

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**Condizioni di fratturazione indotte da  
variazioni di temperatura e pressione di  
poro in mezzi termo-poro-elastici**

**Relatore:**

**Prof.ssa Maria Elina  
Belardinelli**

**Presentata da:**

**Gaetano Ferrante**

**Correlatore:**

**Prof. Maurizio Bonafede**

Anno Accademico 2018/2019

*Ai miei genitori*

## Sommario

Gli eventi di deformazione del suolo in aree vulcaniche sono stati solitamente spiegati attraverso modelli di camere magmatiche immerse in mezzi elastici, viscoelastici o elastoplastici sottoposte ad un aumento di pressione e di volume del magma in esse contenuto. Talvolta tale spiegazione si è rivelata insoddisfacente, portando alla necessità di indagare meccanismi deformativi differenti, quali l'aumento della pressione di poro e l'espansione termica. Lo scopo del presente lavoro è ottenere i campi di temperatura e pressione all'interno di un mezzo termo-poro-elastico affrontando il problema in simmetria sferica, in modo da poter ricavare il tensore di sforzo ad essi associato e la relativa Coulomb Failure Function, che consente di valutare l'avvicinamento o l'allontanamento del mezzo dalle condizioni di fratturazione. In particolare vengono illustrate due situazioni limite, quella in cui il mezzo è caratterizzato da permeabilità nulla e quella in cui la permeabilità è invece molto elevata.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Equazioni della termo-poro-elasticità</b>	<b>7</b>
1.1 Relazioni costitutive . . . . .	7
1.2 Simmetria sferica . . . . .	9
1.3 Coulomb Failure Function . . . . .	11
<b>2 Il caso di permeabilità nulla</b>	<b>14</b>
2.1 Temperatura e pressione . . . . .	14
2.2 Tensore di sforzo . . . . .	15
2.3 Coulomb Failure Function . . . . .	17
<b>3 Il caso di permeabilità elevata</b>	<b>21</b>
3.1 Temperatura e pressione . . . . .	21
3.2 Tensore di sforzo . . . . .	23
3.3 Coulomb Failure Function . . . . .	24
<b>Conclusioni</b>	<b>27</b>
<b>A Espressione esplicita di <math>\sigma_{\theta\theta}</math></b>	<b>29</b>
<b>B Espressione esplicita di <math>\tau</math> e <math>\sigma_n</math></b>	<b>31</b>

# Introduzione

Le caldere di Long Valley in California, di Rabaul in Nuova Guinea e dei Campi Flegrei in Italia forniscono alcuni fra gli esempi più significativi di episodi di deformazione del suolo in aree vulcaniche o geotermiche. Eventi del genere sono stati solitamente spiegati attraverso modelli di camere magmatiche immerse in mezzi elastici, viscoelastici o elastoplastici sottoposte ad un aumento di pressione e di volume del magma in esse contenuto. Tale spiegazione si è tuttavia rivelata insoddisfacente nel caso dei Campi Flegrei, dove i valori di pressione necessari a spiegare il fenomeno risultano troppo elevati per essere realistici e la profondità del centro della sorgente deformativa risulta incompatibile con quella del tetto della camera magmatica. Ciò ha portato alla necessità di sviluppare teorie e modelli alternativi per interpretare i risultati sperimentali.

I lavori di Bonafede (1991, 1995) hanno infatti mostrato come la pressione di poro e l'espansione termica risultino essere meccanismi deformativi più efficaci rispetto a quelli precedentemente indagati. Nelle regioni vulcaniche, infatti, può accadere che la migrazione magmatica sia accompagnata da un degassamento di fluidi caldi altamente pressurizzati che possono facilmente penetrare attraverso le crepe e i pori della roccia circostante, aumentandone la pressione di poro e la temperatura ed eventualmente causando la creazione di ulteriori fratture o l'espansione di quelle preesistenti.

Nel lavoro del '91 Bonafede, seguendo l'approccio di McTigue (1986), considera meccanismi deformativi termo-poro-elastici applicati al problema dell'avvezione di calore 1-dimensionale attraverso una matrice permeabile in presenza di un flusso costante di fluido e trova le soluzioni per temperatura e pressione tramite un approccio perturbativo, mentre in un successivo studio vengono estesi i risultati precedenti al caso 3-dimensionale, in configurazione di simmetria sferica (Bonafede (1991)). In Bonafede & Mazzanti (1997) viene risolto il problema 1-dimensionale utilizzando un procedimento di soluzione numerica dopo aver ricondotto il sistema di equazioni alle derivate parziali non lineari ad un sistema di equazioni ordinarie, impiegando la tecnica di self-similarità.

Lo scopo del presente lavoro è ottenere i campi di temperatura e pressione all'interno di una matrice permeabile affrontando il problema in simmetria sferica, in modo da poter ricavare il tensore di sforzo ad essi associato e la

relativa Coulomb Failure Function, che consente di valutare l'avvicinamento o l'allontanamento del mezzo dalle condizioni di fratturazione. La camera magmatica viene quindi modellizzata come una sorgente sferica di fluidi caldi e pressurizzati che entra in contatto con una matrice termo-poro-elastica (TPE) fredda e satura estesa all'infinito. La complessità delle equazioni governanti il problema è aggirata procedendo per approssimazioni in virtù dei risultati dei lavori precedentemente citati. In analogia con il lavoro di Bonafede & Mazzanti (1997) vengono considerati due stati di riferimento, descritti da pressione di poro e temperatura, per il fluido all'interno della matrice con due diverse condizioni al contorno al contatto della matrice con la sorgente:

- (I) Acqua supercritica a  $10^8 Pa$  e  $673.15K$ ,  $p_a = 10^7 Pa$ ,  $T_a = 373.15K$ ;
- (II) Acqua liquida a pressione e temperatura normale,  $p_a = 10^7 Pa$ ,  $T_a = 283.15K^1$

dove  $p_a$  e  $T_a$  indicano variazioni rispetto al valore di riferimento.

Nel Capitolo 1 viene presentato un riepilogo delle equazioni fondamentali che governano il problema del flusso di fluidi all'interno di rocce porose e vengono estesi i risultati al caso di simmetria sferica in base alle conclusioni di Bonafede (1991).

Nel Capitolo 2 viene introdotta l'approssimazione di permeabilità nulla e vengono ricavate le soluzioni di interesse in regime conduttivo di temperatura. Vengono quindi graficati i risultati ottenuti per alcuni valori caratteristici dei parametri coinvolti.

Nel Capitolo 3 viene analizzato il caso di permeabilità elevata e sono ricavati i campi di temperatura e pressione rispettivamente in regime avvelativo e diffusivo. Vengono quindi graficati i risultati ottenuti per alcuni valori caratteristici dei parametri coinvolti.

---

<sup>1</sup>Rappresentativa di una regione alla base degli strati sedimentari recenti, posta a circa 500 m di profondità.

# Capitolo 1

## Equazioni della termo-poro-elasticità

### 1.1 Relazioni costitutive

Il ruolo dei fluidi interstiziali all'interno di rocce porose è stato spesso preso in considerazione in relazione a diversi fenomeni geofisici. A partire dal secondo decennio del 1900 furono sviluppate le prime relazioni costitutive per mezzi porosi ma fu solo con Rice & Cleary (1976) che ne fu data una formalizzazione completa per mezzi poro-elastici saturi di fluido. In seguito Garg & Kassoy (1981) descrissero le equazioni che governano il flusso di fluidi caldi all'interno di una matrice porosa. La trattazione di Rice e Cleary fu in seguito ripresa da McTigue (1986) che la generalizzò a processi non isotermitici. Le equazioni utilizzate in questo lavoro si riferiranno tuttavia a modelli semplificati per cui il coefficiente di espansione termica del mezzo saturo e la viscosità del fluido sono ritenuti costanti e la convezione è prodotta da condizioni al contorno costanti per la pressione e la temperatura. I simboli utilizzati nel seguito sono elencati in Tabella 1.1 con relative definizioni e unità di misura.

In presenza di fluidi mono-fase in un mezzo poroso l'equazione dell'energia può essere scritta (Garg & Kassoy (1981))

$$\rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_f \mathbf{v} \cdot \nabla T = k_T \nabla^2 T \quad (1.1)$$

dove la velocità di Darcy  $\mathbf{v}$  è collegata alla pressione tramite la legge di Darcy

$$\mathbf{v} = -\frac{k_f}{\mu} \nabla p \quad (1.2)$$

in cui  $p$  è l'eccesso di pressione dal valore idrostatico  $\rho_f g z$ . Comunque venga trasmesso il calore la pressione soddisfa la seguente equazione di diffusione (McTigue (1986))

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_f \nabla^2\right) \left(\sigma_{kk} + \frac{3}{B}p\right) = \kappa_f \epsilon_1 \nabla^2 T + \epsilon_2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3)$$

dove

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= G\alpha'_s \frac{4(1+\nu)}{3(1-\nu)} \\ \epsilon_2 &= GB\phi_0(\alpha_f - \alpha''_s) \frac{2(1+\nu)(1+\nu_u)}{3(\nu_u - \nu)} \end{aligned}$$

e  $\kappa_f$  è il coefficiente di diffusività idraulica

$$\kappa_f = \frac{k_f}{\mu} \left[ \frac{2GB^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9(1-\nu_u)(\nu_u - \nu)} \right]. \quad (1.4)$$

I termini  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , entrambi proporzionali ai coefficienti di espansione termica, hanno origini diverse. In particolare  $\epsilon_2$  è diverso da zero soltanto quando il coefficiente di espansione termica del fluido e quello della componente solida sono diversi: se  $\alpha_f$  è maggiore di  $\alpha''_s$ , infatti, il fluido contenuto all'interno dei pori subisce un'espansione maggiore rispetto a quella del mezzo solido determinando un aumento della pressione di poro. Per comprendere l'origine di  $\epsilon_1$  occorre osservare la (1.3): esso compare nel primo termine a secondo membro accoppiato al laplaciano della temperatura e contribuisce quindi ad un aumento di pressione solo in presenza di una variazione spaziale di  $T$ . Si può notare inoltre che  $\epsilon_1$  sarebbe diverso da zero anche nel caso in cui  $\alpha_f$  fosse uguale a  $\alpha''_s$ . L'origine di questo comportamento controintuitivo è di carattere termoelastico: si immagini per semplicità una porzione sferica di roccia in cui la temperatura diminuisce all'aumentare del raggio. In queste condizioni una corona sferica interna in espansione incontra resistenza da parte della corona esterna immediatamente adiacente che si espande meno. Questo determina degli sforzi diversi da zero anche nella situazione in cui non vi siano fluidi all'interno dei pori e un conseguente aumento della pressione di poro nel caso in cui la roccia sia satura.

A completare l'insieme di equazioni vi sono l'equazione di equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

e la relazione costitutiva tra deformazione, temperatura, pressione e sforzi

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)(1+\nu)} p \delta_{ij} \right] + \frac{\alpha'_s}{3} T \delta_{ij} \quad (1.5)$$

ovvero la relazione inversa

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = 2G \left( e_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} e_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)(1-2\nu)} p \delta_{ij} - \\ \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \alpha'_s T \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Infine il sistema è completato dalla relazione di compatibilità che, utilizzando la (1.5) e l'equazione di equilibrio fornisce

$$(1 + \nu)\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1 + \nu_u)} \left[ \frac{1 + \nu}{1 - \nu} p_{,kk} \delta_{ij} + p_{,ij} \right] + \frac{2G(1 + \nu)\alpha'_s}{3} \left[ \frac{1 + \nu}{1 - \nu} T_{,kk} \delta_{ij} + T_{,ij} \right] = 0 \quad (1.7)$$

dove  $f_{,j} = \partial f / \partial x_j$ .

## 1.2 Simmetria sferica

Come accennato nell'Introduzione considereremo il caso di una sorgente sferica circondata da una matrice TPE illimitata (Figura 1.1). Occorre dunque riscrivere le equazioni fondamentali facendo uso delle coordinate sferiche: riprendendo i risultati ottenuti da Bonafede (1991) assumendo che le condizioni iniziali e al contorno consentano di limitare le variabili spaziali alla sola distanza  $r$  da un centro di simmetria si ottiene per l'equazione di equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (1.8)$$

mentre l'equazione di compatibilità si riduce a

$$(\sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}) + \beta p + \epsilon_1 T = C(t) \quad (1.9)$$

dove

$$\beta = \frac{6(\nu_u - \nu)}{B(1 - \nu)(1 + \nu_u)}$$

e  $C(t)$  è una funzione arbitraria dipendente dalle condizioni al contorno. La pressione si scopre soddisfare la seguente legge di diffusione

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa_f \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] p = \frac{S}{T_a} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial C'(t)}{\partial t}. \quad (1.10)$$

in cui

$$S = T_a(\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{B(1 + \nu_u)(1 - \nu)}{3(1 - \nu_u)(1 + \nu)} \quad (1.11)$$

e

$$C'(t) = \frac{B(1 + \nu_u)(1 - \nu)}{3(1 - \nu_u)(1 + \nu)} C(t).$$

Inserendo la (1.9) nella (1.8) l'equazione di equilibrio può essere risolta per  $\sigma_{rr}$  ottenendo

Simbolo	Definizione	Unità di misura
$a$	raggio della regione sorgente	m
$B$	parametro di Skempton, $p = \frac{1}{3}B\sigma_{kk}$ (in drenaggio impedito)	
$c_m$ ( $c_f$ )	calore specifico del mezzo (del fluido)	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
$C(t)$	funzione dipendente dalle condizioni al contorno	Pa
$e_{ij}$	tensore di deformazione	
$g$	accelerazione di gravità	$\text{ms}^{-2}$
$G$	rigidità del mezzo	Pa
$k_f$	permeabilità del mezzo	$\text{m}^2$
$k_T$	conducibilità termica del mezzo saturo	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$p$	pressione del fluido in eccesso dal valore idrostatico	Pa
$p_a$	condizione al contorno per $p$ in $r = a$	Pa
$S$	termine sorgente di pressione	Pa
$t$	tempo trascorso dall'inizio della migrazione	t
$T$	temperatura del mezzo (uguale per il solido e per il fluido)	K
$T_a$	condizione al contorno per $T$ in $r = a$	
$\mathbf{v}$	flusso di fluido per unità di tempo (velocità di Darcy)	m/s
$\alpha_f$	coefficiente di espansione termica del fluido	$\text{K}^{-1}$
$\alpha'_s$	coefficiente di espansione termica della roccia saturo	$\text{K}^{-1}$
$\alpha''_s$	coefficiente di espansione termica della componente solida	$\text{K}^{-1}$
$\beta$	costante poro-elastica	
$\epsilon_1, \epsilon_2$	costanti termo-poro-elastiche	$\text{Pa/K}$
$\kappa_f$	coefficiente di diffusività idraulica	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$
$\mu$	viscosità del fluido	Pas
$\nu$ ( $\nu_u$ )	modulo di Poisson in drenaggio libero (impedito)	
$\rho_m$ ( $\rho_f$ )	densità del mezzo saturo (del fluido)	$\text{kg/m}^3$
$\sigma_{ij}$	sforzo nella matrice solida	Pa
$\sigma_a$ ( $\sigma_b$ )	condizione al contorno per $\sigma_{rr}$ in $r = a$ ( $r = b$ )	Pa
$\phi_0$	porosità della roccia nello stato di riferimento	

Tabella 1.1: Simboli, definizioni e unità di misura dei parametri impiegati nel testo.

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) C(t) - \sigma_a \frac{a^3}{r^3} - \frac{\beta}{r^3} \int_a^r r'^2 p(r', t) dr' - \frac{\epsilon_1}{r^3} \int_a^r r'^2 T(r', t) dr' \quad (1.12)$$

dove si è posto  $\sigma_{rr} = -\sigma_a$  in  $r = a$ . Nel limite da noi considerato in cui  $r$  si estende fino all'infinito è lecito porre  $C(t) = 0$  a causa dell'annullarsi, per  $r \rightarrow \infty$ , di sforzi, temperatura e pressione, semplificando notevolmente i calcoli. Inserendo la (1.12) nella (1.9) è possibile quindi ricavare  $\sigma_{\theta\theta}$ .

Le equazioni cercate per la temperatura e la pressione diventano quindi

$$\rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_f c_f \frac{k_f}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} = k_T \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) T \quad (1.13)$$

e

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa_f \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] p = \frac{S}{T_a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.14)$$

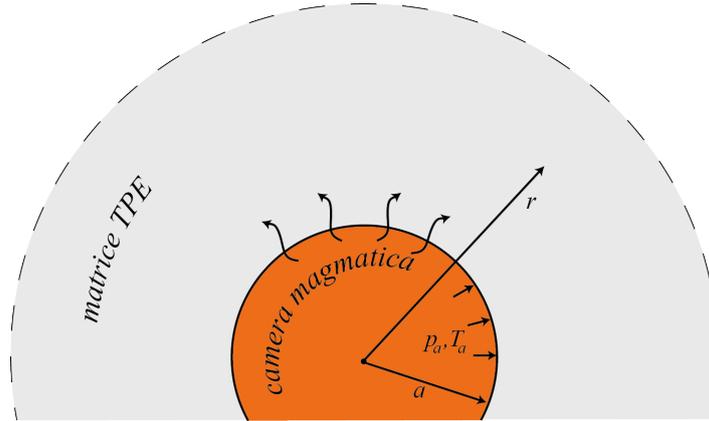


Figura 1.1: Camera magmatica sferica che degassa verso la matrice TPE circostante estesa all'infinito.

### 1.3 Coulomb Failure Function

Un materiale che si deforma elasticamente fino al raggiungimento di un punto di rottura è detto materiale elastico-fragile. Uno dei parametri più semplici utilizzati per stabilire la soglia di frattura di un mezzo è la Coulomb Failure Function, definita come

$$CFF = |\tau| + f(\sigma_n + p) \quad (1.15)$$

dove  $\tau$  e  $\sigma_n$  sono rispettivamente le trazioni totali di taglio e normale,  $p$  è la pressione di poro e  $f$  è il coefficiente di attrito. Il materiale si rompe quando la  $CFF$  raggiunge un valore limite  $\sigma_{th}$  detto *resistenza alla frattura* (*strength*). Generalmente però in geofisica le condizioni iniziali di sforzo sono mal vincolate o addirittura sconosciute (dipendono dalla complessa storia precedente della regione in studio) e quindi ci concentriamo sullo studio delle variazioni degli sforzi dovuti ad un processo in atto (noto più accuratamente) studiando la

$$\Delta CFF = |\Delta\tau| + f(\Delta\sigma_n + \Delta p) \quad (1.16)$$

dovuta alle variazioni  $\Delta\tau$  della trazione di taglio,  $\Delta\sigma_n$  della trazione normale e  $\Delta p$  della pressione di poro dalla situazione di equilibrio. Vale la pena osservare come valori positivi di  $\tau$  tendano a destabilizzare le faglie mentre una diminuzione di  $\sigma_n$  (e quindi un aumento della compressione, dal momento che  $\sigma_n$  è negativo se compressivo) risulti in una stabilizzazione delle faglie che vengono bloccate dall'attrito. L'aumento di pressione di poro  $p$ , al contrario, tende a contrastare la trazione normale agente sulle faglie facilitandone lo sbloccamento. Secondo il criterio di Coulomb, dunque, valori positivi di  $\Delta CFF$  avvicinano il mezzo alle condizioni di frattura.

Per il calcolo di  $\tau$  e  $\sigma_n$  utilizziamo il sistema di riferimento locale rappresentato in Figura 1.2, ottenendo

$$\tau = \sigma_{z'x'} = \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) \sin 2\delta \quad (1.17)$$

e

$$\sigma_n = \sigma_{z'z'} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \cos 2\delta \quad (1.18)$$

dove  $\delta$  è l'angolo di immersione o dip, ossia l'angolo fra la verticale e la normale alla superficie di faglia. Il massimo valore della  $\Delta CFF$  è trovato per le *optimally oriented faults*, che soddisfano  $\tan 2\delta = -\frac{1}{f}$  in ambiente distensivo e  $\tan 2\delta = \frac{1}{f}$  in ambiente compressivo. Essendo inoltre  $0 < 2\delta < \pi$  otteniamo che  $\delta = \frac{1}{2}(\pi - \arctan \frac{1}{f})$  in ambiente distensivo e  $\delta = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{f}$  in ambiente compressivo.

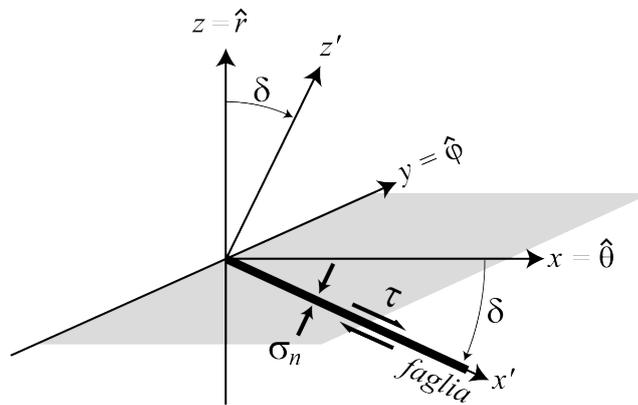


Figura 1.2: Sistema di riferimento locale utilizzato per calcolare la  $\Delta CFF$  nei punti al di sopra della sorgente.

## Capitolo 2

# Il caso di permeabilità nulla

### 2.1 Temperatura e pressione

La migrazione di fluidi all'interno di mezzi porosi è fortemente influenzata da un lato dalle caratteristiche delle rocce stesse, dall'altro da quelle dei fluidi considerati (parzialmente raccolte in Tabella 2.2). La permeabilità dei materiali, in particolare, risulta essere un parametro fondamentale per distinguere i casi di maggiore interesse fisico. Consideriamo innanzitutto la situazione limite in cui la permeabilità  $k_f$  del mezzo è abbastanza bassa da poter essere considerata nulla nel calcolo delle funzioni di interesse. In tal caso la (1.13) e la (1.14) si riducono al sistema

$$\begin{cases} \rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} = k_T \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) T \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{S}{T_a} \frac{\partial T}{\partial t} \end{cases} \quad (2.1)$$

dove abbiamo trascurato i termini dipendenti da  $k_f$ . Osserviamo che la prima della (2.1) non è altro che l'equazione di conduzione del calore, che dobbiamo risolvere nell'approssimazione di sfera infinita. Carslaw & Jaeger (1959) forniscono la soluzione per una regione infinita limitata internamente da una sfera di raggio  $r = a$ . Supponendo nulla la temperatura iniziale e costante la temperatura alla superficie  $T_a$  abbiamo

$$T = \frac{a}{r} T_a \operatorname{erfc} \left( \frac{r - a}{2\sqrt{kt}} \right) \quad (2.2)$$

dove si è introdotta la diffusività termica  $k = \frac{k_T}{\rho_m c_m}$ . Per comodità riscaliamo le variabili nel seguente modo

$$\begin{cases} r \rightarrow r' = \frac{r}{a} \\ t \rightarrow t' = \frac{kt}{a^2} \end{cases} \quad (2.3)$$

in cui  $\tau_T = \frac{a^2}{k}$  rappresenta il tempo caratteristico di diffusione termica. In questo modo la (2.2) assume la forma semplificata

$$T' = \frac{1}{r'} \operatorname{erfc} \left( \frac{r' - 1}{2\sqrt{t'}} \right) \quad (2.4)$$

dove abbiamo posto  $T' = \frac{T}{T_a}$ .

La seconda delle (2.1) può essere risolta notando la proporzionalità tra le due derivate temporali. Attraverso l'approssimazione di permeabilità nulla abbiamo tuttavia eliminato le derivate spaziali dalla (1.14), il che ci impedisce di imporre delle condizioni al contorno per  $p$  in  $r = a$ . La soluzione diventa dunque

$$p = p_0 + \frac{S}{T_a} T = p_0 + \frac{S a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r - a}{2\sqrt{kt}} \right) \quad (2.5)$$

dove  $p_0$  è la pressione iniziale di poro (che può essere lecitamente inglobata in  $p$ , dal momento che siamo interessati alle variazioni rispetto alla situazione iniziale). Il valore di  $p$  in  $r = a$  può essere quindi calcolato attraverso la (2.5), ottenendo  $p(a) = S$ , con  $S$  che dipende da  $T_a$  (equazione (1.11)) e da materiale e fluido considerati, come mostrato in Tabella 2.2. Il parametro  $S$  può essere dunque preso come scala di pressione per il caso di permeabilità nulla e rappresenta il limite superiore della pressione indotta dopo che la sorgente è entrata in contatto con la matrice.

Analogamente a quanto fatto per la (2.2) riscaldiamo le variabili ottenendo infine

$$p' = \frac{1}{r'} \operatorname{erfc} \left( \frac{r' - 1}{2\sqrt{t'}} \right) \quad (2.6)$$

dove abbiamo posto  $p' = \frac{p}{S}$ . In virtù dell'analogia formale tra la (2.4) e la (2.6) l'andamento di  $T'$  e quello di  $p'$  sono stati rappresentati entrambi in Figura 2.1.

## 2.2 Tensore di sforzo

Torniamo ora alle variabili dimensionali  $r$  e  $t$  e poniamoci nella situazione (I) descritta nell'Introduzione, i cui parametri sono raccolti in Tabella 2.2. Inserendo la (2.2) e la (2.5) nella (1.12) ricaviamo la componente radiale del tensore di sforzo

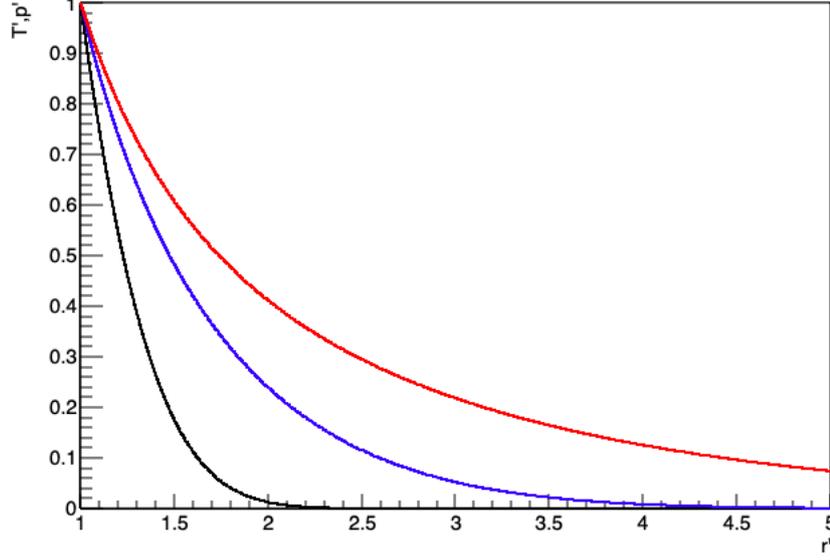


Figura 2.1:  $T'$  e  $p'$  in funzione di  $r'$  per valori di  $t$  pari a  $0.1\tau_T$  (curva nera),  $1\tau_T$  (curva blu) e  $10\tau_T$  (curva rossa).

$$\sigma_{rr} = -\sigma_a \frac{a^3}{r^3} - \left( \frac{\beta S a}{r^3} + \frac{\epsilon_1 a T_a}{r^3} \right) \times \left[ kt \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) - \frac{(r+a)\sqrt{kt} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4kt}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{kt}}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (2.7)$$

mentre  $\sigma_{\theta\theta}$  (il cui risultato esplicito, particolarmente lungo, è riportato in Appendice A) si ricava tramite la (1.9) da

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\beta p + \epsilon_1 T + \sigma_{rr}}{2}. \quad (2.8)$$

Notiamo come  $\sigma_a$  rappresenti in valore assoluto lo sforzo applicato in  $r = a$ : ricordando di non aver potuto imporre condizioni al contorno per  $p$  assumiamo che  $\sigma_a$  sia pari ad un valore di pressione tipico dell'interno della camera magmatica che chiameremo, solo per coerenza con quanto sarà fatto nel prossimo capitolo,  $p_a$ . Sottolineiamo inoltre come il termine  $-\sigma_a \frac{a^3}{r^3}$  presente nella (2.7) rappresenta l'espressione di  $\sigma_{rr}$  nella situazione in cui  $T_a = 0$  e gli sforzi siano interamente dovuti al contributo di  $\sigma_a$ .

	$0.1\tau_T$	$1\tau_T$	$10\tau_T$
$r_{tr}$	1330.35 m	1514.13 m	1642.75 m

 Tabella 2.1: Valori di  $r_{tr}$  per tre diversi istanti temporali.

A questo proposito è opportuno precisare che il problema del degassamento della camera magmatica è aperto a più soluzioni in base alla storia precedente della regione in esame. In particolare distinguiamo due casi:

- (i) il magma in  $r < a$  si trovava lì già da tempo in una situazione di equilibrio e in  $t = 0$  si verifica un degassamento che produce aumenti di  $p$  e  $T$ ;
- (ii) sia l'arrivo del magma che il degassamento si verificano in  $t = 0$ .

Nella presente trattazione consideriamo di trovarci nella situazione (i) e dunque non includeremo nei grafici il termine  $-\sigma_a \frac{a^3}{r^3}$ , pur mantenendolo nelle espressioni matematiche per questioni di chiarezza e completezza.

Osservando i grafici di  $\sigma_{rr}$  e  $\sigma_{\theta\theta}$  mostrati in Figura 2.2 notiamo come vi è una regione interna in cui  $\sigma_{zz}$  (cioè  $\sigma_{rr}$  in  $\theta = 0$ ) è maggiore di  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  ( $= \sigma_{\theta\theta}$ ) e una regione esterna in cui  $\sigma_{zz}$  è minore. Nella regione interna i meccanismi di fagliazione favoriti sono inversi, nella regione esterna sono normali. Sarebbe necessario, per le considerazioni sull'angolo di dip, vedere come la transizione fra i due regimi cambia nel corso del tempo, risolvendo  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$  per  $r$ . Per semplicità di trattazione ci limiteremo tuttavia a mostrare in Tabella 2.1 i valori di  $r$  per cui avviene la transizione ( $r_{tr}$ ) nei tre diversi istanti temporali per i quali sono stati graficati  $\sigma_{rr}$  e  $\sigma_{\theta\theta}$  in Figura 2.2.

## 2.3 Coulomb Failure Function

Per ricavare  $\tau$  e  $\sigma_n$  inseriamo la (2.8) rispettivamente nella (1.17) e nella (1.18) ottenendo

$$\tau = -\frac{\beta p + \epsilon_1 T + 3\sigma_{rr}}{4} \sin 2\delta \quad (2.9)$$

e

$$\sigma_n = -\frac{\beta p + \epsilon_1 T - \sigma_{rr}}{4} + \frac{\beta p + \epsilon_1 T + 3\sigma_{rr}}{4} \cos 2\delta \quad (2.10)$$

dove  $T$  e  $p$  sono date dalle (2.2) e (2.5) e  $\sigma_{rr}$  è definito nella (2.7). Inserendo quindi la (2.9) e la (2.10) all'interno della (1.16) otteniamo l'espressione della Coulomb Failure Function per il caso di permeabilità nulla, mostrata in Figura 2.3. Osserviamo in particolare che, per  $f = 0$  la  $\Delta CFF$  varia a causa della variazione dello sforzo di taglio prodotto dall'aumento di  $p$  e  $T$ .

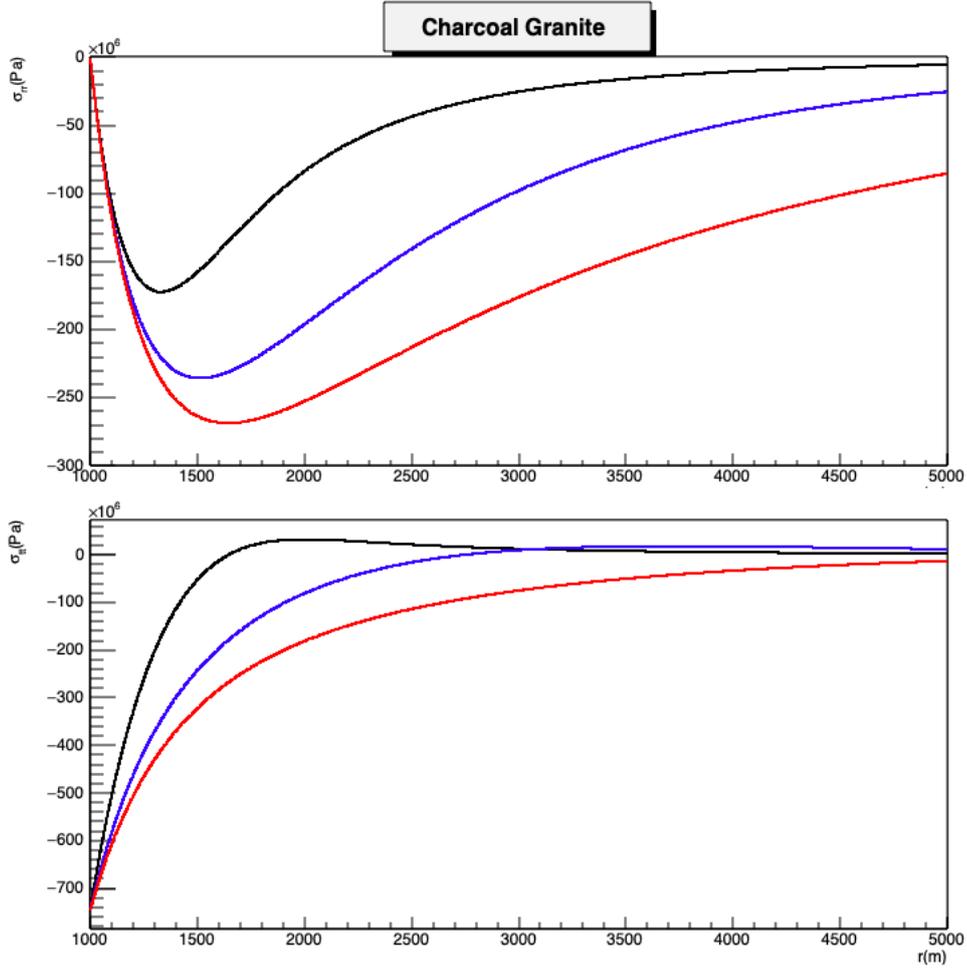


Figura 2.2: In alto:  $\sigma_{rr}$  in funzione di  $r$  per valori di  $t$  pari a  $0.1\tau_T$  (curva nera),  $1\tau_T$  (curva blu) e  $10\tau_T$  (curva rossa). In basso:  $\sigma_{\theta\theta}$  in funzione di  $r$  per gli stessi valori di  $t$ .

Le curve subiscono in  $r = r_{tr}$  un cambiamento di pendenza dovuto per  $f = 0$  al comportamento di  $|\tau|$  e per  $f > 0$  anche alla transizione ad un diverso valore di  $\delta$  pur non presentando discontinuità, per la seguente ragione: la transizione si verifica quando si passa da  $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{rr} < \sigma_{\theta\theta}$  il che avviene, per la (2.8), quando  $\beta p + \epsilon_1 T = -3\sigma_{rr}$ , dato che tutte le funzioni in gioco sono continue (nel caso di permeabilità nulla) e quindi, per la (2.9) e (2.10), quando  $\tau = 0$  e  $\sigma_n = \sigma_{rr}$  e in tal caso sia  $\tau$  che  $\sigma_n$  sono indipendenti da  $\delta$ . Di conseguenza il valore della  $\Delta CFF$  non cambia attraverso la transizione anche se  $\delta$  cambia con il suo complementare. Notiamo inoltre come per  $f > 0$   $\sigma_n$  tende a spostare la  $\Delta CFF$  verso valori negativi nei pressi di  $r_{tr}$ ,

dove il contributo di  $\tau$  è meno significativo.

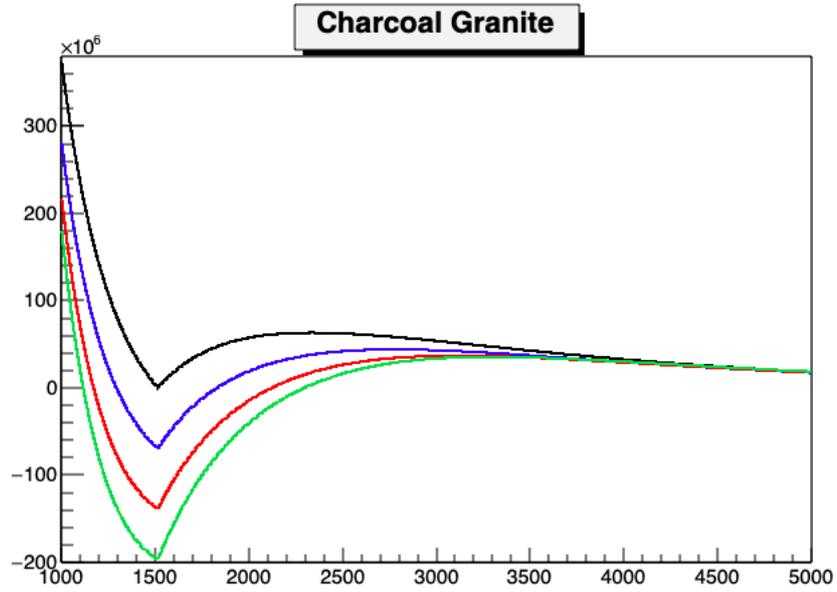


Figura 2.3:  $\Delta CFF$  in funzione di  $r$  per  $t = \tau_T$  e valori di  $f$  pari a 0 (curva nera), 0.3 (curva blu), 0.6 (curva rossa), 0.85 (curva verde).

Parametro	Charcoal granite	Berea Sandstone	Unità di misura
$a$	$10^3$	$10^3$	m
$k$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$
$k_f$	$10^{-19}$	$1.9 \cdot 10^{-13}$	$\text{m}^2$
$\kappa_f(\text{I})$	$4 \cdot 10^{-5}$	8.39	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$
$\kappa_f(\text{II})$	$6.4 \cdot 10^{-6}$	1.35	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$
$\mu(\text{I})$	$8 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
$\mu(\text{II})$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
$S(\text{I})$	$10^7$	$10^7$	Pa
$S(\text{II})$	$10^7$	$10^7$	Pa
$G$	$1.8 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^9$	Pa
$\alpha'_s$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$\text{K}^{-1}$
$\nu$	0.27	0.2	
$\nu_u(\text{I})$	0.28	0.26	
$\nu_u(\text{II})$	0.29	0.31	
$B(\text{I})$	0.23	0.3	
$B(\text{II})$	0.45	0.54	

Tabella 2.2: Valori tipici di alcuni parametri utilizzati nel testo. Il Charcoal Granite e la Berea Sandstone sono presi come esempi di materiali con permeabilità rispettivamente molto bassa e molto elevata.

## Capitolo 3

# Il caso di permeabilità elevata

### 3.1 Temperatura e pressione

Analizziamo ora la situazione in cui il mezzo considerato sia altamente permeabile. Per semplicità di trattazione ipotizziamo anche che la conducibilità termica  $k_T$  del materiale sia piccola in confronto a  $\rho_f c_f k_f \frac{\Delta p}{\mu}$ . In tal caso il termine avvevivo nella (1.13) risulta dominante rispetto a quello conduttivo, e quest'ultimo può essere trascurato ai fini dei calcoli. Per quanto riguarda la pressione, invece, riprendiamo i risultati di Bonafede & Mazzanti (1997) secondo cui i materiali altamente permeabili in trattazione di contorno pervio sono generalmente insensibili al termine di accoppiamento con la temperatura. In base a quanto detto la (1.13) e la (1.14) si riducono a

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa_f \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] p = 0 \\ \rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_f c_f \frac{k_f}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

La prima delle (3.1) è un'equazione di diffusione della stessa forma di quella risolta per la temperatura nel Capitolo 2. Crank (1975) fornisce la soluzione per pressione iniziale nulla e pressione costante al contorno

$$p = \frac{a}{r} p_a \operatorname{erfc} \left( \frac{r - a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) \quad (3.2)$$

che ha la stessa forma della (2.2). In analogia con quanto fatto nel Capitolo 2 riscaliamo quindi le variabili nel modo seguente

$$\begin{cases} r \rightarrow r' = \frac{r}{a} \\ t \rightarrow t' = \frac{\kappa_f t}{a^2} \end{cases} \quad (3.3)$$

dove  $\tau_F = \frac{a^2}{\kappa_f}$  è il tempo caratteristico di diffusione idraulica e definiamo  $p' = \frac{p}{p_a}$  in modo tale che la (3.2) diventi

$$p' = \frac{1}{r'} \operatorname{erfc} \left( \frac{r' - 1}{2\sqrt{t'}} \right). \quad (3.4)$$

E' evidente come questa equazione e la (2.6) ricavata nel caso di permeabilità nulla siano formalmente identiche. Esse, tuttavia, presentano delle differenze sostanziali: innanzitutto la (3.4) è normalizzata al valore della pressione al contorno  $p_a$  imposto al momento della risoluzione dell'equazione di diffusione, mentre ricordiamo che non era stato possibile imporre alcuna condizione al contorno per risolvere la seconda delle (2.1) e il parametro  $S$  al quale era stata normalizzata l'equazione era stato identificato solo in seguito come la pressione indotta dalla variazione di temperatura in  $r = a$ . In aggiunta la diffusione della pressione è dominata nel primo caso dalla diffusività termica, nel secondo da quella idraulica. Le scale dei tempi prese in considerazione sono di conseguenza completamente diverse:  $\tau_T \simeq 10^{12}$  s per i valori di  $k$  considerati nel Capitolo 1, mentre  $\tau_F \simeq 10^5$  s per i valori di  $\kappa_f$  considerati nel capitolo presente, da cui vediamo come  $\frac{\tau_T}{\tau_F} \simeq 10^7$ .

La seconda delle (3.1) è di difficile risoluzione. Possiamo tuttavia assumere, in base ai risultati di Bonafede & Mazzanti (1997), che la temperatura nella matrice si porti molto velocemente alla temperatura  $T_a$  fino ad  $r = r_{MAX}$  per via del fronte avvevivo e cali rapidamente a zero per  $r > r_{MAX}$ , comportamento che può essere approssimato con la seguente funzione gradino

$$T = \begin{cases} T_a & \text{se } r \leq r_{MAX} \\ 0 & \text{se } r > r_{MAX}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Il problema si riduce dunque alla ricerca della funzione  $r_{MAX}(t)$ . Per trovarla imponiamo che il calore trasmesso dal fronte che avanza a partire da  $r = a$  venga impiegato in parte per scaldare la zona compresa tra  $a$  ed  $r$  e in parte prosegua attraverso  $r$ . Questo si traduce formalmente come

$$\int_0^t \rho_f c_f T_a \left[ -4\pi a^2 \frac{k_f}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=a} \right] dt = \int_0^t \rho_f c_f T \left[ -4\pi r^2 \frac{k_f}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] dt + \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)(\rho_f c_f + \rho_m c_m) T_a. \quad (3.6)$$

Imponendo  $T = 0$  per  $r = r_{MAX}$  e risolvendo per  $r_{MAX}$  si trova

$$r_{MAX}(t) = \sqrt[3]{a^3 + \frac{3p_a a^3 \rho_f c_f}{\rho_f c_f + \rho_m c_m} \frac{k_f}{\mu} \left( \frac{t}{a^2} + \frac{2\sqrt{t}}{a\sqrt{\pi\sqrt{\kappa_f}}} \right)}. \quad (3.7)$$

Notiamo che, se  $\frac{\partial p}{\partial r}$  fosse negativo e costante ( $\frac{\partial p}{\partial r} = -q$ ), la seconda delle (3.1) rappresenterebbe un'onda progressiva di  $T$  con velocità  $V = \frac{\rho_f c_f k_f}{\rho_m c_m \mu} q$ .

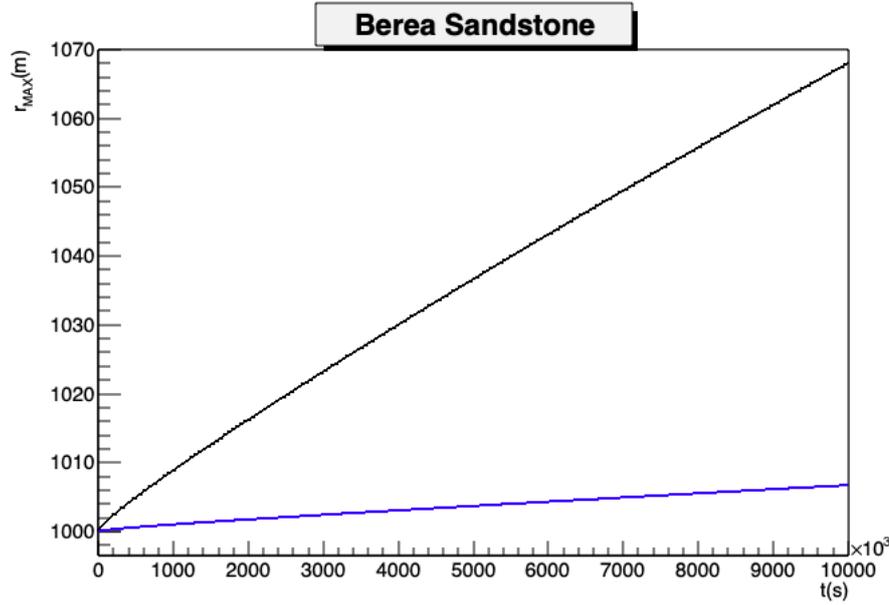


Figura 3.1:  $r_{MAX}$  in funzione del tempo per la Berea Sandstone nella situazione (I) (curva nera) e nella situazione (II) (curva blu).

In tal caso infatti la soluzione generale della seconda delle (3.1) sarebbe una arbitraria funzione  $f(r - Vt)$ . Se invece  $\frac{\partial p}{\partial r}$  fosse positivo, avremmo un'onda regressiva del tipo  $f(r + Vt)$ . Tale interpretazione è corretta se  $\frac{\partial p}{\partial r}$  è costante, ma può essere considerata una buona approssimazione se  $\frac{\partial p}{\partial r}$  è lentamente variabile con  $r$  e  $t$ . In tal caso la soluzione per  $T(r, t)$  può essere proposta nella forma

$$T = T_a H(r - Vt) \quad (3.8)$$

dove  $V$  è stata definita sopra e  $\frac{\partial p}{\partial r}$  va calcolata in  $r = r_{MAX}$ , risultando quindi lentamente variabile con  $r$  e  $t$ .

### 3.2 Tensore di sforzo

Inserendo la (3.2) e la (3.5) nella (1.12) ricaviamo la componente radiale del tensore di sforzo per  $r \leq r_{MAX}$

	$1\tau_F$	$10\tau_F$	$100\tau_F$
$r_{tr} = r_{MAX}$	1001.44 m	1008.92 m	1068.02 m

Tabella 3.1: Valori di  $r_{tr}$  per tre diversi istanti temporali.

$$\sigma_{rr} = -\sigma_a \frac{a^3}{r^3} - \frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r^3 - a^3) - \frac{\beta p_a a}{r^3} \times$$

$$\left( \kappa_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \quad (3.9)$$

e per  $r > r_{MAX}$

$$\sigma_{rr} = -\sigma_a \frac{a^3}{r^3} - \frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r_{MAX}^3 - a^3) - \frac{\beta p_a a}{r^3} \times$$

$$\left( \kappa_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \quad (3.10)$$

dove  $\sigma_a$  è lo sforzo impresso in  $r = a$  ed è dunque lecito porlo pari alla pressione al contorno  $p_a$ .

La componente  $\sigma_{\theta\theta}$  si ricava dalla (2.8) ed è riportata integralmente in Appendice A mentre  $\sigma_{rr}$  e  $\sigma_{\theta\theta}$  sono rappresentati in Figura 3.2. Come nel caso di permeabilità nulla si nota la transizione da un ambiente compressivo ad uno distensivo, che in questo caso risulta avvenire per  $r = r_{MAX}$ , con  $r_{MAX}$  definito dalla (3.5), i cui valori per gli istanti temporali studiati sono raccolti in Tabella 3.1.

### 3.3 Coulomb Failure Function

Analogamente al caso di permeabilità nulla le espressioni generali per  $\tau$  e  $\sigma_n$  sono date dalle (2.9) e (2.10). Inserendo quindi la (2.9) e la (2.10) all'interno della (1.16) otteniamo l'espressione della Coulomb Failure Function per il caso di permeabilità alta. In Figura 3.3 è rappresentata la  $\Delta CFF$  in funzione di  $r$  per diversi valori di  $f$ . La scelta di fissare il tempo ad un valore di  $100\tau_F$  è stata mossa puramente da necessità di carattere grafico in modo tale da rendere chiaro il comportamento della  $\Delta CFF$  prima di  $r_{MAX}$  pur coprendo nell'asse delle ascisse valori di  $r$  fino a  $1.5a$ .

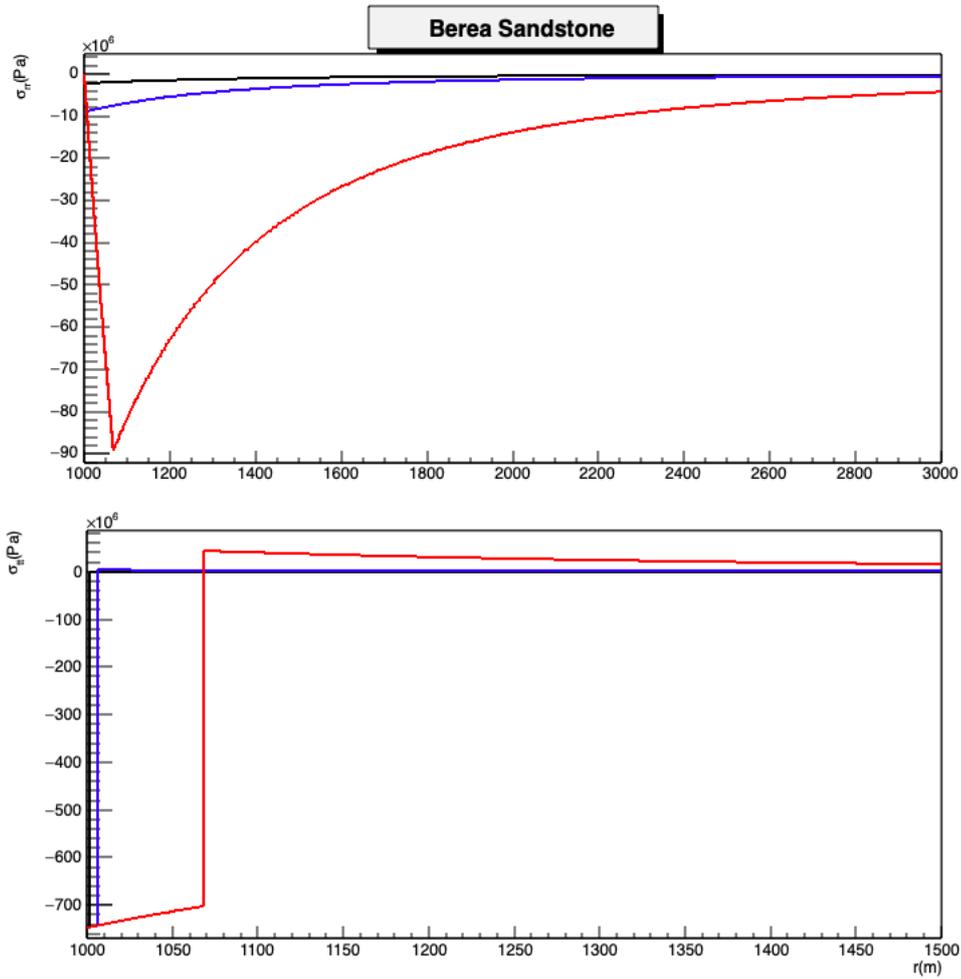


Figura 3.2: In alto:  $\sigma_{rr}$  in funzione di  $r$  per valori di  $t$  pari a  $1\tau_F$  (curva nera),  $10\tau_F$  (curva blu) e  $100\tau_F$  (curva rossa). In basso:  $\sigma_{\theta\theta}$  in funzione di  $r$  per gli stessi valori di  $t$ .

Notiamo che per il caso di permeabilità alta la  $\Delta CFF$  risulta decrescente al crescere di  $f$  per  $r < r_{MAX}$ , crescente per  $r > r_{MAX}$ . Inoltre è opportuno osservare come la discontinuità di  $\sigma_{\theta\theta}$  in  $r_{MAX}$  causata dall'assenza del termine  $\epsilon_1 T_a$  nella (A.3) determina una brusca transizione da una zona in cui  $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$  ad una in cui  $\sigma_{rr} < \sigma_{\theta\theta}$ , implicando che per il caso di permeabilità alta  $r_{tr} = r_{MAX}$ .

Osserviamo inoltre come i risultati conseguiti sono stati raggiunti lavorando nella situazione (I) descritta nell'Introduzione e i cui parametri caratteristici sono raccolti in Tabella 2.2. L'estensione al caso (II) comporta per il caso di permeabilità nulla un semplice shift della  $\Delta CFF$  e delle

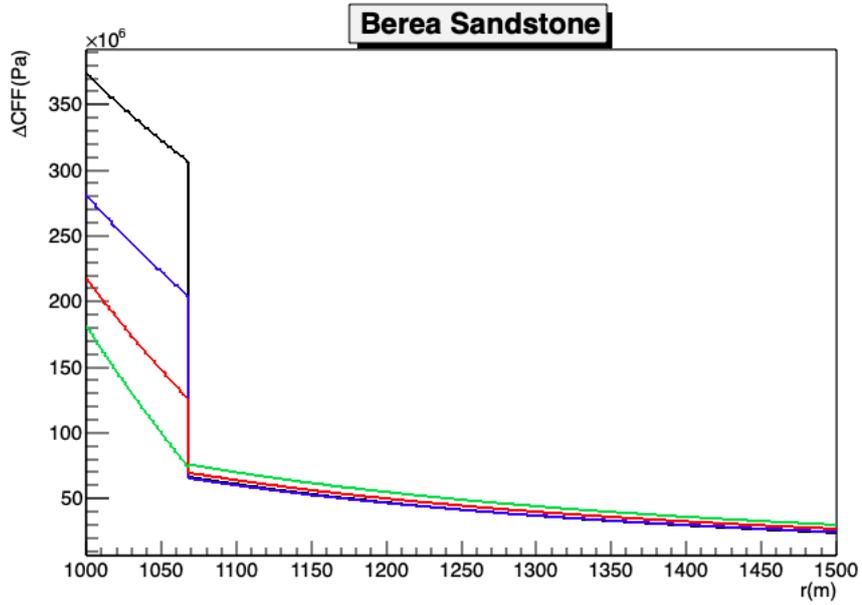


Figura 3.3:  $\Delta CFF$  in funzione di  $r$  per  $t = 100\tau_F$  e valori di  $f$  pari a 0 (curva nera), 0.3 (curva blu), 0.6 (curva rossa), 0.85 (curva verde).

altre funzioni di interesse, per il caso di permeabilità elevata anche una diminuzione di  $r_{tr}$  a parità di  $t$ .

$f$	$\delta$	
	Ambiente distensivo	Ambiente compressivo
0	$45^\circ$	$45^\circ$
0.3	$53.35^\circ$	$36.65^\circ$
0.6	$60.48^\circ$	$29.52^\circ$
0.85	$65.18^\circ$	$24.82^\circ$

Tabella 3.2: Angolo di dip  $\delta$  per diversi valori del coefficiente di attrito  $f$ .

# Conclusioni

In questo lavoro abbiamo presentato un'analisi delle condizioni di fratturazione, riassunte dalla Coulomb Failure Function, per un mezzo termo-poro-elastico sottoposto al degassamento di una camera magmatica in condizioni di permeabilità nulla e permeabilità elevata, lavorando in simmetria sferica. Per la modellizzazione della matrice TPE abbiamo utilizzato parametri tipici di due tipi di rocce, il Charcoal Granite e la Berea Sandstone, esemplificativi di materiali con permeabilità rispettivamente molto bassa e molto elevata e abbiamo considerato due diversi stati del fluido permeante, normale e supercritico. Abbiamo inoltre ipotizzato di trovarci nella situazione in cui il magma presente nella sorgente avesse raggiunto l'equilibrio molto tempo prima che avvenisse il degassamento.

Per il caso di permeabilità nulla affrontato nel Capitolo 2 abbiamo lavorato in regime conduttivo di temperatura, trovando una proporzionalità tra l'espressione della temperatura e quella della pressione, che risultano dunque avere la stessa forma. Il tensore di sforzo calcolato a partire da  $p$  e  $T$  è stato graficato nelle componenti  $\sigma_{rr}$  e  $\sigma_{\theta\theta}$ , grazie alle quali è stata indagata la transizione, negli istanti esaminati, da un ambiente compressivo ad uno distensivo. Infine è stata calcolata la  $\Delta CFF$ , che risulta diminuire all'aumentare del coefficiente di attrito e presenta un cambiamento di pendenza in corrispondenza della transizione sopracitata per via del cambiamento dell'angolo di dip e del comportamento di  $|\tau|$ .

Per il caso di permeabilità elevata affrontato nel Capitolo 3 abbiamo ricavato l'espressione della pressione in regime diffusivo e abbiamo ipotizzato che la temperatura sia costante fino ad un  $r_{MAX}(t)$  e pari a zero altrove per via del fronte avvevativo. Abbiamo inoltre proposto di interpretare il fronte di temperatura come un'onda progressiva nel caso in cui il gradiente di pressione sia considerabile costante. Il calcolo del tensore di sforzo ha rivelato una discontinuità in  $r_{MAX}$  per  $\sigma_{\theta\theta}$  dovuta alla discontinuità della temperatura mentre è emerso che la transizione da ambiente compressivo ad ambiente distensivo avviene in questo caso proprio per  $r_{MAX}$ . Anche la  $\Delta CFF$  risulta soffrire della suddetta discontinuità: in particolare per  $r < r_{MAX}$   $\Delta CFF$  diminuisce all'aumentare di  $f$  mentre per  $r > r_{MAX}$  il comportamento è invertito.

Inoltre è opportuno osservare che per entrambi i casi presi in esame, a

causa della forma delle soluzioni ottenute per la temperatura e la pressione, i risultati si sono dimostrati sostanzialmente indipendenti sia dalle condizioni del fluido permeante, sia dalla storia precedente della camera magmatica.

## Appendice A

### Espressione esplicita di $\sigma_{\theta\theta}$

Per il caso di permeabilità nulla affrontato nel Capitolo 2, inserendo la (2.2) e la (2.5) nella (2.8), si ha

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} = & -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta S a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) \right. \\ & + \frac{\epsilon_1 a T_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) - \sigma_a \frac{a^3}{r^3} - \left( \frac{\beta S a}{r^3} + \frac{\epsilon_1 a T_a}{r^3} \right) \times \\ & \left( kt \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) - \right. \\ & \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{kt} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4kt}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{kt}}{\sqrt{\pi}} \right) \right). \quad (\text{A.1})\end{aligned}$$

Analogamente, per il caso di permeabilità alta affrontato nel Capitolo 3, inserendo la (3.2) e la (3.5) nella (2.8), si ha per  $r \leq r_{MAX}$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} = & -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta a p_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \right. \\ & \left. \epsilon_1 T_a - \sigma_a \frac{a^3}{r^3} - \frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r^3 - a^3) - \frac{\beta p_a a}{r^3} \times \right. \\ & \left( \kappa_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right. \\ & \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \right). \quad (\text{A.2})\end{aligned}$$

e per  $r > r_{MAX}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta a p_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right. \\ & \left. \sigma_a \frac{a^3}{r^3} - \frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r_{MAX}^3 - a^3) - \frac{\beta p_a a}{r^3} \times \right. \\ & \left. \left( k_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \right). \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

## Appendice B

### Espressione esplicita di $\tau$ e $\sigma_n$

Per il caso di permeabilità nulla affrontato nel Capitolo 2, inserendo la (2.2), la (2.5) e la (1.12) nella (2.9) e nella (2.10) otteniamo

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{\sin 2\delta}{4} \left( \frac{\beta Sa}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) \right. \\ & + \frac{\epsilon_1 a T_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) - 3\sigma_a \frac{a^3}{r^3} - 3 \left( \frac{\beta Sa}{r^3} + \frac{\epsilon_1 a T_a}{r^3} \right) \times \\ & \left( kt \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) - \right. \\ & \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{kt} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4kt}\right) + 2a\sqrt{kt}}{\sqrt{\pi}} \right) \right). \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_n = & -\frac{1}{4} \left( \frac{\beta Sa}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) \right. \\ & + \frac{\epsilon_1 a T_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) + \sigma_a \frac{a^3}{r^3} + \left( \frac{\beta Sa}{r^3} + \frac{\epsilon_1 a T_a}{r^3} \right) \times \\ & \left( kt \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) - \right. \\ & \left. \frac{(r+a)\sqrt{kt} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4kt}\right) + 2a\sqrt{kt}}{\sqrt{\pi}} \right) + \frac{\cos 2\delta}{4} \left( \frac{\beta Sa}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) \right. \\ & + \frac{\epsilon_1 a T_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) - 3\sigma_a \frac{a^3}{r^3} - 3 \left( \frac{\beta Sa}{r^3} + \frac{\epsilon_1 a T_a}{r^3} \right) \times \\ & \left( kt \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{kt}} \right) - \right. \\ & \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{kt} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4kt}\right) + 2a\sqrt{kt}}{\sqrt{\pi}} \right) \right). \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Analogamente, per il caso di permeabilità alta affrontato nel Capitolo 3, inserendo la (3.2), la (3.5) e la (3.10) nella (2.9) e nella (2.10), si ha per  $r \leq r_{MAX}$

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{\sin 2\delta}{4} \left( \frac{\beta a p_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) \right. \\ & + \epsilon_1 T_a - 3\sigma_a \frac{a^3}{r^3} - 3\frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r^3 - a^3) - 3\frac{\beta p_a a}{r^3} \times \\ & \left. \left( \kappa_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \right) \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

mentre per  $r > r_{MAX}$

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{\sin 2\delta}{4} \left( \frac{\beta a p_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) \right. \\ & - 3\sigma_a \frac{a^3}{r^3} - 3\frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r_{MAX}^3 - a^3) - 3\frac{\beta p_a a}{r^3} \times \\ & \left. \left( \kappa_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \right). \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda  $\sigma_n$  si ha che per  $r \leq r_{MAX}$

$$\begin{aligned} \sigma_n = & -\frac{1}{4} \left( \frac{\beta a p_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \epsilon_1 T_a + \sigma_a \frac{a^3}{r^3} + \right. \\ & \frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r^3 - a^3) + \frac{\beta p_a a}{r^3} \times \left( \kappa_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \right. \\ & \left. \left. \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \right) + \frac{\cos 2\delta}{4} \left( \frac{\beta a p_a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \right. \\ & \epsilon_1 T_a - 3\sigma_a \frac{a^3}{r^3} - 3\frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r^3 - a^3) - 3\frac{\beta p_a a}{r^3} \times \\ & \left. \left( \kappa_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \right). \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

mentre per  $r > r_{MAX}$

$$\begin{aligned}
\sigma_n = & -\frac{1}{4} \left( \frac{\beta p_a a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \sigma_a \frac{a^3}{r^3} + \frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r_{MAX}^3 - a^3) + \right. \\
& \frac{\beta p_a a}{r^3} \times \left( \kappa_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right. \\
& \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \right) + \frac{\cos 2\delta}{4} \times \\
& \left( \frac{\beta p_a a}{r} \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - 3\sigma_a \frac{a^3}{r^3} - 3\frac{\epsilon_1 T_a}{3r^3} (r^3 - a^3) - 3\frac{\beta p_a a}{r^3} \times \right. \\
& \left( \kappa_f t \operatorname{erf} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right) - \right. \\
& \left. \left. \frac{(r+a)\sqrt{\kappa_f t} \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{4\kappa_f t}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \right) \right). \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

# Bibliografia

- Bonafede, M. (1991), 'Deformazione del suolo in aree vulcaniche: effetti della migrazione di fluidi caldi prodotti da una sorgente sferica', *Atti del X Convegno Nazionale GNGTS* **2**, 971–982.
- Bonafede, M. & Mazzanti, M. (1997), 'Hot fluid migration in compressible saturated porous media', *Geophys. J. Int.* **128**, 383–398.
- Carslaw, H. S. & Jaeger, J. C. (1959), *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, Oxford.
- Crank, J. (1975), *The Mathematics of Diffusion*, Oxford University Press, Oxford.
- Garg, S. K. & Kassoy, D. R. (1981), Convective heat and mass transfer in hydrothermal systems, *in* L. Rybach & L. Muffler, eds, 'Geothermal Systems: Principles and Case Histories', Wiley, New York.
- McTigue, D. F. (1986), 'Thermoelastic response of fluid-saturated porous rock', *J. Geophys. Res.* **91**, 9533–9542.
- Rice, J. R. & Cleary, M. P. (1976), 'Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents', *Rev. Geophys. Space Phys.* **14**, 227–241.