

*I. I. МАРЧЕНКО, М. М. МАЛЬКО, І. Г. МАРЧЕНКО***КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЇ У ПОХИЛИХ ПРОСТОРОВО-ПЕРІОДИЧНИХ ПОТЕНЦІАЛАХ**

Нещодавно було показано, що в істотно нерівноважних системах коефіцієнт дифузії може вести себе немонотонно з температурою. Одним із прикладів таких систем з аномальною температурною залежністю є рух броунівських часток в просторово-періодичних структурах. Метою статті було дослідження зміни температурної залежності дифузії в недодемпфованих системах з низьким коефіцієнтом тертя. В роботі методами комп'ютерного моделювання вивчено зміна коефіцієнта дифузії частинок в широкому діапазоні температур в нахилених просторово-періодичних потенціалах для різних значень коефіцієнта тертя. Показано, що дифузія досягає максимуму при певній величині зовнішньої сили. Її значення залежить від величини коефіцієнта тертя. Показано, що на відміну від звичайної залежності Аррениуса, в разі нахиленого періодичного потенціалу, максимальний коефіцієнт дифузії зростає, а не зменшується з пониженням температури експоненціальним чином. Встановлено, що така залежність характерна для всіх недодемпфованих систем. Показано, що для просторово-періодичних структур існує обмежена ділянка сил, в якому спостерігається зростання коефіцієнта дифузії зі зменшенням температури. Це область так званої температурно-аномальної дифузії (ТАД). Визначено ширина і положення області ТАД в залежності від коефіцієнта тертя  $\gamma$  і параметрів системи. Показано, що зі зменшенням  $\gamma$ , ширина області ТАД зменшується пропорційно  $\gamma$ . При цьому коефіцієнт дифузії в області ТАД, навпаки зростає  $\sim \gamma$ . Отримані дані про температурно-аномальної дифузії мають важливе значення для різних областей фізики і техніки та відкривають перспективи новітніх технологій управління процесами дифузії.

**Ключові слова:** дифузія, комп'ютерне моделювання, періодичні структури, рівняння Ланжевена, періодичні поля

*И. И. МАРЧЕНКО, М. Н. МАЛЬКО, И. Г. МАРЧЕНКО***КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ В НАКЛОННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ**

Недавно было показано, что в существенно неравновесных системах коэффициент диффузии может вести себя немонотонно с температурой. Одним из примеров таких систем с аномальной температурной зависимостью является движение броуновских частиц в пространственно-периодических структурах. Целью статьи было исследование изменения температурной зависимости диффузии в недодемпфированных системах с низким коэффициентом трения. В работе методами компьютерного моделирования изучено изменение коэффициента диффузии частиц в широком диапазоне температур в наклонных пространственно-периодических потенциалах для различных значений коэффициента трения. Показано, что диффузия достигает максимума при определенной величине внешней силы. Ее значение зависит от величины коэффициента трения. Показано, что в отличие от обычной зависимости Аррениуса, в случае наклонного периодического потенциала, максимальный коэффициент диффузии возрастает, а не убывает с понижением температуры экспоненциальным образом. Установлено, что такая зависимость характерна для всех недодемпфированных систем. Показано, что для пространственно-периодических структур существует ограниченный участок сил, в котором наблюдается рост коэффициента диффузии с уменьшением температуры. Это область так называемой температурно-аномальной диффузии (ТАД). Определены ширина и положение области ТАД в зависимости от коэффициента трения  $\gamma$  и параметров системы. Показано, что с уменьшением  $\gamma$ , ширина области ТАД уменьшается  $\sim \gamma$ . При этом коэффициент диффузии в области ТАД, наоборот возрастает пропорционально  $\gamma$ . Полученные данные о температурно-аномальной диффузии имеют важное значение для различных областей физики и техники и открывают перспективы создания новейших технологий управления процессами диффузии.

**Ключевые слова:** диффузия, компьютерное моделирование, периодические структуры, уравнения Ланжевена, периодические поля

*I. I. MARCHENKO, M. M. MALKO, I. G. MARCHENKO***COMPUTER SIMULATION OF DIFFUSION PROCESSES IN TILT SPATIO-PERIODIC POTENTIALS**

It was recently shown that in essentially nonequilibrium systems, the diffusion coefficient can behave nonmonotonically with temperature. One example of such systems with anomalous temperature dependence is the motion of Brownian particles in spatially periodic structures. The aim of the article was to study the change in the temperature dependence of diffusion in underdamped systems with a low coefficient of friction. In this paper, computer simulation methods are used to study the change in the diffusion coefficient of particles in a wide range of temperatures in oblique spatially periodic potentials for different values of the friction coefficient. It is shown that diffusion reaches a maximum at a certain external force. Its value depends on the coefficient of friction. It is shown that, in contrast to the usual Arrhenius dependence, in the case of an inclined periodic potential, the maximum diffusion coefficient increases while temperature is decreasing exponentially. It is established that such a dependence is common to all underdamped systems. It is shown that for spatially periodic structures there is a limited portion of forces in which an increase in the diffusion coefficient while decreasing temperature is observed. This is the area of the so-called temperature-anomalous diffusion (TAD). The width and position of the TAD region are determined depending on the friction coefficient  $\gamma$  and the system parameters. It has been shown that a decrease in  $\gamma$ , width TAD region decreases proportionally  $\gamma$ . In this case, the diffusion coefficient in the TAD region, on the contrary, increases  $\sim \gamma$ . The data obtained on the temperature and the anomalous diffusion are important for various fields of physics and engineering, and opens new prospects for a diffusion process control technology.

**Keywords:** diffusion, computer simulation, periodic structures, Langevin equations, periodic fields

**Вступ.** У останні роки спостерігається зростаючий інтерес до експериментального вивчення прискорення дифузії часток шляхом використання зовнішнього поля [1–4]. Змінюючи характеристики поля можна ефективно впливати на процеси дифузії. Це відкриває нові технологічні можливості керування дифузєю.

Перші теоретичні дослідження руху Броунівських часток у похилих періодичних потенціалах були

виконані Х. Ріскеном [5]. Було показано, що для недодемпфованого випадку важливим у поведінці ансамблю частинок є поява «локалізованих» та «бігучих» рішень. Х. Ріскеном були отримані вирази для рухливості частинок. У той же час поведінку коефіцієнту дифузії не було досліджено.

Це певною мірою пов'язано з тим що, що аналітичні методи рішення рівняння Фокера-Планка, які використовувалися авторами, погано пристосовані до

систем з малою дисипацією. Альтернативним способом вивчення процесів дифузії і транспорту частинок є пряме чисельне моделювання ансамблю частинок за допомогою стохастичних рівнянь Ланжевена. Ф. Марчезоні [6] було встановлено, що дифузія частинок в системах з малою дисипацією істотно зростає поблизу деякої критичної сили. Подальше вивчення дифузії під впливом постійної сили було пов'язано з роботами групи К. Лінденберг. У роботі [7] вони вперше показали, що в похилих періодичних потенціалах коефіцієнт дифузії може вести себе аномальним чином. При деякому значенні сили він зростає з пониженням температури  $T$ . Температурну залежність максимального коефіцієнта дифузії вони апроксимували ступеневою залежністю:  $D_{\max} \sim T^{-3.5}$ . Подальші дослідження [8] показали, що така апроксимація справедлива лише в дуже вузькому діапазоні температур. Було встановлено, що в недодемпфованих системах існує обмежений інтервал діючих сил, в якому коефіцієнт дифузії зростає з пониженням температури експоненціальним чином ( $D \sim \exp(|\varepsilon|/kT)$ ). Було показано, що фізичною причиною такого зростання є експоненціальне зростання кореляційного часу  $\tau_{\text{cor}}$  із зниженням температури. У [9] була побудована феноменологічна модель, що пояснює таку температурну залежність  $\tau_{\text{cor}}$ . Інтервал сил, в якому дифузія зростає зі зменшенням температури, був нами названий областю температурно-аномальної дифузії (ТАД) [10]. І. Соколов і Б. Лінднер [11], провівши чисельне моделювання для ряду різних значень коефіцієнтів тертя, підтвердили наші висновки [8, 9] про існування ТАД в обмеженому інтервалі прикладених сил (кордонах ТАД).

Однак, до теперішнього часу відсутні дані щодо посилення дифузії в області низьких значень коефіцієнтів тертя і температур. Метою даної роботи є дослідження залежності коефіцієнтів дифузії від температури і тертя методами комп'ютерного моделювання у похилих просторово-періодичних потенціалах.

**Методика моделювання.** Рух частинок на одновимірній решітці під дією зовнішньої сили  $F$  описується рівнянням Ланжевена:

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} - \gamma\dot{x} + F + \sqrt{2\gamma kT}\xi(t), \quad (1)$$

де  $t$  – час,  $x$  – координата частинки в одновимірній решітці,  $m$  – її маса,  $\gamma$  – коефіцієнт тертя і  $\xi(t)$  – білий Гаусів шум з одиничною інтенсивністю. Крапка зверху означає диференціювання по часу.

Потенційна енергія  $U$  частинки в одновимірній періодичній решітці дорівнює:

$$U(x) = -\frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right), \quad (2)$$

де  $a$  – постійна решітки, а  $U_0$  – висота потенційного бар'єру. Параметри використовуваного просторово-періодичного потенціалу були тими ж, що і в роботах [8,9]:  $U_0 = 0.08$  еВ,  $a = 2.0$  Å. Маса частинок відповідала масі водню і дорівнювала 1 атомній одиниці маси.

На рухому частку діє періодична сила з боку решітки:  $F_{\text{lat}} = -\frac{dU}{dx} = F_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$ . Величина  $F_0 = \frac{\pi}{a}U_0$

називається критичною силою [12, 13], відповідає мінімальній діючій силі, необхідній для подолання в в'язкому середовищі енергетичного бар'єру, що розділяє два сусідніх положення частинки на одновимірній решітці.

Стохастичні рівняння (1) – (2) для кожної частки вирішувалися чисельно методом Ейлера [14] з кроком по часу що становив менше 0.01 періоду власних малих коливань. Статистичне усереднення проводилося по ансамблю з кількістю частинок не менше  $N = 10^5$ . Початкові умови задавалися наступним чином: частка розміщувалася на початку координат і їй випадковим чином присвоювалася швидкість. Швидкість мала розподіл Максвелла по температурі. Для досягнення рівноваги як за швидкостями, так і за координатами, проводилася термалізація системи протягом  $10^4$  кроків по часу. Як показали розрахунки, після цього часу розподіл, як за координатами, так і за швидкостями ансамблю частинок не змінювалося. В процесі термалізації частки могли здійснювати стрибок в сусідні елементарні комірки одновимірної решітки. Для того щоб дифузія частинок походила з початку координат такі частинки переміщувалися в першу елементарну комірку шляхом трансляції на цілу кількість постійних решітки.

Коефіцієнт дифузії обчислювався по дисперсії в розподілі ансамблю частинок. Звичайна дифузія характеризується лінійною залежністю середньоквадратичного відхилення частинок у часі:

$$\langle \sigma^2 \rangle \propto \alpha t. \quad (3)$$

У разі реалізації особливих режимів дифузії ця залежність змінюється:

$$\langle \sigma^2 \rangle \propto \alpha t^\alpha. \quad (4)$$

При  $\alpha < 1$  говорять про субдифузію, а при  $\alpha > 1$  – про супердифузію. Як було показано раніше, в системах з низьким тертям особливі режими дифузії носять перехідний у часі характер [15, 16] і, після встановлення стаціонарного стану, дисперсія в розподілі часток описується стандартним виразом (1). На рис. 1 показано стандартний графік зміни дисперсії з часом ансамблю частинок під дією зовнішньої сили. З рисунку видно, що режим «звичайної» дифузії настає на великих проміжках часу. Таким чином, для коректного обчислення коефіцієнта дифузії необхідний досить великий проміжок часу протягом якого  $\langle \sigma^2 \rangle \propto \alpha t$ .

За визначенням в 1-мірній системі коефіцієнт дифузії дорівнює:

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2t}, \quad (5)$$

де дужки  $\langle \dots \rangle$  позначають усереднення по ансамблю. Для коректного обчислення коефіцієнта дифузії визначався час  $t_{\text{lin}}$  досягнення лінійної залежності дисперсії від часу. Коефіцієнт дифузії визначався лінійною апроксимацією дисперсії від часу при  $t > 100t_{\text{lin}}$ .

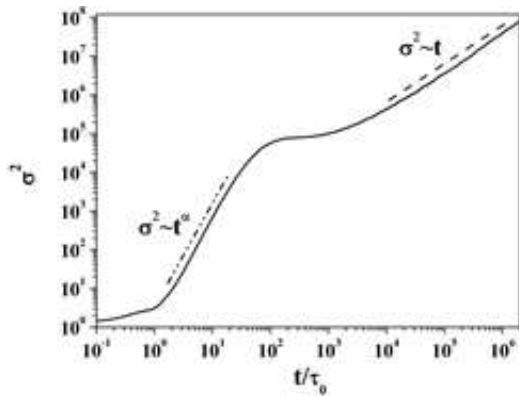


Рис. 1. Залежність дисперсії ансамблю частинок від часу.  
Діюча сила  $F = 0.11F_0$ ,  $\gamma = 3 \times 10^{-2}$ ,  $T' = 0.39$

Для зіставлення даних, отриманих в даній роботі, з результатами інших авторів, ми при поданні результатів моделювання використовували безрозмірні значення температури  $T'$  та коефіцієнтів тертя  $\gamma'$  [7, 12]:

$$T' = \frac{Tk}{U_0}; \gamma' = \gamma \frac{a}{\pi\sqrt{2mU_0}} \quad (6)$$

**Результати і обговорення.** Нами було проведено чисельне моделювання рівнянь (1) для різних значень коефіцієнтів тертя і температур. На рис. 2 представлено залежності коефіцієнтів дифузії від сили. Наведені три групи графіків, відповідають різним коефіцієнтам тертя. Літерне позначення кривих відповідає різним температурам. З груп графіків видно, що положення і ширина області ТАД ( $\Delta_{ТАД}$ ) залежить від  $\gamma'$ . Як впливає з рисунка, ці величини лінійно зменшуються з  $\gamma'$ . Детальний аналіз усіх графіків показує, що при цьому максимальне значення  $D$  лінійно зростає зі зменшенням  $\gamma'$ .

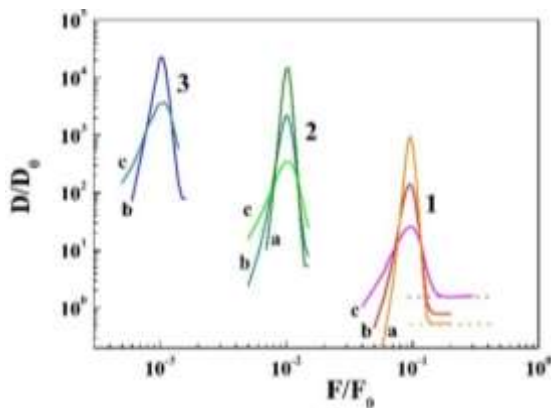


Рис. 2. Залежності коефіцієнтів дифузії від сили для різних  $\gamma' = 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $3 \cdot 10^{-3}$  та  $3 \cdot 10^{-4}$  – відповідно групи кривих 1–3.  
Температури  $T'_1 = 0.13$ ,  $T'_2 = 0.19$ ,  $T'_3 = 0.39$

Щоб зрозуміти фізичні причини такої поведінки проаналізуємо зміну функції розподілу часток за швидкостями  $n(V)$  зі зміною  $\gamma'$ . На рис. 3 наведено приклади графіки функції розподілу часток за швидкостями для двох значень сил ( $F_1 = 0.1F_0$  та  $F_2 = 0.01F_0$ ) при різних значеннях  $\gamma'$ , які так само відрізняються на порядок ( $\gamma' = 3 \cdot 10^{-3}$  та  $\gamma' = 3 \cdot 10^{-4}$ ).

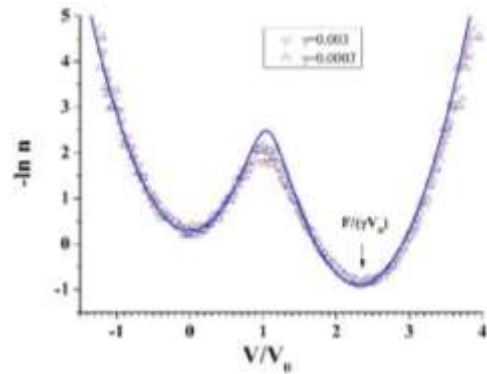


Рис. 3. Залежність функції розподілу часток за швидкостями для різних  $\gamma$  при значенні сили з максимальним  $D(F)$ .  $T' = 0.19$ ,  $\nabla - \gamma = 0.003$ ,  $\Delta - \gamma = 0.0003$ . Суцільною лінією нанесені розрахункові значення виходячи з моделі двух'ямний потенціалу [9]. Функція має мінімуми при  $V = 0$  і  $V = F/\gamma$

Як видно при використаних значеннях  $F$  і  $\gamma$  функції розподілу часток за швидкостями збігаються. На рисунку величина  $V_0 = \sqrt{U_0/m}$ .

З аналізу графіків, наведених на рис. 3 і інших графіків  $n(V)$ , слід, що при малих  $\gamma$  функція розподілу за швидкостями залежить тільки від співвідношення  $F/\gamma$ . Вперше це було відзначено в монографії Х. Рискена (див. рис. 11.22–11.22а [5]). З цього факту можна отримати скейлінгове залежності, як для рухливості, так і для коефіцієнтів дифузії. У стаціонарному випадку, якщо відома функція розподілу частинок за швидкостями  $n(V)$ , можна знайти рухливість частинок:  $\mu(F; \gamma) = \langle V \rangle(F; \gamma)/F$ , де  $\langle V \rangle(F; \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} V n(V; F, \gamma) dV$ . Оскільки  $n(V; F, \gamma) = n(V, F/\gamma)$ , то для рухливості має виконуватися співвідношення:

$$\gamma_1 \mu(F_1; \gamma_1) = \gamma_2 \mu(F_1 \gamma_2 / \gamma_1; \gamma_2) \quad (7)$$

На рис. 4 показані залежності  $\gamma\mu$  від безрозмірної величини  $f = F/(\gamma V_F)$  для різних значень  $\gamma$ . Величина  $V_F$  відповідає швидкості, при якій кінетична енергія частинки дорівнює половині енергетичного бар'єру  $U(F)$  для переходу її з одного положення з мінімальною потенційною енергією в сусіднє на одновимірній решітці. Збіг графіків  $\gamma\mu(\gamma, F/(\gamma V_F))$  для різних значень  $\gamma$  підтверджує те, що скейлінгове співвідношення (5) виконується для систем з низьким тертям. Аналогічно з рухливістю, скейлінгові залежності можуть бути отримані і для коефіцієнта дифузії. Відповідно до співвідношенням Кубо коефіцієнт дифузії може бути отриманий з автокореляційної функції [5]. У стаціонарному випадку коефіцієнт дифузії може бути розрахований наступним чином [17]:

$$D = \frac{1}{Q} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^V (u - \langle u \rangle) n(u) du \right]^2 / n(V) dV, \quad (8)$$

де  $Q$  – інтенсивність теплового шуму в просторі швидкостей. Аналогічно з рухливістю, виходячи з виду залежності  $n(V; F, \gamma) = n(V; F/\gamma)$ , легко показати, що

для коефіцієнтів дифузії в разі малого тертя виконується наступне співвідношення:

$$\frac{D_1(F_1; \gamma_1)}{\gamma_1} = \frac{D_2\left(\frac{F_1 \gamma_2}{\gamma_1}; \gamma_2\right)}{\gamma_2} \quad (9)$$

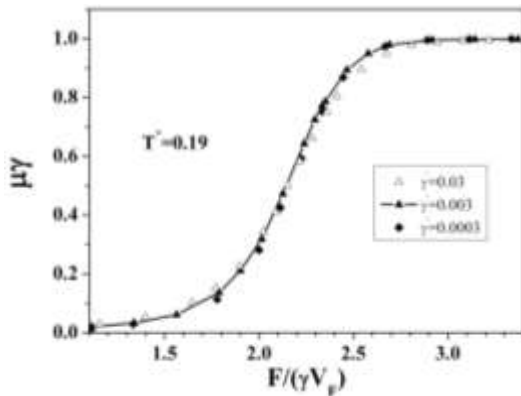


Рис. 4. Рухливість помножена на коефіцієнт тертя в залежності від величини  $F/(\gamma V_F)$  для різних  $\gamma$

На рис. 5 наведені графіки залежності коефіцієнтів дифузії від діючої сили для різних коефіцієнтів тертя, що відрізняються на порядок.

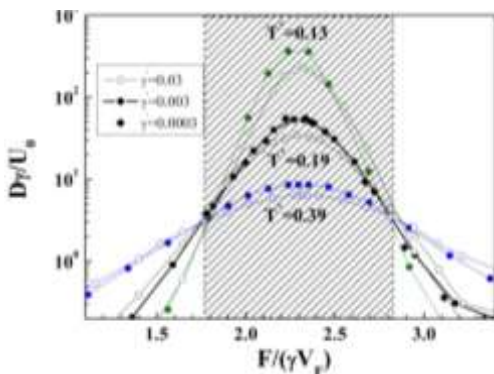


Рис. 5. Залежності коефіцієнтів дифузії від діючої сили для різних  $\gamma$

Моделювання проводилося при трьох різних температурах. Під дією сили змінюється величина бар'єра  $U(F)$ . Однак, зі зменшенням  $\gamma$ , величини сил, що обмежують область ТАД так само зменшуються і, відповідно, при прагненні коефіцієнта тертя до нуля  $U(F) \rightarrow U_0$ .

На рис. 5 область ТАД, в якій коефіцієнт дифузії зростає з пониженням температури, виділений штрихуванням. З графіків видно, що скейлінгове співвідношення (7) виконується з хорошою точністю. Невелике розходження в даних для  $\gamma' = 3 \cdot 10^{-2}$  і  $\gamma' = 3 \cdot 10^{-3}$  пов'язане з згадуваним вище зміною  $U(F)$ . Тому відмінності в графіках нівелюються зі зменшенням  $\gamma'$ . Як видно з графіків криві які відповідають  $\gamma' = 3 \times 10^{-3}$  і  $\gamma' = 3 \cdot 10^{-4}$  дійсно практично збігаються.

На рис. 6 показано поведінку максимального значення коефіцієнта дифузії  $D_{\max}$  в залежності від температури. Видно, що при низьких температурах

коефіцієнт дифузії експоненціально зростає зі зворотною температурою. Це, як було показано раніше [9], визначається зростанням кореляційного часу. Як випливає з наведених на рис. 6 даних при  $\gamma < 0.03$  графіки залежностей  $D\gamma/U_0$  не залежать від  $\gamma$ .

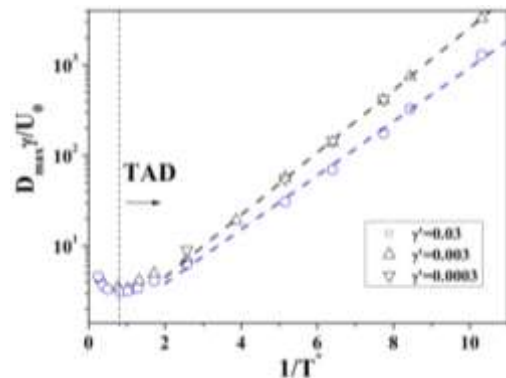


Рис. 6. Залежність коефіцієнта дифузії від зворотної температури в зоні ТАД:  $\gamma = 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $F/F_0 = 0,1$ . Стрілкою показаний інтервал температур в якому коефіцієнт дифузії зростає з пониженням температури

Таким чином, з аналізу даних комп'ютерного моделювання випливає, що при малих  $\gamma$  ширина області ТАД лінійно зменшується з коефіцієнтом тертя:  $\Delta F_{\text{TAD}} \approx \gamma V_F$ . Однак, максимальне значення  $D$  в цій області лінійно зростає зі зменшенням  $\gamma$ . Центр ТАД розташований поблизу сили  $F \approx 2\gamma V_F$ .

**Висновки.** У роботі досліджена дифузія частинок під дією зовнішніх сил в просторово-періодичних системах, що характеризуються малими значеннями коефіцієнта тертя  $\gamma$ . Показано, що у всіх недодемпфированих періодичних системах існує обмежена область температурно-аномальної дифузії (ТАД). У цій області сил коефіцієнт дифузії зростає з пониженням температури.

Визначено ширину та положення області ТАД в залежності від  $\gamma$ . Показано, що зі зменшенням  $\gamma$  ширина області зменшується  $\sim \gamma$ . При цьому коефіцієнти дифузії в цій області, навпаки зростають  $\sim \gamma$ .

Отримані залежності важливі для експериментального виявлення явища температурно-аномальної дифузії і подальшого його використання в різних галузях фізики, хімії та біології.

#### Список літератури

1. Lee S.-H., Grier D.G. Giant Colloidal Diffusivity on Corrugated Optical Vortices. *Phys. Rev. Lett.* 2006, vol. 96. P. 190601.
2. Tierno P., Reimann P., Johansen T.H., Sagués F. Giant transversal particle diffusion in a longitudinal magnetic ratchet. *Phys. Rev. Lett.* 2010, vol. 105. P. 230602.
3. Eshuis P., van der Weele K., Lohse D., van der Meer D. Experimental Realization of a Rotational Ratchet in a Granular Gas. *Phys. Rev. Lett.* 2010, vol. 104. P. 248001.
4. Pagliara S., Schwall C., Keyser U.F. Optimizing Diffusive Transport Through a Synthetic Membrane Channel. *Advanc. Mat.* 2013, vol. 25. P. 844.
5. Risken H. *The Fokker-Planck Equation and Methods of Solution and Applications*. Springer, 1989. 472 p.
6. Costantini G., Marchesoni F. Threshold diffusion in a tilted washboard potential. *Europhys. Lett.* 1999, vol. 48. P. 491–497.
7. Lindenberg K., Lacasta A.M., Sancho J.M., Romero A.H. Transport and diffusion on crystalline surfaces under external forces. *New Jour. of Phys.* 2005, vol. 7. P. 29.

8. Marchenko I.G., Marchenko I.I. Diffusion in the systems with low dissipation: Exponential growth with temperature drop. *Europhysics Letters*. 2012, vol. 100. P. 5005.
9. Marchenko I.G., Marchenko I.I., Zhiglo A.V. Particle transport in space-periodic potentials in underdamped systems. *Eur. Phys. Jour.* 2014, vol. B87. P. 10.
10. Marchenko I.G., Marchenko I.I., Zhiglo A.V. Enhanced diffusion with abnormal temperature dependence in underdamped space-periodic systems subject to time-periodic driving. *Phys. Rev.* 2018, vol. E97. P. 012121 (16 pp.).
11. Lindner B., Sokolov I.M. Giant diffusion of underdamped particles in a biased periodic potential. *Phys. Rev.* 2016, vol. E93. P. 042106.
12. Lindenberg K., Sancho J.M., Lacasta A.M., Sokolov I.M. Dispersionless Transport in a Washboard Potential *Phys. Rev. Lett.* 2007, vol. 98. P. 020602.
13. Reimann, P., Van den Broeck C., Linke H., Hänggi P., Rubí J. M., Pérez-Madrid A. Diffusion in tilted periodic potentials: Enhancement, universality, and scaling. *Phys. Rev.* 2002, vol. E65. P. 031104.
14. Кузнецов Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. Санкт-Петербург: Политехнический университет, 2007. 769 с.
15. Lindenberg K., Sancho J.M., Lacasta A.M., Sokolov I.M. Dispersionless Transport in a Washboard Potential. *Phys. Rev. Lett.* 2007, Vol. 98. P. 020602.
16. Marchenko I.G., Marchenko I.I. Anomalous Temperature Dependence of Diffusion in Crystals in Time-Periodic External Fields. *JETP Letters*. 2012, vol. 95, #3. P. 137–142.
17. Lindner B., Nicola E.M. Critical Asymmetry for Giant Diffusion of Active Brownian Particles. *Phys. Rev. Lett.* 2008, vol. 101. P. 190603 (4 pp.).
4. Pagliara S., Schwall C., Keyser U.F. Optimizing Diffusive Transport Through a Synthetic Membrane Channel. *Advanc. Mat.* 2013, vol. 25. P. 844.
5. Risken H. *The Fokker-Planck Equation and Methods of Solution and Applications*. Springer, 1989. 472 p.
6. Costantini G., Marchesoni F. Threshold diffusion in a tilted washboard potential. *Europhys. Lett.* 1999, vol. 48. P. 491–497.
7. Lindenberg K, Lacasta A.M., Sancho J.M., Romero A.H. Transport and diffusion on crystalline surfaces under external forces. *New Jour. of Phys.* 2005, vol. 7. P. 29.
8. Marchenko I.G., Marchenko I.I. Diffusion in the systems with low dissipation: Exponential growth with temperature drop. *Europhysics Letters*. 2012, vol. 100. P. 5005.
9. Marchenko I.G., Marchenko I.I., Zhiglo A.V. Particle transport in space-periodic potentials in underdamped systems. *Eur. Phys. Jour.* 2014, vol. B87. P. 10.
10. Marchenko I.G., Marchenko I.I., Zhiglo A.V. Enhanced diffusion with abnormal temperature dependence in underdamped space-periodic systems subject to time-periodic driving. *Phys. Rev.* 2018, vol. E97. P. 012121 (16 pp.).
11. Lindner B., Sokolov I.M. Giant diffusion of underdamped particles in a biased periodic potential. *Phys. Rev.* 2016, vol. E93. P. 042106.
12. Lindenberg K., Sancho J.M., Lacasta A.M., Sokolov I.M. Dispersionless Transport in a Washboard Potential *Phys. Rev. Lett.* 2007, vol. 98. P. 020602.
13. Reimann, P., Van den Broeck C., Linke H., Hänggi P., Rubí J. M., Pérez-Madrid A. Diffusion in tilted periodic potentials: Enhancement, universality, and scaling. *Phys. Rev.* 2002, vol. E65. P. 031104.
14. Kuznetsov D.F. *Stokhasticheskiye differentsyalnye uravneniya: teoriya y praktika chyslenmoho resheniya* [Stochastic differential equations: theory and practice of numerical solution]. Sankt-Peterburh. Polytekhnicheskyyi unyversytet, 2007.– 769 p.
15. Lindenberg K., Sancho J.M., Lacasta A.M., Sokolov I.M. Dispersionless Transport in a Washboard Potential. *Phys. Rev. Lett.* 2007, Vol. 98. P. 020602.
16. Marchenko I.G., Marchenko I.I. Anomalous Temperature Dependence of Diffusion in Crystals in Time-Periodic External Fields. *JETP Letters*. 2012, vol. 95, #3. P. 137–142.
17. Lindner B., Nicola E.M. Critical Asymmetry for Giant Diffusion of Active Brownian Particles. *Phys. Rev. Lett.* 2008, vol. 101. P. 190603 (4 pp.).

#### References (transliterated)

1. Lee S.–H., Grier D.G. Giant Colloidal Diffusivity on Corrugated Optical Vortices. *Phys. Rev. Lett.* 2006, vol. 96. P. 190601.
2. Tierno P., Reimann P., Johansen T.H., Sagués F. Giant transversal particle diffusion in a longitudinal magnetic ratchet. *Phys. Rev. Lett.* 2010, vol. 105. P. 230602.
3. Eshuis P., van der Weele K., Lohse D., van der Meer D. Experimental Realization of a Rotational Ratchet in a Granular Gas. *Phys. Rev. Lett.* 2010, vol. 104. P. 248001.

Надійшло (received) 21.03.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Марченко Ігор Іванович (Марченко Игорь Иванович, Marchenko Igor Ivanovych)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних систем, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3071-9169>; e-mail: igor.marchenko@hotmail.com

**Малько Максим Миколайович (Малько Максим Николаевич, Malko Maksym Mykolayovych)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», декан факультету комп'ютерних наук та програмної інженерії, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0125-2141>; e-mail: maxim\_malko@hotmail.com

**Марченко Іван Григорович (Марченко Иван Григорьевич, Marchenko Ivan Gryhorovych)** – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділом Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут» м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1341-4950>; e-mail: marchkipt@gmail.com