Solutions du processus de rafle au sens des mesures différentielles

Jean Jacques Moreau

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier 1976, Exposé n° 1

SOLUTIONS DU PROCESSUS DE RAFLE AU SENS DES MESURES DIFFERENTIELLES

J.J. MOREAU

1. FORMULATION

Soit $I = [t_o, t_o + T]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit H un espace hilbertien réel. On donne $t \mapsto C(t)$, multifonction de I dans H à valeurs convexes fermées non vides ; on note $x \mapsto \psi(t,x)$ la fonction indicatrice de $C(t)$. Dans sa formulation forte [5] le problème de rafle par le convexe mobile C consiste en ceci : on cherche $u : I \to H$, fonction absolument continue dont la dérivée $du/dt = \overset{\circ}{u}$ vérifie, Lebesgue-presque partout dans I,

(1.1) $$-\overset{\circ}{u}(t) \in \partial\psi(t,u(t)) \quad .$$

De plus est imposée une condition initiale

(1.2) $$u(t_o) = u_o \quad \text{donné dans} \quad C(t_o).$$

L'auteur a déjà consacré un nombre considérable de pages à ce problème dont l'origine se trouve dans la mécanique des systèmes élastoplastiques (voir, par exemple, [9]) ; I est un intervalle de temps ; c'est pour simplifier qu'on le suppose ici compact. C. CASTAING a étudié des versions aléatoires de ce problème [1], [2], [3], [4].

Rappelons les points suivants :

1° Si A et B sont deux parties quelconques d'un espace métrique, nous écrivons

$$e(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B) \quad .$$

Reçu le 28 janvier 1976.

Cet écart dissymétrique vérifie l'inégalité triangulaire et peut, d'une certaine manière, jouer le rôle d'une distance entre valeurs successives d'une multifonction $t \mapsto C(t)$, définie sur un intervalle $[t_1, t_2]$ de $\mathbb{R}$. De là une notion semblable à celle de variation d'une fonction à valeurs dans un espace métrique : la rétraction ret$(C\ ;\ t_1, t_2)$; elle est nulle si et seulement si la multifonction $t \mapsto \operatorname{adh} C(t)$ est non décroissante sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ (cf. [6], [11]).

2° La mise en oeuvre, pour la résolution approchée de (1.1), (1.2) d'un procédé de différences finies (discrétisation du temps) du type "implicite" conduit naturellement à l'algorithme de rattrapage dont on va retrouver un cas particulier au Parag. 2 ci-après. Sous la simple hypothèse que la multifonction $t \mapsto C(t)$ est à rétraction finie cet algorithme converge vers une fonction $u : I \to H$, à variation bornée, éventuellement discontinue s'accordant à la condition initiale (1.2), qui est dite solution faible du problème (cf. [6]). Si C est à rétraction absolument continue, u est aussi solution forte.

3° L'unicité, pour chaque donnée initiale $u(t_0) = u_0$, de la solution absolument continue de (1.1), (1.2), ou plus généralement de la solution absolument continue de

$$(1.3) \qquad - \dot{u}(t) \in A(t, u(t)) \quad ,$$

où $A(t,.)$ désigne, pour chaque t, une multifonction de H dans H monotone au sens de Minty, résulte d'un calcul élémentaire : la monotonie de A entraîne que, si u_1 et u_2 sont deux solutions absolument continues de (1.3), la fonction numérique $t \mapsto |u_1(t) - u_2(t)|^2$ est décroissante.

4° Le fait que, pour tout $t \in I$ et tout $x \in H$, l'ensemble $\partial f(t,x)$ est une partie conique de H a la conséquence suivante : Si θ est une application absolument continue croissante d'un intervalle J sur I et si u est une solution absolument continue de (1.1), l'application $v = u \circ \theta : J \to H$ est une solution absolument continue de

$$- \dot{v}(s) \in \partial\psi(\theta(s), v(s)) \quad .$$

En d'autre termes (c'est intuitif dans les images mécaniques du processus ; cf. [9]) le processus de rafle associe la chaîne des positions successives du point mobile u à la chaîne des configurations successives du convexe mobile C d'une manière indépendante de l'horaire de cette succession (à première vue, le même argument s'applique à (1.3), dès que les ensembles A sont coniques ; en fait on montre dans [12] que si une multifonction monotone A possède cette propriété, il existe ψ, fonction indicatrice d'un convexe fermé, telle que $A \subset \partial\psi$). Il est établi dans [10] que cette conclusion subsiste pour les solutions faibles, éventuellement discontinues, et des changements de variable plus généraux sont étudiés.

Or, si $u : I \to H$ est absolument continue, la fonction $\dot{u} \in \mathcal{L}^1_H$ n'est autre que la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue de I, de la mesure vectorielle du, différentielle de u. La propriété de changement de variable ci-dessus revient à déprivilégier la mesure de Lebesgue.

De là l'idée d'une nouvelle formulation du problème, remplaçant la mesure de Lebesgue par une mesure scalaire positive sur I, comportant éventuellement des atomes, de manière à inclure la possibilité de solutions discontinues. Ainsi les solutions faibles, élaborées antérieurement au moyen de l'algorithme de rattrapage, pourront se trouver justifiées par une écriture formellement semblable à (1.1).

Pour toute fonction $u : I \to H$, à variation bornée (on écrira $u \in vb(I,H)$) il est classique de définir sa mesure différentielle du, à valeurs dans H ; cette question est reprise en grand détail pour I non nécessairement compact et un espace de Banach quelconque dans [12], sur la base de la théorie des mesures vectorielles selon Bourbaki.

Nous dirons que $u \in vb(I,H)$ est une solution du processus de rafle au sens des mesures différentielles, s'il existe une mesure positive $d\mu$ sur

I et une fonction $u' \in \mathcal{L}^1(I, d\mu\ ; H)$ telle que $u'\, d\mu$ soit la mesure différentielle de u et que, pour tout $t \in I$, on ait

$$- u'(t) \in \partial\psi(t, u(t)) \quad . \tag{1.4}$$

Il est équivalent de dire que $u(t) \in C(t)$ pour tout $t \in I$ et que la condition (1.4) est vérifiée $d\mu$-presque partout. On sait en effet que l'ensemble $\partial\psi(t,x)$ est non vide si et seulement si $x \in C(t)$; dans ce cas il contient toujours au moins le zéro de H. Si donc une fonction $u' \in \mathcal{L}^1(I, d\mu\ ; H)$ vérifie (1.4) sauf sur un ensemble $d\mu$-négligeable ω, on la remplacera par une fonction $d\mu$-équivalente prenant la valeur zéro en chaque point de ω.

La notion précédente n'est pas suffisamment précise pour conduire à un problème de valeur initiale bien posé. On sait en effet que, si $u \in vb(I,H)$ possède une discontinuité en un point (intérieur pour fixer les idées) t de I, la mesure vectorielle du possède en ce point un atome dont la masse est égale au saut $u^+(t) - u^-(t)$; mais la valeur $u(t)$ reste complètement indépendante de la mesure du. Bref, à l'encontre de ce qui arrive dans le cas absolument continu, il n'est pas vrai que la mesure du détermine la fonction u à une constante additive près.

Dans le cas où $v : I \to H$ est absolument continue, il en est de même de la fonction numérique $t \mapsto |v(t)|^2$ et sa dérivée, définie presque partout, vaut $2(v(t) \mid \overset{\circ}{v}(t))$ (on note $(.|.)$ le produit scalaire de H) ; cette formule sur laquelle repose, dans le cas absolument continu, la démonstration d'unicité, est généralisée dans [12] de la façon suivante : Pour v et w dans $vb(I,H)$, on définit de façon naturelle la mesure scalaire $(w|dv)$; si v est à variation bornée, il en est de même des fonctions $t \mapsto v^-(t)$ et $t \mapsto v^+(t)$ (limites de v, à gauche ou à droite de chaque t) et on a l'inégalité que voici, au sens de l'ordre des mesures scalaires,

$$2(v^-|dv) \leqslant d(|v|^2) \leqslant 2(v^+|dv) \quad . \tag{1.5}$$

On en tire aisément que, si u_1 et u_2 sont deux solutions du processus de rafle, au sens des mesures différentielles, la fonction numérique $t \mapsto |u_1(t) - u_2(t)|$ est décroissante, moyennant l'hypothèse supplémentaire que ces deux fonctions vectorielles à variation bornée sont continues à droite. Moyennant cette continuité à droite, on aura donc unicité de la solution correspondant à chaque donnée initiale $u(t_o)$.

L'objet du présent rapport est d'établir :

PROPOSITION. Soit C une multifonction de l'intervalle compact $I = [t_o, t_o + T]$ dans l'hilbertien H, à valeurs convexes fermés non vides, telle que la fonction rétraction

$$t \mapsto r(t) = \mathrm{ret}(C\ ;\ t_o, t)$$

soit à valeurs finies et continue à droite (cf. [6], [11]). Alors pour tout $u_o \in C(t_o)$, il existe une unique fonction $u \in vb(I,H)$ satisfaisant les conditions suivantes

i) $u(t_o) = u_o$

ii) u est continue à droite sur I

iii) il existe une mesure scalaire positive $d\mu$ et une fonction $u' \in \mathcal{L}^1_H(I, d\mu\ ;\ H)$ telles que $u'\, d\mu$ soit la mesure différentielle de u et que pour tout $t \in I$,

$$(1.6) \qquad - u'(t) \in \partial\psi(t, u(t)) \ .$$

SCOLIE 1. (cf. [12]) La condition $du = u'\, d\mu$, jointe à la continuité de u à droite équivaut à

$$\forall t \in I \ : \qquad u(t) = u(t_o) + \int_{]t_o, t]} u'\, d\mu \ .$$

La notion de solution du processus de rafle que nous étudions ici est donc très semblable à celle qu'invoque C. CASTAING [3], [4] pour une version aléatoire du problème. Mais la Proposition précédente n'est pas contenue dans les résultats de Castaing car l'hypothèse, faite ci-dessus, d'une rétraction finie et continue à droite est plus faible que celle de Castaing, laquelle revient à invoquer la <u>variation</u> de la multifonction C au sens de la distance de Hausdorff ; pour son problème aléatoire, Castaing est en outre amené à supposer que le convexe est faiblement localement compact et ne contient pas de droite.

On note par ailleurs que la mesure $d\mu$ n'est pas spécifiée a priori ; cela donne plus d'intérêt à la propriété d'<u>unicité</u> (démontrée dans [12] ; on n'y reviendra pas) ; observons toutefois :

SCOLIE 2. <u>On peut dans la formulation ci-dessus prendre pour</u> $d\mu$ <u>la mesure différentielle</u> dr <u>et en ce cas</u> $|u'(t)| \leqslant 1$ <u>pour tout</u> t.

Il résulte d'autre part de [6] [11] que :

SCOLIE 3. <u>La fonction</u> r <u>étant supposée à valeurs finies, sa continuité à droite en chaque point</u> $t_1 < t_0 + T$ <u>de</u> I <u>entraîne que la multifonction</u> C <u>est semi-continue inférieurement à droite dans le sens classique suivant</u> : <u>pour tout</u> Ω, <u>ouvert fort de</u> H, <u>tel que</u> $\Omega \cap C(t_1) \neq \emptyset$, <u>il existe</u> $\theta \in \,]t_1, t_0 + T]$ <u>tel que</u>

$$\forall t \in [t_1, \theta[\quad : \quad \Omega \cap C(t) \neq \emptyset \ .$$

<u>Si on fait l'hypothèse additionnelle que</u> $C(t_1)$ <u>est fortement compact, cette semi-continuité inférieure implique réciproquement la continuité de</u> r <u>à droite au point</u> t_1.

Quant au style des démonstrations on peut le caractériser par les observations suivantes :

1° On n'utilise pas de théorème de dualité des fonctionnelles convexes intégrales. Seul est invoqué le lemme de Fatou, à propos d'une intégrale supérieure de la forme $\int_I^* f(t,u(t))\, dr(t)$, ce qui dispense d'examiner le mesurabilité de $t \mapsto f(t,u(t))$.

2° On n'utilise pas de technique de régularisation, mais des subdivisions de l'intervalle I et la construction de solutions approchées "à image polygonale".

3^o Une fois construites, dans le paragraphe 2, la suite de ces solutions approchées puis, dans le paragraphe 3, une fonction u qui en est, en un certain sens la limite, on propose, dans les paragraphes 4 et 5 respectivement, deux variantes pour aboutir à prouver que u est bien solution du problème : la première variante repose sur la convergence de l'algorithme de rattrapage, établie dans [6] au moyen d'inégalités de "géométrie hilbertienne" ; la seconde utilise des arguments d'analyse fonctionnelle qui pourraient peut être s'adapter à des problèmes analogues formulés hors du cadre hilbertien.

2. CONSTRUCTION DE SOLUTIONS APPROCHEES

LEMME 1. Soit (ε_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite de réels > 0 tendant vers zéro. Il existe une suite (P_n), $n \in \mathbb{N}$, de partitions finies de I en sous-intervalles de la forme

$$P_n : [t_o, t_1^n[\ , [t_1^n, t_2^n[\ , \ldots , [t^n_{\nu(n)-1}, t_o + T[\ , \{t_o + T\}$$

(on écrira $t_i^n = t_o$ pour $i = 0$ et $t_i^n = t_o + T$ pour $i = \nu(n)$) possédant les propriétés suivantes

i) La suite de partitions (P_n) est croissante, c'est-à-dire que tous les noeuds de P_n sont aussi des noeuds de $P_{n'}$ pour tout $n' \geq n$.

ii) L'oscillation de la fonction r (croissante, continue à droite) sur chacun des intervalles constituant P_n est $\leq \varepsilon_n$.

iii) (2.1) $$\lim_{n \to \infty} \max \{t_i^n - t_{i-1}^n \ : \ i = 1, 2, \ldots \ , \nu(n)\} = 0 \ .$$

Démonstration. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $0 = \rho_o^n, \rho_1^n, \ldots, \rho_i^n, \ldots$ une suite strictement croissante de réels, tendant vers $+\infty$ avec i et telle que

$$\forall i \in \mathbb{N} : \qquad \rho_{i+1}^n - \rho_i^n \leq \varepsilon_n \ .$$

La fonction $r : I \to \mathbb{R}_+$, étant croissante et continue à droite, est s. c. s. Donc l'image réciproque par r de tout intervalle $[\rho_i^n, +\infty[$ est un sous-intervalle fermé de I, éventuellement vide. On en conclut que, parmi les images réciproques des intervalles $[\rho_i^n, \rho_{i+1}^n[$, celles qui sont non vides constituent une partition de I ayant la forme P_n ci-dessus. Par construction, cette partition vérifie ii) et il en sera de même a fortiori si on la remplace par un raffinement de même forme. De tels raffinements permettent évidemment d'assurer i) et iii).

Ayant construit les partitions P_n conformément à ce Lemme, introduisons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une suite finie (x_i^n), $i = 0,1,\ldots,\nu(n)$, de points de H par la récurrence suivante :

(2.2) $$x_o^n = u_o$$

(2.3) $$x_i^n = \mathrm{proj}(x_{i-1}^n, C(t_i^n)) \quad .$$

Observer que, par construction, $t_{i-1}^n < t_i^n$ mais que, vu les raffinements invoqués dans la démonstration ci-dessus, il pourra arriver que $r(t_{i-1}^n) = r(t_i^n)$. D'après (2.3), on a

(2.4) $$|x_i^n - x_{i-1}^n| \leqslant e(C(t_{i-1}^n), C(t_i^n)) \leqslant r(t_i^n) - r(t_{i-1}^n) \quad .$$

Construisons une application $u^n : I \to H$ en définissant sa restriction à chaque intervalle $[t_{i-1}^n, t_i^n[$:

1° Si $r(t_i^n) = r(t_{i-1}^n)$, ce qui entraîne $x_i^n = x_{i-1}^n$, on prend u^n constant sur l'intervalle :

$$\forall t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[\quad : \quad u^n(t) = x_{i-1}^n = x_i^n \quad .$$

2° Si $r(t_i^n) > r(t_{i-1}^n)$, on prend

(2.5) $$\forall t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[\quad : \quad u^n(t) = \frac{[r(t_i^n)-r(t)]\, x_{i-1}^n + [r(t)-r(t_{i-1}^n)]\, x_i^n}{r(t_i^n) - r(t_{i-1}^n)} \quad .$$

Enfin, pour $t = t_{\nu(n)}^n = t_o + T$, on prend

$$u(t_o + T) = x_{\nu(n)}^n \quad .$$

L'expression de u^n sur $[t_i^n, t_{i+1}^n[$ (ou au point $t_o + T$) montre que l'expression de $u^n(t)$ écrite en (2. 5) est encore valable pour $t = t_i^n$. On en conclut que, quels que soient t et t' dans $[t_{i-1}^n, t_i^n]$ on a

$$u^n(t') - u^n(t) = \frac{r(t')-r(t)}{r(t_i^n)-r(t_{i-1}^n)} (x_i^n - x_{i-1}^n)$$

et par suite, si $t \leqslant t'$, vu (2.4),

(2.6) $$|u^n(t') - u^n(t)| \leqslant r(t') - r(t) \quad .$$

Par addition on voit que cette inégalité vaut plus généralement quel que soit le sous-intervalle compact $[t,t']$ de I. Donc u^n est à variation bornée, continue à droite comme la fonction r et pour t et t' dans I on a

$$t \leqslant t' \Rightarrow \operatorname{var}(u^n\ ;\ t,t') \leqslant r(t') - r(t) \quad .$$

Il en résulte que la mesure vectorielle du^n, à valeurs dans H, est majorable et que sa valeur absolue $|du^n|$ est majorée par la mesure positive dr (cf. [12]). Plus précisément :

LEMME 2. La mesure vectorielle du^n est égale à $\dot{u}^n\, dr$ où $\dot{u}^n$ désigne la fonction en escalier à valeurs dans la boule unité de H construite comme suit, sur chaque intervalle $]t_{i-1}^n, t_i^n]$,

1° Si $r(t_i^n) = r(t_{i-1}^n)$ on prend $\dot{u}^n = 0$ sur l'intervalle.

2° Sinon on prend pour $\dot{u}^n$ la valeur constante

(2.7) $$\forall t \in\ ]t_{i-1}^n, t_i^n] \quad ; \quad \dot{u}^n(t) = \frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{r(t_i^n)-r(t_{i-1}^n)}$$

3° De plus $\dot{u}^n(t_o) = 0$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que les deux mesures du^n et $\dot{u}^n\, dr$ donnent la même intégrale sur chaque sous-intervalle de I. Par réunion ou différence, on se ramène aux deux cas suivants :

Cas d'un sous-intervalle ouvert $]\sigma,\tau[$ de $]t_{i-1}^n, t_i^n]$

Rappelons (cf. [12]) que pour toute fonction $v : I \to H$ à variation bornée on a

$$\int_{]\sigma,\tau[} dv = v^-(\tau) - v^+(\sigma) \quad ,$$

où v^- et v^+ désignent respectivement les limites de la fonction v à gauche ou à droite de chaque point. L'égalité attendue est donc banale si $r(t_i^n) = r(t_{i-1}^n)$; sinon

$$\int_{]\sigma,\tau[} du^n = \frac{r^-(\tau)-r^+(\sigma)}{r(t_i^n)-r(t_{i-1}^n)} (x_i^n-x_{i-1}^n)$$

ce qui est égal à $\int_{]\sigma,\tau[} \dot{u}^n \, dr$, vu la valeur constante de $\dot{u}^n$ sur $]t_{i-1}^n, t_i^n]$.

Cas d'un intervalle réduit au point t_i^n

Si $0 < i \leqslant \upsilon(n)$, on a

$$\int_{\{t_i^n\}} du^n = u^{n+}(t_i^n) - u^{n-}(t_i^n) = x_i^n - u^{n-}(t_i^n) \quad .$$

Cela fait banalement zéro si $r(t_i^n) = r(t_{i-1}^n)$; sinon, d'après (2.5),

$$u^{n-}(t_i^n) = \frac{[r(t_i^n) - r^-(t_i^n)]\, x_{i-1}^n + [r^-(t_i^n) - r(t_{i-1}^n)]\, x_i^n}{r(t_i^n) - r(t_{i-1}^n)}$$

d'où

$$\int_{\{t_i^n\}} du^n = \frac{r(t_i^n) - r^-(t_i^n)}{r(t_i^n) - r(t_{i-1}^n)} (x_i^n - x_{i-1}^n) \quad .$$

Par ailleurs

$$\int_{\{t_i^n\}} \dot{u}^n \, dr = \dot{u}^n(t_i^n)\, [r(t_i^n) - r^-(t_i^n)]$$

d'où l'égalité attendue.

Pour $i = 0$, la continuité des fonctions r et u^n à droite donne

$$\int_{\{t_o\}} du^n = \int_{\{t_o\}} \dot{u}^n \, dr = 0 \quad .$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $t \in]t_o, t_o + T]$, il existe i tel que $t \in]t_{i-1}^n, t_i^n]$; on notera $\tau^n(t)$ la valeur t_i^n correspondante ; on pose en outre $\tau^n(t_o) = t_o$. Avec cette notation :

LEMME 3. <u>Pour tout</u> $t \in I$ <u>on a</u>

(2.8) $$- \dot{u}^n(t) \in \partial\psi(\tau^n(t), u^n(\tau_n(t))) \quad ,$$

<u>c'est-à-dire de façon équivalente, en notant</u> $\gamma(t,.)$ <u>la fonction d'appui de</u> $C(t)$,

$$(2.9)\qquad u^n(\tau^n(t)) \in C(\tau^n(t))$$

$$(2.10)\qquad \gamma(\tau^n(t),-\dot{u}^n(t)) + (u^n(\tau^n(t))|\dot{u}^n(t)) = 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Tout est banal pour $t = t_o$; si $\tau^n(t) = t_i^n$, $i > 0$, on a

$$u^n(\tau^n(t)) = u^n(t_i^n) = x_i^n \in C(t_i^n) = C(\tau^n(t))$$

Si l'on est dans le cas $r(t_{i-1}^n) = r(t_i^n)$ la valeur $\dot{u}^n(t)$ est zéro, qui vérifie bien (2.8). Sinon, on observe que (2.3) équivaut à

$$x_{i-1}^n - x_i^n \in \partial\psi(t_i^n, x_i^n)$$

d'où (2.8) d'après l'expression (2.7) de $\dot{u}^n$.

3. LA FONCTION u

Les $\dot{u}^n$ sont des fonctions en escalier sur I. Elles définissent donc des éléments de $L^p(dr,H)$ pour tout $p \in [1,+\infty]$. Prenons $p = 2$: l'espace $L^2(dr,H)$ est un hilbertien, identifiable à son dual. Comme les $\dot{u}^n$ prennent leurs valeurs dans la boule unité de H, on est en présence d'une suite d'éléments de la boule fermée B de $L^2(dr,H)$, de rayon $\sqrt{T}$. Il en résulte l'existence d'une sous-suite convergente pour la topologie faible de $L^2(dr,H)$. Quitte à changer l'indexation, on supposera que $(\dot{u}^n)$ se réduit à cette sous-suite.

Soit $\dot{u}$ la limite de la suite $(\dot{u}_n)$ dans $L^2(dr,H)$ faible.

C'est a fortiori un élément de $L^1(dr,H)$, ce qui entraîne l'existence d'une mesure vectorielle notée $\dot{u}\,dr$, à valeurs dans H.

Définissons $u : I \to H$ par

$$(3.1)\qquad u(t) = u_o + \int_{]t_o,t]} \dot{u}\,dr \quad .$$

C'est une fonction continue à droite, à variation bornée et $\dot{u}\,dr$ est sa mesure différentielle.

En notant $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire de $L^2(dr,H)$ on a, pour tout $a \in H$,

$$(a|u(t)) = (a|u_o) + \langle \dot{u} \, , \chi_{]t_o,t]}\, a \rangle$$

et, de même, puisque u^n est continue à droite, de mesure différentielle $\dot{u}^n\, dr$,

$$(a|u^n(t)) = (a|u_o) + \langle \dot{u}^n , \chi_{]t_o,t]}\, a\rangle \ .$$

Puisque $\dot{u}^n$ tend vers $\dot{u}$ dans $L^2(dr,H)$ faible, cela montre que, pour chaque $t \in I$, la suite des $u^n(t)$ converge vers $u(t)$ dans H faible.

L'inégalité (2.6) signifie que, pour $t \leqslant t'$ fixés dans I, la suite des $u^n(t') - u^n(t)$ prend ses valeurs dans la boule fermée de H de rayon $r(t')- r(t)$. La convergence faible en question assure donc que

(3.2) $$t' \leqslant t \Rightarrow |u(t')- u(t)| \leqslant r(t')- r(t) \ .$$

LEMME 4. <u>Pour tout $t \in I$ on a</u>

(3.3) $$u(t) \in C(t) \ .$$

<u>Démonstration</u>. Tout $t \in I$ différent de l'extrémité $t_o+ T$ appartient à l'un des $[t^n_{i-1}, t^n_i[$; notons $\sigma^n(t)$ la valeur correspondante de t^n_{i-1} ; pour $t = t_o+ T$ posons par ailleurs $\sigma^n(t) = t_o+ T$. Alors $u^n(\sigma^n(t)) \in C(\sigma^n(t))$. Par construction l'oscillation de r sur $[t^n_{i-1}, t^n_i[$ est majorée par ε_n qui tend vers zéro si n tend vers l'infini, donc

(3.4) $$\lim_{n\to\infty} [r(t)- r(\sigma_n(t))] = 0 \ .$$

En vertu de (2.6) on a

(3.5) $$|u^n(t)- u^n(\sigma^n(t))| \leqslant r(t)- r(\sigma_n(t)) \ .$$

Alors

$$\begin{aligned} d(u^n(t), C(t) &\leqslant d(u^n(t), u^n(\sigma^n(t))) \\ &\quad + d(u^n(\sigma^n(t)), C(\sigma^n(t))) + e(C(\sigma^n(t)), C(t)) \\ &\leqslant 2(r(t)- r(\sigma^n(t))) \end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Comme la fonction $x \mapsto d(x,C(t))$ est faiblement s. c. i., on conclut $d(u(t),C(t)) \leqslant 0$, c'est-à-dire (3.3).

4. FIN DE LA DEMONSTRATION , MOYENNANT LA PROPRIETE DE CONVERGENCE DE L'ALGORITHME DE RATTRAPAGE

Dans le cas actuel, d'une multifonction $t \mapsto C(t)$ à rétraction continue à droite, la construction de la suite (x_i^n) par (2.2) et (2.3) coïncide avec ce que nous avons appelé ailleurs l'algorithme de rattrapage (au lieu d'un point mobile $t \mapsto u(t)$ "raflé" par le convexe mobile $t \mapsto C(t)$, on imagine un point qui est laissé sur place, mais rattrape instantanément $C(t)$ par le plus court chemin à chacun des instants t_i^n). Il a été établi dans [6] que la suite des fonctions en escalier (e_n) continues à droite construites sur chacune des chaînes de points (x_i^n), $i = 0,1,\dots,\nu(n)$, est fortement uniformément convergente sur I. Vu (3.4) et (3.5) il en est de même pour la suite de fonctions $t \mapsto u^n(t)$ définie au Paragraphe 2 et la limite coïncide nécessairement avec $u(t)$ telle qu'on l'a définie au Paragraphe 3.

Pour tout $t \in I$, définissons $\tau_n(t)$ comme dans le Lemme 3. Les $\dot{u}^n$ prenant leurs valeurs dans la boule unité de H, l'expression de $e(C(t), C(\tau^n(t)))$ à partir des fonctions d'appui (cf. [11], formule (2.8)) donne

$$\gamma(t,-\dot{u}^n(t)) \leqslant \gamma(\tau^n(t),-\dot{u}^n(t)) + r(\tau^n(t)) - r(t) \quad . \tag{4.1}$$

Par ailleurs, d'après (2.6)

$$|u^n(\tau^n(t)) - u^n(t)| \leqslant r(\tau^n(t)) - r(t) \quad ,$$

d'où

$$(u^n(t)|\dot{u}^n(t)) \leqslant (u^n(\tau^n(t))|\dot{u}^n(t)) + r(\tau^n(t)) - r(t) \quad . \tag{4.2}$$

En outre, d'après la convergence forte de $u^n(t)$ vers $u(t)$,

$$\lim_{n \to \infty} (u(t) - u^n(t)|\dot{u}^n(t)) = 0 \quad . \tag{4.3}$$

Les t_i^n ayant été construits conformément au Lemme 1, $\tau_n(t)$ tend en décroissant vers t d'où, vu la continuité de r à droite

(4.4) $$\lim_{n\to\infty} (r(\tau^n(t)) - r(t)) = 0 \;.$$

En rapprochant (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) de (2.10) on obtient

(4.5) $$\limsup_{n\to\infty} [\gamma(t,-\dot{u}^n(t)) + (u(t)|\dot{u}^n(t))] \leqslant 0 \;.$$

On utilise alors l'<u>artifice de Mazur</u> dans $L^2(dr,H)$: comme les $\dot{u}^n$ convergent faiblement vers $\dot{u}$ dans cet espace, il existe une suite, notée $(\dot{v}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, d'éléments de cet espace qui converge fortement vers $\dot{u}$ et telle que chaque $\dot{v}^m$ soit de la forme

(4.6) $$\dot{v}^m = \sum_{j\in J(m)} \alpha_j^m \dot{u}^j$$

avec $J(m)$ ensemble fini d'entiers $\geqslant m$ et les α_j^m éléments de $[0,1]$ tels que

(4.7) $$\sum_{j\in J(m)} \alpha_j^m = 1 \;.$$

Quitte à remplacer $\dot{v}^m$ par une sous-suite, on peut supposer, puisqu'elle converge dans $L^2(dr,H)$, que $\dot{v}^m(t)$ converge fortement vers $\dot{u}(t)$ pour tout t dans le complémentaire d'une partie dr-négligeable. La convexité de la fonction

$$x \mapsto \gamma(t,-x) + (u(t)|x)$$

fait que

$$\gamma(t,-\dot{v}^m(t) + (u(t)|\dot{v}^m(t)) \leqslant \sum_{j\in J(m)} \alpha_j^m[\gamma(t,-\dot{u}^j(t)) + (u(t)|\dot{u}^j(t))] \;.$$

Il en résulte, vu (4.5),

$$\limsup_{m\to\infty} [\gamma(t,-\dot{v}^m(t)) + (u(t)|\dot{v}^m(t))] \leqslant 0 \;.$$

Or pour tous les t tels que $\dot{v}^m(t)$ converge vers $\dot{u}(t)$ on aura, par la semi-continuité inférieure de γ,

$$\gamma(t,-\dot{u}(t)) + (u(t)|\dot{u}(t)) \leqslant \liminf_{m\to\infty} [\gamma(t,-\dot{v}^m(t)) + (u(t)|\dot{v}^m(t))] \;.$$

Bref, sauf sur un ensemble dr-négligeable,

(4.8) $$\gamma(t,-\dot{u}(t)) + (u(t)|\dot{u}(t)) \leqslant 0 \;.$$

Compte tenu du Lemme 4, et en changeant en 0 la valeur de $\dot{u}(t)$ en tout point t tel que (4.8) ne soit pas satisfaite, on conclut que u remplit les conditions de la Proposition, avec $d\mu = dr$ et $u' = \dot{u}$.

5. METHODE N'INVOQUANT PAS LA THEORIE DU RATTRAPAGE

LEMME 5. *A tout* $y \in L^1(dr,H)$, *associons* $Y : I \to H$ *par*

$$Y(t) = \int_{]t_o,t]} y \, dr \quad .$$

La fonctionnelle

$$y \mapsto \int_I (y|Y) \, dr$$

est une forme quadratique $\geqslant 0$ *sur* $L^1(dr,H)$, *donc une fonctionnelle convexe.*

Démonstration. Y est une fonction à variation bornée continue à droite, nulle au point t_o, et sa mesure différentielle est $dY = y \, dr$. On en conclut par l'inégalité (1.5) (cf. [12])

$$\int (y|Y) \, dr \geqslant \frac{1}{2}|(Y(t_o+T)|^2 \geqslant 0 \quad .$$

Cela établi, on invoque l'artifice de Mazur ; les $\dot{v}^m$ sont construits comme en (4.6) ; quitte à les remplacer par une sous-suite on peut supposer que $\dot{v}^m(t)$ converge fortement vers $\dot{u}(t)$ pour tout t dans le complémentaire d'une partie dr-négligeable, soit $\mathcal{N}$, de I.

Vu que $u(t) \in C(t)$ pour tout t, *l'intégrale supérieure*

$$\int_I^* [\gamma(t,-\dot{u}(t)) + (u(t)|\dot{u}(t))] \, dr(t) \tag{5.1}$$

porte sur une fonction $\geqslant 0$; nous établirons donc que, dr-presque partout, $-\dot{u}(t) \in \partial\psi(t,u(t))$ en prouvant la nullité de cette intégrale supérieure.

Pour tout $t \in I \setminus \mathcal{N}$, la semi-continuité inférieure de $x \mapsto \gamma(t,x)$ donne

$$\gamma(t,-\dot{u}(t)) + (u(t)|\dot{u}(t)) \leqslant \liminf_{m \to \infty} [\gamma(t,-\dot{v}^m(t)) + (u(t)|\dot{v}^m(t))] \quad .$$

D'après le lemme de Fatou, (5.1) est donc majorée par

$$\liminf_{m \to \infty} \int_I^* [\gamma(t,-\dot{v}^m(t)) + (u(t)|\dot{v}^m(t))] \, dr(t)$$

$$= \liminf_{m \to \infty} \int_I^* [\gamma(t,-\dot{v}^m(t)) + (v^m(t)|\dot{v}^m(t)) + (u(t)-v^m(t)|\dot{v}^m(t))] \, dr(t)$$

où les v^m sont définies par

$$(5.2) \qquad v^m(t) = u_o + \int_{]t_o,t]} \dot{v}^m \, dr \quad .$$

Visiblement, v^m tend vers u dans $L^2(dr,H)$ fort ; les $\dot{v}^m$, comme les $\dot{u}^j$, prennent leurs valeurs dans la boule unité de H ; on en conclut

$$\lim_{m \to \infty} \int_I (u- v^m|\dot{v}^m) \, dr = 0 \quad .$$

Il vient donc que l'expression (5.1) est majorée par la lim.inf de

$$(5.3) \qquad \int_I^* [\gamma(t,- \dot{v}^m(t)) + (v^m(t)|\dot{v}^m(t))] \, dr(t)$$

$$= \int_I^* \gamma(t,- \dot{v}^m(t)) \, dr(t) + \int_I (v^m(t)|\dot{v}^m(t)) \, dr(t) \quad .$$

Il résulte du Lemme 5 que, si on pose systématiquement

$$v(t) = u_o + \int_{]t_o,t]} \dot{v} \, dr \quad ,$$

la fonctionnelle $\dot{v} \mapsto \int_I (v|\dot{v}) \, dr$ est convexe d'où

$$\int_I (v^m|\dot{v}^m) \, dr \leqslant \sum_{j \in J(m)} \alpha_j^m \int_I (u^j|\dot{u}^j) \, dr \quad .$$

De même, la convexité de γ, donne

$$\int_I^* \gamma(t,- \dot{v}^m(t)) \, dr(t) \leqslant \sum_{j \in J(m)} \alpha_j^m \int_I^* \gamma(t,- \dot{u}^j(t)) \, dr(t) \quad .$$

Par suite, le second membre de (5.3) est majoré par

$$\sum_{j \in J(m)} \alpha_j^m \int_I^* [\gamma(t,- \dot{u}^j(t)) + (u^j(t)|\dot{u}^j(t))] \, dr(t) \quad .$$

On invoque maintenant (4.1), (4.2) et (2.10) :

$$\begin{aligned} \gamma(t,- \dot{u}^j(t)) + (u^j(t)|\dot{u}^j(t)) &\leqslant \gamma(\tau^j(t),- \dot{u}^j(t)) + (u^j(\tau^j(t)|\dot{u}^j(t)) \\ &\qquad + 2[r(\tau^j(t)- r(t)] \\ &\leqslant 2[r(\tau^j(t)- r(t)] \quad . \end{aligned}$$

Or $j \in J(m)$ implique $j \geqslant m$, donc $\tau^j(t) \leqslant \tau^m(t)$ et

$$r(\tau^j(t)) - r(t) \leqslant r(\tau^m(t)) - r(t)$$

ce qui tend vers zéro, uniformément par rapport à $t \in I$, lorsque m tend vers l'infini.

6. REFERENCES

[1] CASTAING, C. C.R.Acad. Sci., Ser. A 277 (1973), 1057-1059.

[2] CASTAING, C. Version aléatoire du problème de rafle par un convexe, Séminaire d'Analyse Convexe, 4 (1974), Exposé n° 1 (11 p.).

[3] CASTAING, C. Rafle par un convexe aléatoire à variation continue à droite, Séminaire d'Analyse Convexe, 5 (1975), Exposé n° 15 (21 p.).

[4] CASTAING, C. C.R.Acad. Sci., Ser. A 282 (1976), à paraître.

[5] MOREAU, J.J. Rafle par un convexe variable, 1ère partie, Séminaire d'Analyse Convexe, 1 (1971), Exposé n° 15 (42 p.) ; 2ème partie, ibid. 2 (1972), Exposé n° 3 (36 p.).

[6] MOREAU, J.J. Retraction d'une multiapplication, Séminaire d'Analyse Convexe, 2 (1972), Exposé n° 13 (89 p.).

[7] MOREAU, J.J. C.R.Acad. Sci., Ser. A 276 (1973), 791-794.

[8] MOREAU, J.J. C.R.Acad. Sci., Ser. A, 276 (1973), 265-268.

[9] MOREAU, J.J. On unilateral constraints, friction and plasticity, in : New variational Techniques in Mathematical Physics, C.I.M.E., II ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Roma (1974), p. 173-321.

[10] MOREAU, J.J. Factorisation d'un processus de rafle discontinu, Séminaire d'Analyse Convexe, 4 (1974), Exposé n° 15 (16 p.).

[11] MOREAU, J.J. Multiapplications à rétraction finie, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., Ser. IV, 1 (1974), 169-203.

[12] MOREAU, J.J. Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles, Séminaire d'Analyse Convexe, 5 (1975), Exposé n° 17 (39 p.).