\
 & 2\mu_{021} \frac{\Pi}{\omega} + 2\mu_{111} \frac{\Theta}{\omega} + 2\mu_{111} \frac{\partial\Theta}{\partial\omega} + 2\mu_{012} \frac{\partial\Theta}{\partial Z} + \\
 & + \mu_{120} \frac{\partial Z}{\partial\omega} + \mu_{021} \frac{\partial Z}{\partial Z} = -(\mu_{121} - 2\mu_{011} \mu_{110} - \\
 & - \mu_{020} \mu_{101}) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial\omega} - (\mu_{022} - 2\mu_{011}^2 - \mu_{020} \mu_{002}) \\
 &) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} + \frac{1}{\omega} (4\mu_{011} \mu_{110} + \mu_{020} \mu_{101} - 3\mu_{121}) \\
 & \text{-----}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

n=3 (continuación)

$$\begin{aligned}
 & -4\mu_{111} \frac{\Theta}{\mathfrak{M}} + 2\mu_{201} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathfrak{M}} + 2\mu_{102} \frac{\partial \Pi}{\partial Z} + \mu_{300} \frac{\partial Z}{\partial \mathfrak{M}} + \\
 & + \mu_{201} \frac{\partial Z}{\partial Z} = -(\mu_{301} - 3\mu_{101} \mu_{200}) \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \mathfrak{M}} - \\
 & -(\mu_{202} - 2\mu_{101}^2 - \mu_{200} \mu_{002}) \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial Z} + \frac{1}{\mathfrak{M}} (2\mu_{101} (\mu_{200} - \\
 & - \mu_{020}) + \mu_{200} \mu_{101} - \mu_{301} + 2\mu_{121}) \\
 & \text{-----} \\
 & 2\mu_{120} \frac{\Pi}{\mathfrak{M}} + 2(\mu_{210} - \mu_{030}) \frac{\Theta}{\mathfrak{M}} + \mu_{120} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathfrak{M}} + \\
 & + \mu_{021} \frac{\partial \Pi}{\partial Z} + 2\mu_{210} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{M}} + 2\mu_{111} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \\
 & = -(\mu_{220} - \mu_{020} \mu_{200} - 2\mu_{110}^2) \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \mathfrak{M}} - (\mu_{121} - \\
 & - \mu_{020} \mu_{101} - 2\mu_{110} \mu_{011}) \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial Z} + \frac{1}{\mathfrak{M}} (\mu_{020} (\mu_{200} - \\
 & - \mu_{020}) + 4\mu_{110}^2 - 3\mu_{220} + \mu_{040}) \\
 & \text{-----} \\
 & \mu_{012} \frac{\Pi}{\mathfrak{M}} + \mu_{102} \frac{\Theta}{\mathfrak{M}} + \mu_{102} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{M}} + \mu_{003} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} + \\
 & + 2\mu_{111} \frac{\partial Z}{\partial \mathfrak{M}} + 2\mu_{012} \frac{\partial Z}{\partial Z} = -(\mu_{112} - \mu_{002} \mu_{110} - \\
 & - 2\mu_{011} \mu_{101}) \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \mathfrak{M}} - (\mu_{013} - 3\mu_{002} \mu_{011}) \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial Z} + \\
 & + \frac{1}{\mathfrak{M}} (\mu_{002} \mu_{110} + \mu_{011} \mu_{101} - \mu_{112}) \\
 & \text{-----}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

n=3 (continuación)

$$\begin{aligned}
 & - 2\mu_{012} \frac{\Theta}{\mathfrak{M}} + \mu_{102} \frac{\partial \pi}{\partial \mathfrak{M}} + \mu_{003} \frac{\partial \pi}{\partial Z} + \\
 & + \mu_{201} \frac{\partial Z}{\partial \mathfrak{M}} + 2\mu_{102} \frac{\partial Z}{\partial Z} = -(\mu_{202} - \\
 & - \mu_{002} \mu_{200} - 2\mu_{101}^2) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \mathfrak{M}} - (\mu_{103} - \\
 & - 3\mu_{002} \mu_{101}) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} + \frac{1}{\mathfrak{M}} (\mu_{002} (\mu_{200} - \mu_{020}) + \\
 & + 2\mu_{101}^2 - \mu_{202} + \mu_{022})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu_{111} \frac{\pi}{\mathfrak{M}} + (\mu_{201} - 2\mu_{021}) \frac{\Theta}{\mathfrak{M}} + \mu_{111} \frac{\partial \pi}{\partial \mathfrak{M}} + \\
 & + \mu_{012} \frac{\partial \pi}{\partial Z} + \mu_{201} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{M}} + \mu_{102} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} + \\
 & + \mu_{210} \frac{\partial Z}{\partial \mathfrak{M}} + \mu_{111} \frac{\partial Z}{\partial Z} = -(\mu_{211} - \mu_{011} \mu_{200} - \\
 & - 2\mu_{101} \mu_{110}) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \mathfrak{M}} - (\mu_{112} - 2\mu_{011} \mu_{101} - \\
 & - \mu_{110} \mu_{002}) \frac{\partial \text{LnN}}{\partial Z} + \frac{1}{\mathfrak{M}} (\mu_{011} (\mu_{200} - \mu_{020}) + \\
 & + 3\mu_{101} \mu_{110} + \mu_{031} - 2\mu_{211})
 \end{aligned}$$

(4.5)

Como puede observarse, se dispone de una ecuación para $n=0$, 3 ecuaciones para $n=1$, 6 ecuaciones para $n=2$ y 10 ecuaciones para $n=3$, es decir, 20 ecuaciones en total. En estas ecuaciones vamos a considerar como incógnitas:

$$\Pi, \quad \Theta, \quad Z, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Z}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Z}, \quad \frac{\partial Z}{\partial \omega} \text{ y } \frac{\partial Z}{\partial Z}$$

y como datos los momentos μ_{abc} , así como ω , $\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \omega}$ y $\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial Z}$. Las ecuaciones han sido escritas siguiendo el orden indicado para las incógnitas. Las tres ecuaciones para $n=1$ (ecuaciones del movimiento) no son lineales en las incógnitas, apareciendo además los gradientes del potencial galáctico. Por otra parte, estas ecuaciones han sido utilizadas para deducir las correspondientes a $n=2$ y $n=3$ estando, por tanto, implícitamente consideradas en ellas; esto nos permite el no utilizarlas en los cálculos posteriores, soslayando así el problema de su no linealidad. Las ecuaciones para $n=0$, $n=2$ y $n=3$ son lineales en las incógnitas citadas, lo cual nos va a permitir el tratarlas de una forma sencilla. La ecuación para $n=0$ (4.2) es la única de las 17 lineales en que aparece la componente Z de la velocidad, por lo cual no la vamos a considerar de momento, reservándola para el cálculo de Z . Nos queda por tanto un sistema de 16 ecuaciones con 8 incógnitas.

4.3. Planteamiento del sistema

Para la resolución de nuestro problema hemos de calcular las incógnitas mencionadas, así como las Δn y Δk que nos apa-

recían en el Capítulo anterior. Para ello vamos a plantear un sistema general de ecuaciones que estará formado, por una parte, por las 16 ecuaciones hidrodinámicas lineales que hemos indicado en el apartado anterior y, por otra parte, por las ecuaciones (3.6) y (3.7) del Capítulo anterior, puesto que estas ecuaciones nos relacionan los resultados de la Tabla 3.1. con el campo de velocidades y su gradiente, Δn y Δk .

El método que vamos a seguir consiste en la resolución conjunta por mínimos cuadrados del sistema formado por las 16 ecuaciones hidrodinámicas mencionadas, las 6 ecuaciones de (3.6) que dan la parte simétrica S_{ij} del gradiente del campo de velocidades y las 3 ecuaciones de (3.7) con las Ω_i substituidas por los valores dados en (3.6); nótese que ahora no aparecerán en (3.6) y (3.7) las derivadas con respecto de θ , ya que hemos adoptado la hipótesis de simetría cilíndrica para nuestro modelo. Así obtenemos un sistema de 25 ecuaciones lineales con 10 incógnitas (las 8 citadas anteriormente con Δn y Δk) resoluble por el método de los mínimos cuadrados.

Esta forma de plantear el problema nos permite relacionar los momentos centrados de la distribución de velocidades, obtenidos en el Capítulo segundo, con las componentes del gradiente del campo de velocidades, obtenidas en el Capítulo tercero, y con los parámetros cinemáticos de la Galaxia, a determinar, así como con las correcciones de precesión Δn y Δk . Obtendremos pues los resultados que mejor se ajusten a los valores de los momentos centrados, a las ecuaciones de condición del Capítulo tercero, y, por tanto, a los valores S_{ij} y ω_i , y a las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar.

Es de destacar que ésta es la primera vez que se obtiene una solución de este tipo y a este nivel de ecuaciones, ya que hasta la fecha no se conocían unos valores de los momentos centrados que nos permitiesen llegar a resolver las ecuaciones hidrodinámicas hasta $n=3$.

Para proceder a la resolución del sistema de 25 ecuaciones hemos de fijar los datos que en ellas aparecen, es decir, los momentos μ_{abc} , las componentes de la parte simétrica S_{ij} del gradiente del campo de velocidades y las ω_i . Asimismo vamos a necesitar los valores de ϖ , $\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \varpi}$ y $\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial z}$ que aparecen en (4.4) y (4.5).

De todo lo dicho hasta ahora a lo largo de este trabajo se desprende que los más adecuados para los momentos centrados μ_{abc} , así como para S_{ij} y ω_i , son los valores obtenidos a través de la muestra 3 de 222 estrellas de tipos espectrales A-M, valores que se encuentran en el grupo 3 de las Tablas 2.1. y 3.1..

Para los valores de ϖ , $\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \varpi}$ y $\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial z}$ en el entorno del Sol vamos a adoptar:

$$\varpi = 8.5 \text{ kpc} \quad \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \varpi} = -0.1 \text{ kpc}^{-1} \quad \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial z} = -2.0 \text{ kpc}^{-1}$$

El valor elegido para ϖ es el que actualmente se estima como el más adecuado por diversos autores (GRAHAM, 1978; KNAPP, 1978) y resulta de promediar algunos valores publicados posteriormente a 1972.

Los valores adoptados para $\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \varpi}$ y $\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial z}$ no son tan sencillos de obtener, sobre todo el segundo de ellos, pues los contajes

estelares suelen realizarse en zonas seleccionadas del plano galáctico y no fuera de él. Dichos valores han sido obtenidos de MIHAILAS (1967, pág. 206), STODOLKIEWICZ (1969, pág. 164) y ALLEN (1964, pág. 240). Recientes trabajos sobre el tema (EINASTO, 1978; BACHALL y SONEIRA, 1980), aunque no dan valores concretos, permiten estimar como suficientemente correctos los valores adoptados. Como precaución se tantearon para $\frac{\partial \text{LnN}}{\partial z}$ otros valores, los cuales no mostraron una influencia importante sobre los resultados.

Con todos estos datos tenemos la información suficiente para proceder a la resolución del planteado sistema de 25 ecuaciones con 10 incógnitas.

4.4. Resultados obtenidos

Aplicando al sistema de ecuaciones el método de los mínimos cuadrados descrito en el apartado 3.2. y tomando:

μ_{abc} de la Tabla 2.1. (muestra 3)

S_{ij} y ω_i de la Tabla 3.1. (muestra 3, solución combinada)

$$\varpi = 8.5 \text{ kpc} \quad \frac{\partial \text{LnN}}{\partial \varpi} = -0.1 \text{ kpc}^{-1} \quad \frac{\partial \text{LnN}}{\partial z} = -2.0 \text{ kpc}^{-1}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\Pi}{\omega} &= 6.0 \pm 1.1 \quad \text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\
\frac{\Theta}{\omega} &= 26.8 \pm 1.5 \quad \text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \omega} &= -1.6 \pm 1.1 \quad \text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\
\frac{\partial \Pi}{\partial Z} &= 4.7 \pm 2.2 \quad \text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\
\frac{\partial \Theta}{\partial \omega} &= -9.1 \pm 1.5 \quad \text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\
\frac{\partial \Theta}{\partial Z} &= 1.7 \pm 1.1 \quad \text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\
\frac{\partial Z}{\partial \omega} &= 6.4 \pm 1.7 \quad \text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\
\frac{\partial Z}{\partial Z} &= 7.4 \pm 1.0 \quad \text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\
\Delta n &= 0.36 \pm 0.04 \quad \text{"/siglo} \\
\Delta k &= -0.21 \pm 0.05 \quad \text{"/siglo}
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

Como comprobación también se han realizado los cálculos con $\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial Z} = -4.0 \text{ kpc}^{-1}$, siendo todos los resultados compatibles dentro de sus errores; ello prueba que la elección de ese valor, si bien importante, no es tan crítica como para hacer depender todos los resultados de la adopción de un parámetro no muy bien conocido, hecho que, de haber sucedido, hubiese descalificado el modelo. Por otra parte, los valores que las ecuaciones (3.6) y (3.7) determinan, tales como $\frac{\partial \Pi}{\partial \omega}$, $\frac{\Pi}{\omega}$, $\frac{\partial Z}{\partial Z}$ y, sobre todo, la constante A de OORT, permanecen casi invariables sea cuales sean los valores adoptados, siendo además casi idénticos a los dados por las ecuaciones (3.6), a pesar de mezclarse con las 16 ecuaciones hidrodinámicas durante la resolución del sistema. Esto prueba la validez del método empleado,

el cual no desvirtúa los valores de las incógnitas que predeterminan las ecuaciones (3.6) y (3.7), ni por la adopción de determinados datos ni por la resolución conjunta de todo el sistema de ecuaciones.

Los resultados (4.6) que figuran anteriormente constituyen la solución de nuestro sistema por mínimos cuadrados. Debe destacarse la pequeñez de los errores que se obtienen para las variables, incluso mucho menores que lo que cabría esperar a la vista de las desviaciones de los momentos y de S_{ij} , lo cual prueba que los valores elegidos tanto para los momentos como para los de S_{ij} y ω_i son compatibles con el modelo estacionario cilíndrico e "isotermo" que hemos desarrollado. Ha de señalarse igualmente que esos errores crecen rápidamente cuando se utilizan otros momentos (por ejemplo, los obtenidos en el grupo 1), se adoptan modelos con varios momentos nulos o bien se mezclan resultados deducidos con distintos Catálogos. Como vemos, la mejor solución se obtiene precisamente cuando se utiliza una sola fuente de datos representativa del entorno solar, tanto para el cálculo de los momentos como para el de los gradientes del campo de velocidades en su solución combinada, y se aplica sin restricción alguna a un sencillo modelo válido para el entorno solar.

Al dar a continuación los valores concretos de nuestros resultados, además de los errores ya expuestos anteriormente hemos de considerar los de la Tabla 3.1., ya que, aunque los datos en (4.6) recogen las discrepancias existentes entre las distintas ecuaciones, también debemos tener en cuenta los de

la Tabla 3.1., al menos en lo que a las variables predeterminadas por (3.6) se refiere, para lograr una estimación conservativa del error. En los errores que figurarán a continuación se han considerado ambos valores con el fin de estimar el valor más probable de los mismos.

Para calcular la componente Z del campo de velocidades recurriremos a la ecuación de continuidad (4.2), que de las 17 ecuaciones lineales consideradas es la única que la contiene. De esta ecuación:

$$\pi \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \omega} + Z \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial Z} + \frac{\partial \pi}{\partial \omega} + \frac{\pi}{\omega} + \frac{\partial Z}{\partial Z} = 0$$

despejamos Z en función de los demás parámetros, ahora todos ellos conocidos:

$$Z = - \frac{\pi \frac{\partial \text{Ln}N}{\partial \omega} + \frac{\partial \pi}{\partial \omega} + \frac{\pi}{\omega} + \frac{\partial Z}{\partial Z}}{\frac{\partial \text{Ln}N}{\partial Z}}$$

siendo esta expresión de Z la que utilizamos para el cálculo de la misma y la estimación de su error.

Los resultados que finalmente deducimos para nuestro modelo galáctico, en las proximidades del Sol, recordando los valores de las componentes de \underline{u}_0 que ya habíamos considerado anteriormente como definitivos (pág. 67), son los siguientes:

u_{\odot}	$= 6.0 \pm 0.5$	km s^{-1}
v_{\odot}	$= 8.3 \pm 0.5$	km s^{-1}
w_{\odot}	$= 5.3 \pm 0.5$	km s^{-1}
Π	$= 51 \pm 30$	km s^{-1}
Θ	$= 228 \pm 13$	km s^{-1}
Z	$= 3 \pm 6$	km s^{-1}
A	$= 18.0 \pm 3.0$	$\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
B	$= -8.8 \pm 3.0$	$\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
$\frac{\partial \Pi}{\partial \varpi}$	$= -1.6 \pm 3.3$	$\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
$\frac{\partial \Theta}{\partial \varpi}$	$= -9.1 \pm 1.5$	$\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
$\frac{\partial Z}{\partial \varpi}$	$= 6.4 \pm 1.7$	$\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
$\frac{\partial \Pi}{\partial z}$	$= 4.7 \pm 2.3$	$\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
$\frac{\partial \Theta}{\partial z}$	$= 1.7 \pm 2.1$	$\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
$\frac{\partial Z}{\partial z}$	$= 7.4 \pm 2.7$	$\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
Δn	$= 0.36 \pm 0.04$	$"/\text{siglo}$
Δk	$= -0.21 \pm 0.05$	$"/\text{siglo}$

A la vista de los valores reseñados podemos hacer las siguientes consideraciones:

- Los valores obtenidos para el movimiento solar, si bien son algo menores que los habitualmente admitidos, no muestran discrepancias fundamentales con éstos dada la composición de nuestra muestra de estrellas.
- El valor de la componente radial del centroide $\bar{v}=50\pm 30$ km s⁻¹ concuerda perfectamente con el de 40 km s⁻¹ deducido por análisis de las líneas de absorción y emisión de radiofuentes (CLUBE, 1978) y confirma la existencia de un movimiento no circular a gran escala. Este resultado es importante, pues corrobora la necesidad de tener en cuenta la expansión de la Galaxia al estudiar su dinámica.
- El valor que se obtiene para $\Theta=228\pm 13$ km s⁻¹ es bien concordante con el actualmente en boga de 220 km s⁻¹ (KNAPP, 1978) y confirma que el valor internacional de 250 km s⁻¹ es demasiado elevado.
- El valor que se obtiene para Z indica la ausencia de movimiento del centroide en dirección perpendicular al plano galáctico, lo cual es aceptado por la mayoría de los autores.
- Los valores de las constantes de OORT $A=18.0\pm 3.0$ km s⁻¹ kpc⁻¹ y $B=-8.8\pm 3.0$ km s⁻¹ kpc⁻¹, son compatibles con las determinaciones clásicas, si bien las efectuadas por diversos autores fluctúan según el método empleado y la

muestra de estrellas, oscilando entre 11 y 17 km s⁻¹ kpc⁻¹ para A y -7 a -15 km s⁻¹ kpc⁻¹ para B (KNAPP, 1978). Algunos autores obtienen valores tan dispares como A=+26 km s⁻¹ kpc⁻¹ y B=-27 km s⁻¹ kpc⁻¹ (ASTERIADIS, 1977), para estrellas O-B2 del AGK3, ó A>16±5 km s⁻¹ kpc⁻¹, B=-25±5 km s⁻¹ kpc⁻¹ (CLUBE, 1973), a partir de los movimientos propios con respecto a las galaxias del programa de Lick. Creemos, por tanto, que los valores obtenidos constituyen una interesante aportación a la determinación de estas constantes.

- En cuanto se refiere a las derivadas parciales, la más importante de ellas es la $\frac{\partial \Theta}{\partial \omega} = -9.1 \pm 1.5 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, según la cual el Sol se encuentra claramente en la zona de decrecimiento de la curva velocidad-distancia. Con respecto a $\frac{\partial \Pi}{\partial \omega}$ el valor que se obtiene está muy poco determinado, si bien indica un lógico decrecimiento de la expansión al alejarnos del centro de la Galaxia. Con respecto a las demás derivadas, dado que el valor de Z es casi nulo y no se conoce con exactitud la posición del Sol con respecto al plano galáctico (se han obtenido determinaciones tanto positivas como negativas para z), no se puede saber si los signos de estas derivadas son los que cabría esperar, no existiendo por otra parte determinaciones fiables que nos permitan establecer comparaciones. Los valores que se obtienen muestran sin embargo variaciones de los parámetros al alejarnos del plano galáctico, lo cual constituye una

prueba más de la necesidad del estudio tridimensional que hemos efectuado.

- Para las correcciones a la constante de la precesión se han obtenido $\Delta n = 0.36 \pm 0.04$ "/siglo y $\Delta k = -0.21 \pm 0.05$ "/siglo. Estos valores están en buena concordancia con los adoptados por la I.A.U. $\Delta n = 0.44 \pm 0.04$ "/siglo y $\Delta k = -0.19 \pm 0.06$ "/siglo y pueden compararse con los dados en las Tablas 3.3. y 3.4.. Puede justificarse el hecho de obtener un Δn algo menor que el deducido por otros autores a partir del Catálogo FK4, ya que nosotros hemos eliminado de nuestra muestra las estrellas O-B con el fin de que se pareciese más a la población de la Galaxia. Creemos que los valores obtenidos constituyen una importante aportación al conocimiento de la precesión.

4.5. Conclusiones

En este trabajo hemos desarrollado un modelo galáctico tridimensional en el cual, por primera vez, se ha utilizado una misma fuente de datos para calcular los momentos centrados de la distribución de velocidades y las componentes del gradiente del campo galáctico de velocidades. Hemos planteado un modelo estacionario, a simetría cilíndrica e "isotermo" que, mediante las ecuaciones hidrodinámicas, nos ha permitido calcular los parámetros cinemáticos de la Galaxia en el entorno solar y las correcciones a la constante de la precesión.

Los resultados obtenidos, mediante una muestra de estrellas representativa de la población de la Galaxia, son los que mejor se ajustan a los valores de los momentos centrados de la distribución de las velocidades estelares, a los valores del gradiente del campo de velocidades y a las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar.

Asimismo, hemos desarrollado un sencillo método para el cálculo de los momentos centrados de la distribución de velocidades, mediante el cual hemos comprobado los valores ya publicados para las estrellas cercanas y hemos calculado, por primera vez, los momentos hasta el cuarto orden para las estrellas lejanas del Catálogo de FRICKE. Así, hemos deducido que las simetrías comunmente asumidas para la Galaxia se mantienen para las estrellas lejanas y que la desviación del vértex es un efecto local que desaparece a gran escala, presentándose en cambio la desviación en dirección perpendicular al plano galáctico.

Para el cálculo del gradiente del campo de velocidades hemos utilizado el modelo tridimensional de OGORODNIKOV-MILNE, sin más hipótesis que la aproximación lineal, adoptando como solución más correcta la encontrada con la misma muestra utilizada en el cálculo de los momentos centrados. La solución escogida es la obtenida combinando las ecuaciones en movimientos propios y en velocidades radiales, sin adoptar pesos para ellas con el fin de tener una solución lo más general posible.

El cálculo de los parámetros cinemáticos de la Galaxia requiere nuevas ecuaciones, para poder separar de las correcciones de precesión la parte hemisimétrica del gradiente del campo

de velocidades. En lugar de las hipótesis habituales, poco justificables, hemos adoptado un modelo estacionario, a simetría cilíndrica e "isotermo" para el entorno solar, el cual nos ha permitido plantear las ecuaciones hidrodinámicas de la dinámica estelar. Junto con las establecidas anteriormente y con los valores calculados de los momentos, dichas ecuaciones nos han permitido cerrar el problema de un modo coherente y obtener los valores definitivos de los parámetros cinemáticos de la Galaxia en el entorno del Sol y de las correcciones a la constante de la precesión.

Algunos de los parámetros obtenidos no tienen determinaciones fiables de otros autores, si bien nuestros resultados son coherentes con los actuales conocimientos sobre la estructura galáctica. La concordancia de los demás parámetros y de las correcciones a la constante de la precesión con las determinaciones previas de otros autores muestra la exactitud del método de cálculo utilizado y de los valores obtenidos, la representatividad de la muestra de estrellas empleada y la validez del modelo tridimensional desarrollado.

BIBLIOGRAFIA

- ALLEN, C.W.: 1964, "*Astrophysical Quantities*". The Athlone Press, University of London
- ASTERIADIS, G.: 1977, *Astron. Astrophys.* **56**, 25
- BACHALL, J.N., SONEIRA, R.M.: 1980, *Astrophys. J.* **SS**, **44**, 73
- BARBANIS, B., WOLTJER, L.: 1967, *Astrophys. J.* **150**, 461
- BRAND, L.: 1962, "*Vector and Tensor Analysis*". John Wiley & Sons Inc., New York
- BYL, J.: 1974, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **169**, 157
- CHANDRASEKHAR, S.: 1942, "*Principles of Stellar Dynamics*". University of Chicago Press
- CHARLIER, C.W.L.: 1926, "*The Motion and the Distribution of the Stars*". University of California Press
- CLUBE, S.V.M.: 1972, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **159**, 289
- CLUBE, S.V.M.: 1973, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **161**, 445
- CLUBE, S.V.M.: 1974, en "*New Problems in Astronomy*". IAU Symp. No. 61, p. 217. Reidel Publ. Comp., Dordrecht-Holland
- CLUBE, S.V.M.: 1978, *Vistas in Astronomy* **22**
- DELHAYE, J.: 1953, *Comptes rendus* **237**, 294
- DELHAYE, J.: 1965, en "*Galactic Structure*". p. 61. Eds. A. Blaauw & M. Schmidt. University of Chicago Press
- DIECKVOSS, W.: 1967, *Astron. Nachr.* **290**, 141
- DIECKVOSS, W. et al.: 1975, "*AGK3 Catalogue*". Hamburg-Bergedorf
- DU MONT, B.: 1975, Diss. Univ. Heidelberg
- DU MONT, B.: 1977, *Astron. Astrophys.* **61**, 127
- DU MONT, B.: 1978, *Astron. Astrophys.* **66**, 441
- EINASTO, J.: 1954, *Tartu Obs. Publ.*, **32**, No. 6

- EINASTO, J.: 1978, en *"The Large-Scale Characteristics of the Galaxy"*. IAU Symp. No. 84, p. 451. Reidel Publ. Comp. Dordrecht-Holland
- ERICKSON, R.R.: 1975, *Astrophys. J.* **195**, 343
- FATCHIKHIN, N.V.: 1970, *Sov. Astron.-AJ*, **14**, 495
- FRICKE, W.: 1967a, *Astron. J.* **72**, 642
- FRICKE, W.: 1967b, *Astron. J.* **72**, 1368
- FRICKE, W.: 1977, *"Basic Material for the Determination of Precession and of Galactic Rotation and a Review of Methods and Results"*, Astronomisches Rechen-Institut. Heidelberg, Veroff. No. 28
- FRICKE, W.: 1980, *Celestial Mech.* **22**, 113
- FRICKE, W., KOPFF, A.: 1963, *"Catálogos FK4 y FK4 Supplement"*. Astronomisches Rechen-Institut. Heidelberg Veroff. No. 10
- FRICKE, W., TSIUOMIS, A.: 1975, *Astron. Astrophys.* **42**, 445
- GLIESE, W.: 1969, *"Catalogue of Nearby Stars"*. Astronomisches Rechen-Institut. Heidelberg Veroff. No. 22
- GLIESE, W.: 1972, *Astron. Astrophys.* **21**, 431
- GLIESE, W., JAHREISS, H.: 1979, *Astron. Astrophys. Supp.* **38**, 423
- GÓMEZ, A.: 1974, *Astron. Nachr.* **295**, 133
- GORDON, J.E.: 1952, *Izv. Glav. Astron. Obs. Pulkovo* **19**, No. 148, p. 72
- GRAHAM, J.A.: 1978, en *"The Large-Scale Characteristics of the Galaxy"*. IAU Symp. No. 84, p. 195, Reidel Publ. Comp. Dordrecht-Holland
- GRENON, M.: 1978, *Publications de l'Observatoire de Genève Serie B, fascículo 5*
- HOERNER, S. VON : 1960, *Mitt. Astron. Rechen-Institut Heidelberg, Ser. A No. 13*
- HOFFLEIT, D.: 1964, *"Yale Catalogue of Bright Stars"*. New Haven
- KAPLAN, E.L.: 1952, *Biometrika* **39**, 319

- KENDALL, M., STUART, A.: 1979, *"The Advanced Theory of Statistics"*. Charles Griffin & Co. Ltd. London
- KNAPP, G.R.: 1978, en *"The Large-Scale Characteristics of the Galaxy"*. IAU Symp. No. 84, p. 225. Reidel Publ. Comp. Dordrecht-Holland
- LEDERLE, T.: 1980, *Mitt. Astron. Gesellschaft* No. 48, p.59
- LIN, C.C., SHU, F.H.: 1964, *Astrophys. J.* **140**, 646
- MAYOR, M.: 1972, *Astron. Astrophys.* **18**, 97
- MAYOR, M.: 1974, *Astron. Astrophys.* **32**, 321
- MENNESSIER, M.O.: 1972, *Astron. Astrophys.* **17**, 220
- MIHAILAS, D.: 1967, *"Galactic Astronomy"*. Freeman & Co. San Francisco
- MILNE, E.A.: 1935, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **95**, 560
- MORGAN, H.R., OORT, J.H.: 1951, *B.A.N.* **11**, 379
- MOTHES, J.: 1960, *"Estadística aplicada a la Ingeniería"*. Ed. Ariel, Barcelona
- NÚÑEZ, J.: 1977, *Act. II Asam. Nac. Astron. Astrofis.* p. 61 San Fernando, Cádiz
- NÚÑEZ, J., TORRA, J.: 1980a, *Act. III Asam. Nac. Astron. Astrofis.* Almería (en prensa)
- NÚÑEZ, J., TORRA, J.: 1980b, *Act. III Asam. Nac. Astron. Astrofis.* Almería (en prensa)
- NÚÑEZ, J., TORRA, J.: 1981, *Astron. Astrophys.* (en prensa)
- OGORODNIKOV, K.F.: 1932, *Z. Astrophys.* **4**, 190
- OGORODNIKOV, K.F.: 1965, *"Dynamics of Stellar System"* Pergamon Press, London
- ORÚS, J.J. DE : 1954, *"Teoría sobre los brazos de las nebulosas espirales"* *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* **27**, 141
- ORÚS, J.J. DE : 1966, *"Apuntes de Astronomía"*. Universidad de Barcelona
- ORÚS, J.J. DE : 1975, *Act. I Asam. Nac. Astron. Astrofis.* p. 121, Tenerife
- PARENAGO, P.P.: 1950, *Astron. J. URSS*, **27**, 150

- PARENAGO, P.P., MASEVITCH, A.G.: 1950, *Astron. J. URSS*, **27**, 137
- POLOZHENTSEV, D.D.: 1979, *Izv. Glav. Astron. Obs. Pulkovo*
No. 196
- RAKHIMOV, A.G.: 1978, *Tr. Astron. Inst. Tashkent* **2**, 59
- RIUS, A.: 1974, "Análisis tridimensional del campo galáctico de velocidades en el entorno del Sol". Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona
- SALPETER, E.E.: 1955, *Astrophys. J.* **121**, 161
- SANDAGE, A.R.: 1958, *Ric. Astr. Szeccia Vaticana* **5**, 41
- S.A.O.: 1965, "Catálogo de 258997 estrellas". Smithsonian Institution, Washington, D.C.
- SINZI, A.M.: 1972, en "Research in Hydrography and Oceanography". p. 271, Hydrogr. Dep. Japan, Tokyo
- SMART, W.M.: 1953, "Celestial Mechanics". Longmans, London
- SPITZER, L., SCHWARZSCHILD, M.: 1953, *Astrophys. J.* **118**, 106
- STODOLKIEWICZ, J.S.: 1969, "General Astrophysics". Elsevier Publ. Co., Inc., New York
- THÜRING, B.: 1975, *Astron. Nachr.* **296**, 83
- TORRA, J., NÚÑEZ, J.: 1980, *Act. III Asam. Nac. Astron. Astrofis.* Almería (en prensa)
- VASILEVSKIS, S., KLEMOLA, A.R.: 1971, *Astron. J.* **76**, 508
- VASILEVSKIS, S., MCNAMARA, B.J.: 1973, *Astron. J.* **78**, 639
- WIELEN, R.: 1974, en "La Dynamique des Galaxies Spirales". p. 357. Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris