

УДК 623.552

КП

№ держреєстрації 0117U002250

Інв. №

**Міністерство освіти і науки України**

Сумський державний університет (СумДУ)

40007, Україна, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2, тел. (0542) 33 41 08

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи

д.ф.-м.н., професор

\_\_\_\_\_ А.М. Черноус  
\_\_\_.12.2018 р.

**ЗВІТ**

**ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ**

Створення комплексу універсальних моделей для оптимізації старту, польоту та приземлення реактивних снарядів для реактивних систем залпового вогню (проміжний)

Начальник НДЧ,

к.ф.-м.н., с.н.с.

Д. І. Курбатов

Керівник НДР,

д.ф.-м.н., проф.

В.В. Калашніков

2018

Рукопис закінчено 14 грудня 2018 року

Результати роботи розглянуто науковою радою, протокол № \_ від \_\_.12.2018 р.

## СПИСОК АВТОРІВ

Науковий керівник,  
п.н.с., д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

В. В. Калашніков  
(розділи 1, 2)

\_\_\_\_\_  
(дата)

Відповідальний виконавець,  
с.н.с., к.ф.-м.н, с.н.с.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

І. В. Коплик  
(реферат, вступ, розділи 1,  
2, висновки)

\_\_\_\_\_  
(дата)

Виконавець,  
с.н.с., к.ф.-м.н, доц.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

О. М. Шийко  
(реферат, вступ, розділи 1,  
2, висновки)

\_\_\_\_\_  
(дата)

Виконавець,  
п.н.с., к.т.н., проф.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

А. В. Васильєв  
(вступ, розділи 1, 2)

\_\_\_\_\_  
(дата)

Виконавець  
н.с., к.т.н.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

А. В. Скорик  
(розділ 1.11 – 1.21)

\_\_\_\_\_  
(дата)

Виконавець  
м.н.с., к.т.н.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

А. А. Обухов  
(підрозділ 1.1 – 1.10)

\_\_\_\_\_  
(дата)

Виконавець  
лаборант

\_\_\_\_\_  
(підпис) О. С. Соколов  
(підрозділ 2.3)

\_\_\_\_\_  
(дата)

## РЕФЕРАТ

Звіт (проміжний) про НДР: 110 с., 32 табл., 41 рис., 35 джерел.

РЕАКТИВНИЙ СНАРЯД, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, РЕАКТИВНА СИСТЕМА ЗАЛПОВОГО ВОГНЮ, ТУРБУЛЕНТНІСТЬ, АЕРОДИНАМІЧНІ СИЛИ.

Об'єкт дослідження – процес польоту літального апарату на активній та пасивній ділянках траєкторії. Об'єктом розробки є система диференціальних рівнянь просторового руху літального апарату.

Мета роботи – розробка математичної моделі спільного руху частин мобільної пускової установки з трубчатими направляючими, змонтованої на базі автомобільного шасі, і снарядів реактивної системи залпового вогню.

Метод дослідження – класичні методи сучасної динаміки, методи моделювання, та методи аеродинамічних розрахунків.

Створено розрахункову модель у вигляді системи диференціальних рівнянь просторового руху РС, призначену для розрахунків траєкторії руху та дослідження коливань снаряда. Рівняння відображають існуючу картину обтікання снаряда зустрічним потоком повітря, враховуючи всі можливі складові вітру та зберігаючи при цьому існуючі перехресні інерційні зв'язки. Вони придатні для використання при любых кутах нутації снаряда та придатні для чисельного інтегрування.

Розроблена придатна для практичного застосування методика розрахунку аеродинамічних коефіцієнтів складових аеродинамічного опору оперених тіл обертання за їх кресленнями при осесиметричному обтіканні і обтіканні під кутом атаки. За допомогою розробленої методики можливо обчислити аеродинамічні коефіцієнти опору тертя, опору тиску та донного опору снаряда в залежності від польотних чисел Маха та Рейнольдса при до-, транс- та надзвукових швидкостях.



## ЗМІСТ

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ .....	7
ВСТУП.....	8
<b>1 РОЗРОБКА МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ КОЕФІЦІЄНТІВ</b>	
<b>АЕРОДИНАМІЧНИХ СИЛ І МОМЕНТІВ РЕАКТИВНОГО НЕКЕРОВАНОГО</b>	
<b>СНАРЯДА ПО КРЕСЛЕННЯМ ЙОГО ЗОВНІШНІХ КОНТУРІВ.....</b>	
	<b>10</b>
1.1 Загальні положення розрахунку зовнішнього обтікання реактивного снаряда в широкому діапазоні чисел Маха .....	10
1.2 Особливості побудови просторової моделі для дослідження обтікання тіл обертання в широкому діапазоні чисел Маха.....	14
1.3 Загальні вимоги до розрахункової сітки при дослідженні зовнішнього обтікання повітряним потоком РС .....	18
1.4 Налаштування розрахункової сітки для дозвукового та трансзвукового обтікання.....	23
1.5 Налаштування розрахункової сітки для надзвукового обтікання .....	26
1.6 Загальні налаштування препроцесора Ansys CFX для дослідження обтікання РС повітряним потоком в заданому діапазоні чисел Маха .....	29
1.7 Загальні налаштування граничних умов .....	31
1.8 Налаштування препроцесора Ansys CFX для дослідження обтікання РС дозвуковим повітряним потоком ( $M=0\div 0,8$ ).....	31
1.9 Налаштування препроцесора Ansys CFX для дослідження обтікання РС трансзвуковим повітряним потоком ( $M=0,8\div 1,2$ ) .....	33
1.10 Налаштування препроцесора Ansys CFX для дослідження обтікання РС надзвуковим повітряним потоком ( $M=1,2\div 2,8$ ).....	36
1.11 Моделі турбулентності.....	37
1.12 Стандартна k-ε модель турбулентності .....	38
1.13 SST модель турбулентності .....	40
1.14 Обробка результатів комп'ютерного моделювання.....	42

1.15	Верифікація комп'ютерного моделювання. Зіставлення результатів розрахункового моделювання з законом аеродинамічного опору 1958 року з урахуванням коефіцієнту форми РС М-21ОФ.....	43
1.16	Особливості використання моделі переходу SST при моделюванні обтікання тіл повітряним потоком в льотних умовах.....	48
1.17	Вимоги до сітки при використанні моделі переходу SST $\gamma$ - $Re\theta$ .....	51
1.18	Верифікація розрахункової моделі РС в ANSYS CFX на основі льотних даних НАСА .....	52
1.19	Дозвуковий режим обтікання .....	54
1.20	Надзвуковий режим обтікання .....	63
1.21	Результати моделювання снаряда типу ОФ-21 при обтіканні його під кутом атаки $5^\circ$ .....	69
2	МОДЕЛЮВАННЯ АКТИВНОЇ І ПАСИВНОЇ ДІЛЯНОК ТРАЄКТОРІЇ ПРОСТОРОВОГО РУХУ РЕАКТИВНОГО СНАРЯДА.....	74
2.1	Аналіз останніх досліджень і публікацій .....	74
2.2	Призначення та зміст етапу роботи .....	77
2.3	Моделювання активної і пасивної ділянок траєкторії просторового руху реактивного снаряда .....	83
	ВИСНОВКИ.....	105
	ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	107

## СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

- ЛА — літальний апарат;  
РС — реактивний снаряд;  
РСЗВ — реактивна система залпового вогню.

## ВСТУП

Розробка розрахункових таблиць стрільби є необхідним етапом створення та впровадження нових зразків артилерійського озброєння. На цьому етапі покресленнях зовнішніх контурів снаряда та при відомих його початкових швидкостях проводяться розрахунки параметрів траєкторії: дальності польоту, висоти траєкторії, кута падіння, часу польоту та ін. Ці параметри при сучасному рівні розвитку балістичних досліджень розраховуються шляхом чисельного інтегрування систем диференційних рівнянь руху снаряда. Зрозуміло, що при цьому розрахункова та математична моделі руху снаряда повинні по можливості точніше враховувати аеродинамічні сили, що діють з боку повітря на снаряд. Цій вимозі відповідають так звані „повні” системи диференційних рівнянь. Вони містять рівняння, що описують рух центру мас снаряда та обертання снаряда відносно центру мас. В них враховуються всі можливі складові аеродинамічних сил та моментів [22], [23]. Розв’язання задачі зовнішньої балістики на підставі повної системи диференційних рівнянь руху снаряда ускладнюється тим, що потребує знання значної кількості коефіцієнтів аеродинамічних сил та моментів снаряда. Визначення цих коефіцієнтів навіть поодинці є складною науково-технічною задачею.

Аналіз сучасного стану теоретичних основ та практичних методів розрахунку аеродинамічного опору оперених осесиметричних тіл обертання показує, що традиційно відшуковуються чотири складові аеродинамічного опору: опір тертя корпусу тіла обертання, опір від підвищення тиску на головній частині корпусу тіла обертання, донний опір, опір, створюваний оперенням. Для всіх чотирьох складових опору в існуючій літературі пропонуються методи розрахунку відповідних аеродинамічних коефіцієнтів, які мають як суто теоретичне походження, так і базуються на експериментальних дослідженнях. В цілому задача визначення аеродинамічних коефіцієнтів для окремих складових опору опереного тіла обертання в широкому діапазоні до-, транс- і надзвукових

швидкостей розрахунково-дослідним шляхом навіть за умови осесиметричного обтікання є надзвичайно складною.

Особливістю більшості відомих методів є те, що вони мають певні обмеження і призначені для розрахунків окремих складових аеродинамічного опору в фіксованому діапазоні швидкостей набігаючого потоку. В той же час, на етапі конструкторської розробки нових зразків літальних апаратів існує потреба в проведенні балістичних розрахунків з метою перевірки запропонованої конструкції тактико-технічним вимогам по дальності польоту та іншим характеристикам траєкторії при умові зміни швидкості набігаючого потоку в широкому діапазоні до-, транс- та надзвукових значень. Такі балістичні розрахунки можуть бути виконані шляхом чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь зовнішньої балістики відповідного тіла обертання. Точність розрахунків залежить від того, наскільки достовірно на кожному кроці чисельного інтегрування обчислюються коефіцієнти складових сили аеродинамічного опору. Більш точні методи, як правило, передбачають і значно більший обсяг обчислень, або ж існують у вигляді графічних залежностей, що робить їх незручними для прямого використання при балістичних розрахунках. В зв'язку з цим **актуальним є розробка** придатної для проведення балістичних розрахунків методики обчислення аеродинамічного опору оперених тіл обертання за кресленнями їх зовнішніх контурів в залежності від чисел Маха і Рейнольдса при до-, транс- та надзвукових швидкостях, що мають місце на траєкторії польоту.

**Метою роботи** є моделювання польоту реактивного снаряду та визначення розрахункових траєкторій для чого необхідно проведення розрахунків аеродинамічних коефіцієнтів складових аеродинамічного опору опереного тіла обертання як при осесиметричному обтіканні, так і при наявності куті атаки за кресленнями його зовнішніх контурів на основі чисельного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса з використанням диференціальних моделей турбулентної в'язкості в рамках програмного продукту ANSYS CFX.

# **1 РОЗРОБКА МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ КОЕФІЦІЄНТІВ АЕРОДИНАМІЧНИХ СИЛ І МОМЕНТІВ РЕАКТИВНОГО НЕКЕРОВАНОВОГО СНАРЯДА ПО КРЕСЛЕННЯМ ЙОГО ЗОВНІШНІХ КОНТУРІВ**

## **1.1 Загальні положення розрахунку зовнішнього обтікання реактивного снаряда в широкому діапазоні чисел Маха**

З розвитком високопродуктивної комп'ютерної техніки та засобів розрахункового моделювання процесів обтікання, реалізованих в комерційних програмних комплексах, таких як Ansys CFX, Ansys Fluent, STAR-CD, FlowVision HPC, Open FOAM, з'явилися можливості моделювання процесів обтікання засобів ураження, зокрема реактивних снарядів (РС) систем залпового вогню (РСЗВ), що дозволяє зменшити кількість експериментів в аеродинамічних трубах та випробувальних пусків, замінивши їх комп'ютерним моделюванням. Таким чином, життєвий цикл та собівартість створення або модернізації вже існуючих засобів ураження можливо зменшити. Понад того, комп'ютерне моделювання дозволяє отримати повну картину обтікання, адже існує певна кількість параметрів, наприклад, сил, діючих на об'єкт дослідження, чи параметрів потоку повітря навколо досліджуваного льотного об'єкту, які зазвичай неможливо точно отримати при проведенні аеродинамічних випробувань, так як наявність засобів кріплення об'єкта дослідження до елементів конструкції і близькість стінок аеродинамічної труби суттєво зменшує точність вимірювання параметрів потоку внаслідок акустичного ефекту. Неможливо однозначно визначати вплив донного спротиву коли кріплення моделі виконано до донного перерізу об'єкта дослідження. Більш того, для всебічного вивчення аеродинамічних характеристик певного льотного об'єкту необхідно мати експериментальну лабораторну базу, яка б дозволяла досліджувати дозвукові та надзвукові режими обтікання, обтікання з певними

кутами атаки в усіх необхідних площинах. Вищезазначені особливості експериментального дослідження не властиві комп'ютерному моделюванню, адже методологічно відсутня необхідність допоміжних інженерних конструкцій, що максимально наближає моделювання до реальних умов польоту.

Незважаючи на зручність та відносно низьку вартість розрахункового моделювання, існує ряд умов, без яких неможливо його проводити. До таких умов варто віднести:

- високий рівень знань персоналу, який проводить розрахунки в області зовнішньої аеродинаміки та розрахункової гідродинаміки;
- тестування алгоритму розрахунку на задачах для яких відомі достовірні результати експериментальних досліджень;
- врахування особливостей кінематики потоку навколо досліджуваного об'єкту при побудові просторової моделі розрахункової області;
- дотримання вимог до розрахункової сітки в залежності від швидкості набігаючого потоку.

До недоліків розрахункового моделювання варто віднести:

- неможливість врахування в просторовій моделі реальну геометрію досліджуваного тіла з урахуванням особливостей його виробництва;
- спрощення геометрії для покращення якості розрахункової сітки;
- необхідність одноразових фінансових витрат на придбання комп'ютерної техніки та ліцензійного програмного забезпечення.

Комерційні програмні комплекси при розв'язанні задач аеродинаміки за умови ламінарного обтікання базуються на розв'язку тривимірного рівняння Нав'є-Стокса і рівняння нерозривності, якими описується рух стискаемого в'язкого повітряного потоку у вигляді ( $\mu = \text{const}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \cdot \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{V}; \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \cdot \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{V}; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \cdot \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{V}; \\ \frac{\partial(\rho \cdot V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot V_z)}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

де  $V_x$ ,  $V_y$  и  $V_z$  – проєкції вектора місцевої швидкості потоку на вісі координат;  $\rho$  і  $P$  – місцеві значення щільності та тиску потоку.

Для комп'ютерного моделювання турбулентного обтікання поверхні РС, реалізованого в більшості програмних комплексів, найбільш широко розповсюдженою є методика застосування осереднених по Рейнольдсу рівнянь Навьє–Стокса, доповнених однією з моделей турбулентності.

Система рівнянь, включаючих осереднені по Рейнольдсу рівняння Навьє–Стокса і рівняння нерозривності, має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) &= -\nabla p + \nabla(\boldsymbol{\tau} - \rho \overline{\mathbf{U}' \cdot \mathbf{U}'}') + \mathbf{F}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де  $\mathbf{U}$  – осереднене по часу поле швидкостей,  $\rho$  – щільність середовища,  $p$  – статичний тиск,  $\boldsymbol{\tau}$  – тензор в'язких напружень,  $-\rho \overline{\mathbf{U}' \cdot \mathbf{U}'}$  – тензор рейнольдсових напружень,  $\mathbf{F}$  – вектор об'ємних сил.

Ці рівняння доповнюються рівнянням енергії

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho h^*)}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} h^*) &= \\ = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{U} \cdot \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (1.3)$$



где  $h^*$  – повна ентальпія;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності газу;  $T$  – статична температура газу.

Більшість сучасних моделей турбулентності, що застосовуються в інженерних розрахунках, використовують узагальнену гіпотезу Бусінеска для визначення тензору рейнольдсових напружень у вигляді:

$$-\rho \overline{U' \cdot U'} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \rho k + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij}, \quad (1.4)$$

де  $\mu_t$  – турбулентна в'язкість;  $u_i, u_j$  – компоненти вектора швидкості;  $x_i, x_j$  – просторові координати;  $k$  – кінетична енергія турбулентних пульсацій;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

В даних дослідженнях для розв'язання системи диференціальних рівнянь (1.1) використовувався програмний продукт, заснований на засадах кінцево-елементного аналізу – ANSYS CFX компанії ANSYS Inc. Програмний комплекс ANSYS CFX – це універсальна програмна система кінцево-елементного аналізу, який працює на геометричному ядрі Parasolid. Модуль ANSYS CFX використовує розрахунковий блок за тиском, що дозволяє застосовувати цей програмний продукт для розв'язку широкого кола інженерних задач. ANSYS CFX застосовується для моделювання ламінарної та турбулентної течії робочої речовини ньютонівського та неньютонівського середовища, як однофазного так багатофазного, дозвукових та надзвукових режимах. ANSYS CFX повністю інтегровано в розрахункову оболонку ANSYS Workbench – графічна оболонка, до якої інтегровано усі розрахункові модулі та інженерні інструменти компанії ANSYS.

З урахуванням вищезазначеного розрахункове моделювання процесів моделювання обтікання артилерійських снарядів та РС є доцільним за допомогою засобів розрахункової аеродинаміки, реалізованому в комерційному програмному комплексі ANSYS CFX.

## **1.2 Особливості побудови просторової моделі для дослідження обтікання тіл обертання в широкому діапазоні чисел Маха**

Розрахункове моделювання процесу обтікання льотних об'єктів у формі тіл обертання починається із створення просторової моделі розрахункової області. Для задач зовнішньої аеродинаміки доцільно створювати розрахункову область у вигляді параболоїду. Така форма розрахункової області дозволяє зменшити кількість розрахункових комірок при подальшому створенні розрахункової сітки. В середині параболоїду слід створити порожнину, форма якої відповідала б досліджуваному об'єкту. Таким чином, після створення просторової моделі у неї повинно бути 3 типи поверхонь, які далі будуть слугувати граничними умовами (ГУ) для розрахунку: ГУ «Вхід» (просторова поверхня параболоїду), ГУ «Вихід» (задня частина параболоїду), ГУ «Стінка» (поверхні порожнини всередині параболоїду).

Просторова модель можливо створювати в будь-якому сучасному програмному комплексі для 3D моделювання (Solid Works, CATIA, Inventor, ProE та інш.) з послідовним імпортуванням геометрії до проекту Workbench. Водночас існує можливість створювати необхідну просторову модель у геометричному модулі DesignModeler який є частиною програмного забезпечення ANSYS.

В поточному дослідженні обтікання повітряним потоком РС типу М-21ОФ для БМ-21 (Град) геометрія створювалася в DesignModeler. Загальні обриси досліджуваного об'єкту були взяті з відкритих джерел всесвітньої мережі Internet. За відсутності креслень дійсна геометрія об'єкту може відрізнитися від прийнятої для розрахунків.

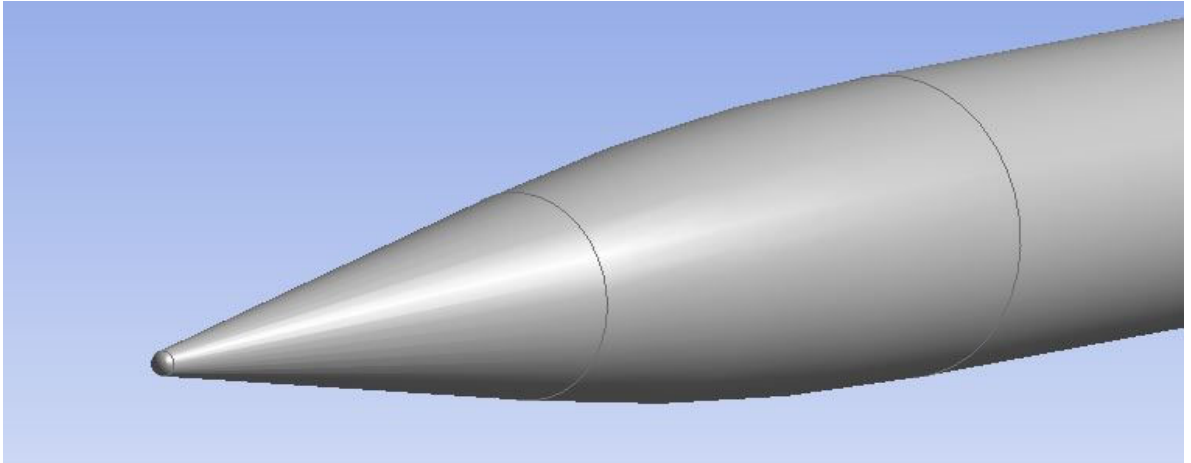


Рисунок 1.1 – Візуалізація зовнішнього вигляду головної частини досліджуемого РС

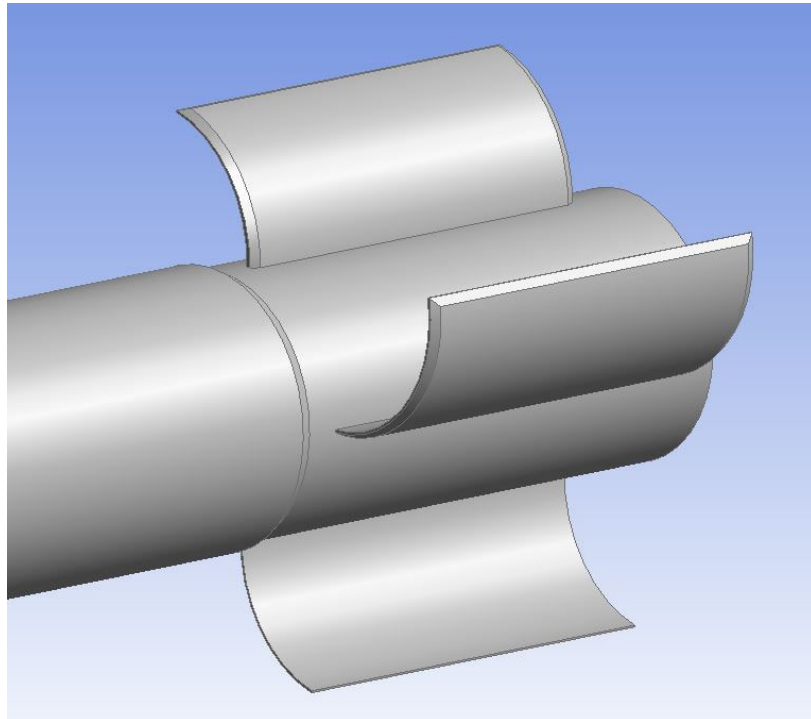


Рисунок 1.2 – Візуалізація оперення досліджуемого РС

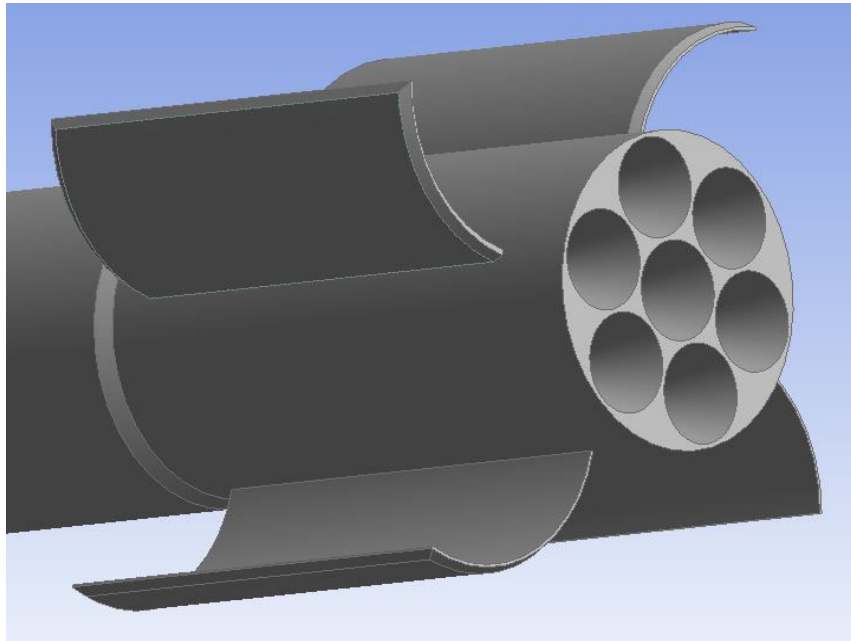


Рисунок 1.3 – Візуалізація донного перетину з сопловим апаратом досліджуємого РС

Загальний вигляд основних елементів конструкції досліджуваного РС наведено на рис.1.1-1.3. З рисунків видно, що РС складається з підривника, головної частини конічної і оживальної форм, циліндричної частини, оперення та соплового апарату.

З урахуванням того, що кінематика взаємодії набігаючого потоку з об'єктом дослідження відрізняється при дозвуковому та надзвуковому обтіканні, було прийнято рішення створити дві геометрії. Перша геометрія – для дослідження дозвукового та трансзвукового обтікання (рис. 1.4), друга – для дослідження надзвукового обтікання (рис. 1.5).

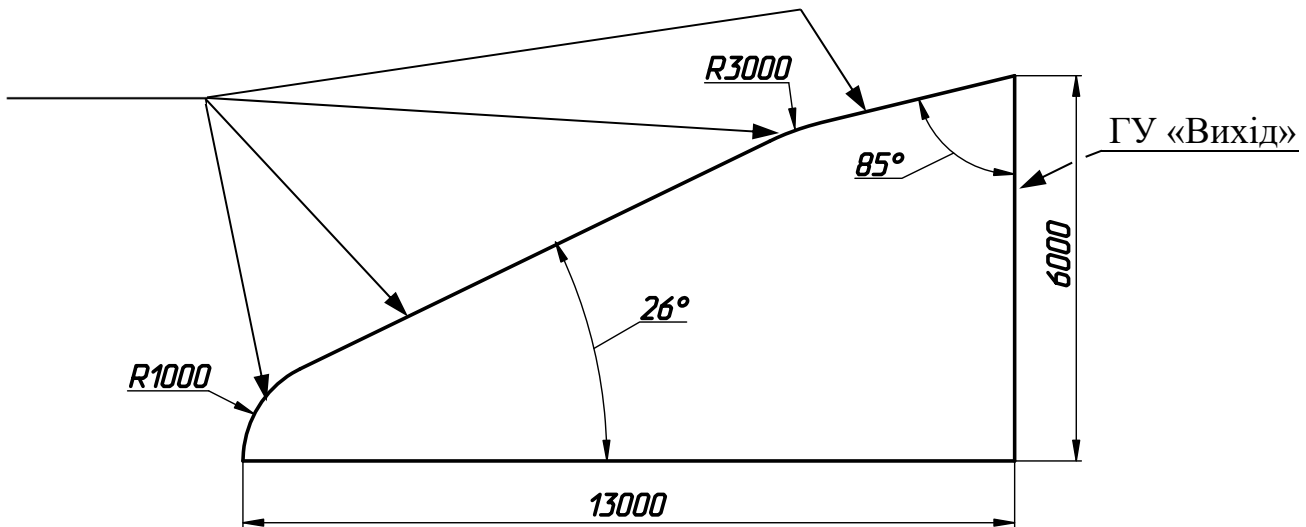


Рисунок 1.4 – Геометричні параметри розрахункової області для дослідження обтікання РС на дозвукових та трансзвукових швидкостях.

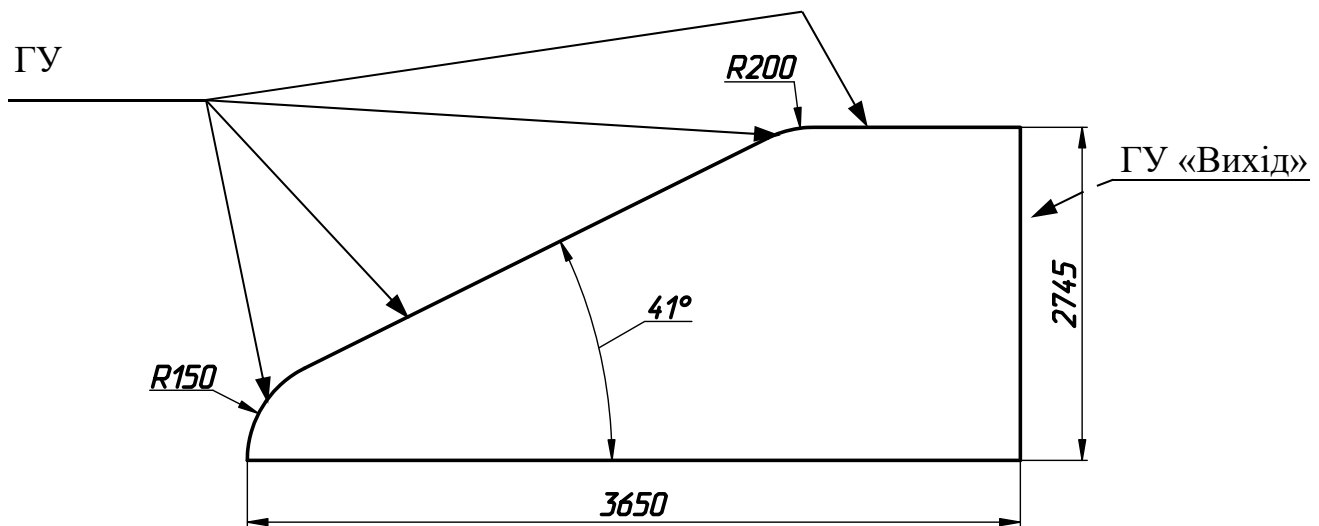


Рисунок 1.5 – Геометричні параметри розрахункової області для дослідження обтікання РС на надзвукових швидкостях.

Принципова відмінність між створеними геометріями полягає в тому, що для дозвукового та трансзвукового обтікання необхідно забезпечити затухання акустичних хвиль. Для цього геометричні параметри параболоїду для дозвукового та трансзвукового обтікання свідомо зроблені набагато більшими в порівнянні з відповідними параметрами просторової моделі для надзвукових режимів. За рахунок більших геометричних розмірів акустичні коливання, які

генеруються за рахунок взаємодії твердої поверхні досліджуваного РС з набігаючим потоком повітря, гаснуть в розрахунковій області та не заважають утримувати сталими параметри потоку, які задані на ГУ «Вхід».

При побудові розрахункової області для надзвукового обтікання досліджуваного РС враховувалась вимога унеможливлення накладення стрибка ущільнення повітряного потоку на ГУ «Вхід».

### **1.3 Загальні вимоги до розрахункової сітки при дослідженні зовнішнього обтікання повітряним потоком РС**

Одним з етапів розрахунку аеродинамічних характеристик РС є побудова розрахункової сітки. На цьому етапі просторова модель замінюється розрахунковою сіткою. Для належного розрахунку на розрахункову сітку накладається ряд обмежень:

- розрахункова сітка повинна бути якісною;
- розрахункова сітка в місцях моделювання твердої поверхні повинна бути більш щільною з метою для більш точного визначення епюри розподілу швидкості в примежовому шарі.

Оскільки моделювання обтікання передбачено проводити в програмному комплексі ANSYS CFX, то критерії якості розрахункової сітки будемо розглядати саме для цього програмного забезпечення. До критеріїв якості розрахункової сітки ANSYS CFX варто віднести:

- мінімальний кут в вузлі комірки – Orthogonal Angle;
- ступінь протяжності комірки (відношення довжині максимальної грані до довжини найменшої грані комірки), відображено у відсотках – Aspect Ratio;
- максимальне відносне збільшення комірки у примежовому шарі, відображене у відсотках – Expansion Factor.

Значення критеріїв якості розрахункової сітки, задовольняючої вимогам ANSYS CFX, наведено у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Критерії якості розрахункової сітки

Параметр	Діапазон значень
Orthogonal Angle	>20°
Aspect Ratio	<1000
Expansion Factor	<100

Якість уже побудованої сітки можливо оцінити при перегляді «out файлу». Разом з найгіршим числовим показником кожного з критерії якості наводиться відносна його оцінка з відповідним маркуванням. В Ansys CFX введено 4 типи маркування якості розрахункової сітки:

F – критерій незадовільної якості, подальший розрахунок з таким маркуванням неможливий;

! – критерій поганої якості, розрахунки можливо проводити при такому маркуванні, але є вірогідність генерування систематичної похибки обчислювання в місцях концентрації комірок з такою якістю;

ok – критерій задовільної якості, генерування систематичної похибки неможливе, але процес розрахунку може зайняти більше часу ніж очікувалось;

OK – критерій найкращої якості, з таким маркуванням розв’язок задачі можливий за 50÷100 ітерацій (за умови вдало визначеного часу інтегрування).

Додатковим критерієм якості розрахункової сітки можливо вважати параметр безрозмірної товщини першого ряду комірок  $Y^+$ , який характеризує відносну висоту першої комірки розрахункової сітки з урахуванням локальної кінематики потоку.

Визначення відносної товщини першого шару комірок можливо зробити спираючись на залежності параметрів примежового шару від числа Рейнольдса:

$$Re_L = \frac{\rho \cdot V_\infty \cdot L}{\mu} \quad (1.5)$$

де  $V_\infty$  - швидкість незбуреного потоку;  $L$  - характерний геометричний параметр,  $\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості.

Місцевий коефіцієнт тертя визначається із співвідношення:

$$c_f = 0.025 \cdot \text{Re}_x^{-1/7} \quad (1.6)$$

або

$$c_f = 2 \frac{\rho \cdot U_\tau^2}{\rho \cdot V_\infty^2} = 2 \cdot \left( \frac{U_\tau}{V_\infty} \right)^2 \quad (1.7)$$

де  $x$  – поточне місце визначення числа Рейнольдса.

Висота першої комірки примежового шару:

$$\Delta y = \frac{\Delta y^+ \cdot \nu}{U_\tau} \quad (1.8)$$

З урахуванням формули (5)

$$\Delta y = \Delta y^+ \cdot \sqrt{\frac{2}{c_f}} \cdot \frac{\nu}{V_\infty} \quad (1.9)$$

З урахуванням формули (3)

$$\Delta y = L \cdot \Delta y^+ \cdot \sqrt{80} \text{Re}_x^{1/14} \cdot \frac{1}{\text{Re}_L} \quad (1.10)$$

Подальші спрощення робимо, опираючись на співвідношення  $\text{Re}_x = f \cdot \text{Re}_L$ , де  $f$  – деякий коефіцієнт. При великих значеннях  $\text{Re}_x$  дійсне співвідношення



$f^{1/14} \approx 1$ . З урахуванням цього відносна товщина першої комірки примежового шару знаходиться із співвідношення:

$$\Delta y = L \cdot \Delta y^+ \cdot \sqrt{80} \operatorname{Re}_L^{-13/14} \quad (1.11)$$

Наведена формула визначення  $Y^+$  є наближеною, а саме значення цього параметру обов'язково необхідно контролювати в модулі Results, який призначений для обробки результатів розрахункового моделювання. Приклад візуалізації  $Y^+$  на поверхні РС представлено на рис. 1.6. В таблиці 1.2 представлені діапазони значень  $Y^+$  для всіх досліджуваних режимів обтікання РС за числом Маха.

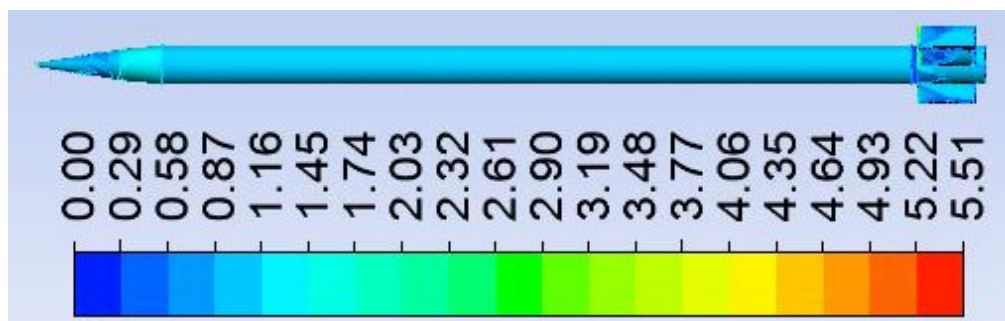


Рисунок 1.6 – Розподіл  $Y^+$  на поверхні ракети при  $M=2,8$

Таблиця 1.2 – Максимальні значення  $Y^+$  для різних значень чисел Маха

##	M	$Y^+$	##	M	$Y^+$	##	M	$Y^+$
1	0,1	0÷0,32	7	1,0	0÷1,66	13	2,0	0÷3,78
2	0,2	0÷0,54	8	1,1	0÷1,81	14	2,2	0÷4,18
3	0,4	0÷0,94	9	1,2	0÷1,95	15	2,4	0÷4,56
4	0,6	0÷1,23	10	1,4	0÷2,54	16	2,6	0÷5,08
5	0,8	0÷1,46	11	1,6	0÷2,96	17	2,8	0÷5,51
6	0,9	0÷1,54	12	1,8	0÷3,38	—	—	—

Треба зазначити, що максимальні значення  $Y^+$  знаходяться на вершині обтічника РС та мають локальний характер. На більшості поверхні снаряду значення  $Y^+$  не перевищують рекомендованого для SST моделі турбулентності значення 2,0.

Розрахункова сітка для поточних досліджень створювалася в вбудованому в Workbench модулі Meshing, який дозволяє створювати так звану неструктуровану розрахункову сітку. З його допомогою можливо досить швидко створити розрахункову сітку області навколо досліджуемого РС, яка буде складатися з тетраедрів для основного потоку та призм для примежового шару. Створення в примежовому шарі масиву розрахункових комірок з призм дозволяє розрахунково відтворити епюри швидкості та температури в примежовому шарі в залежності від локальної кінематики потоку для кожної елементарної поверхні досліджуваного об'єкту. Даний спосіб створення розрахункової сітки доволі простий та зручний та дозволяє будувати сітку в автоматичному режимі без втрати точності в подальших розрахунках. Вигляд розрахункової сітки представлено на рис. 1.7, 1.8.

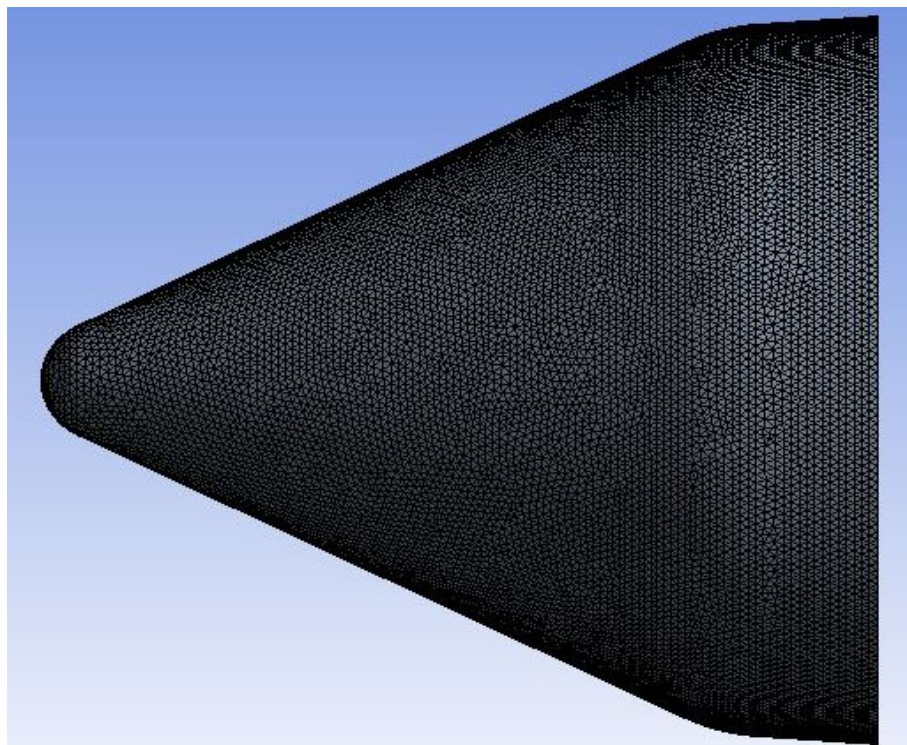


Рисунок 1.7 – Загальний вигляд розрахункової сітки



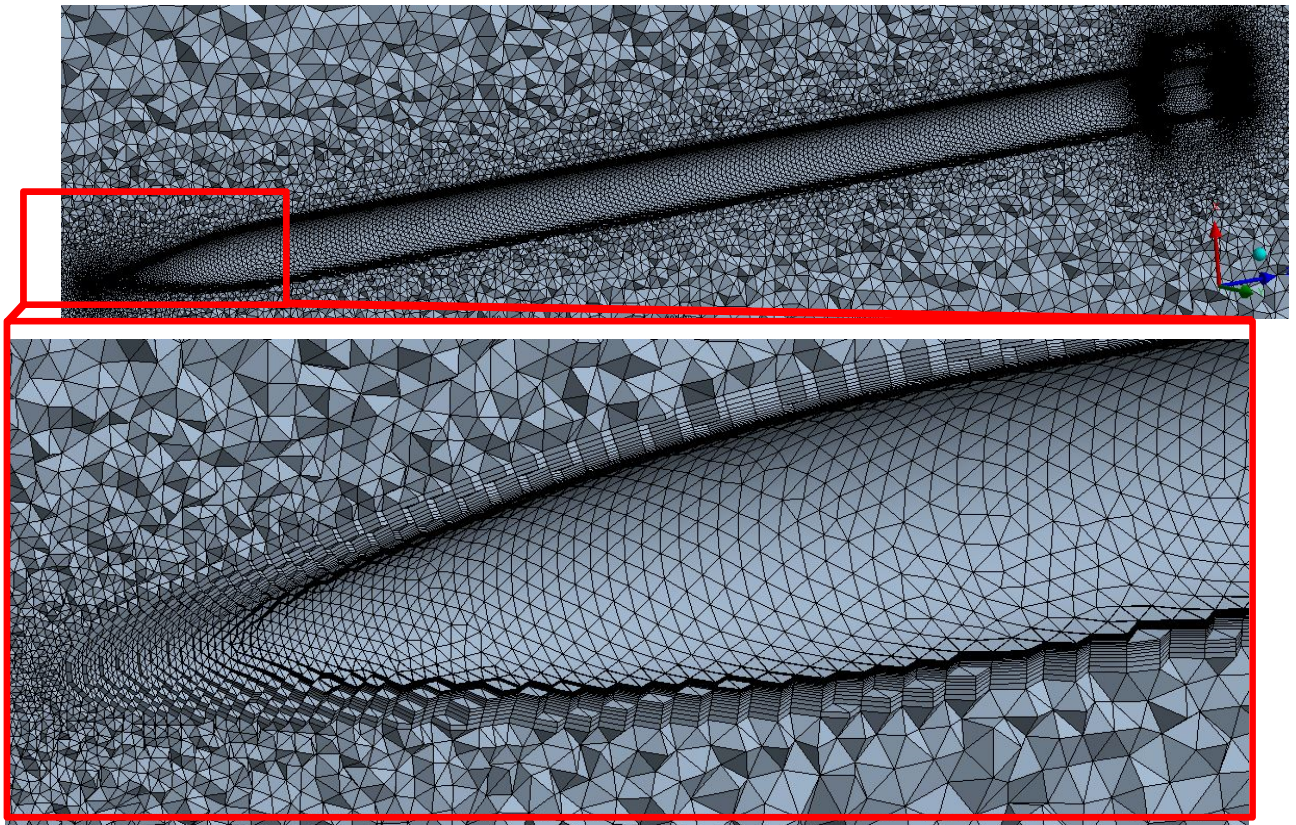


Рисунок 1.8 – Перетин розрахункової сітки

#### **1.4 Налаштування розрахункової сітки для дозвукового та трансзвукового обтікання**

Процес розрахункового моделювання дозвукового та трансзвукового обтікання ракети пов'язаний з рядом особливостей, які слід враховувати при розрахунку аеродинамічних характеристик досліджуемого об'єкту. Насамперед слід враховувати те, що дозвукове та трансзвукове обтікання здійснюється на швидкостях менших за швидкість звуку в повітрі, отже акустичні збурення від взаємодії набігаючого повітряного потоку з поверхнею РС розповсюджуються зі швидкістю звуку в усіх напрямках. Задля уникнення накладання акустичного ефекту на параметри потоку, які задаються як вхідні дані для розрахунку, слід розташовувати поверхні граничних умов (ГУ) «Вхід» та «Вихід» як можна далі від об'єкту дослідження. Схематичне зображення зовнішнього контуру розрахункової моделі для дозвукового та трансзвукового обтікання наведено на

рис. 1.5. В таблицях 1.3 та 1.4 наведені налаштування модулю Meshing, які необхідні для створення розрахункової сітки для подальшого моделювання процесу обтікання досліджуемого РС дозвуковим та трансзвукових повітряним потоком.

Таблиця 1.3 – Налаштування Ansys Mesh для створення розрахункової сітки при обтіканні снаряда дозвуковим та трансзвуковим повітряним потоком

<b>№</b>	<b>Найменування</b>	<b>Значення</b>
Загальні налаштування розрахункової сітки		
1	Клас задачі (Physics Preference)	CFD
2	Тип вирішувача (Solver Control)	CFX
3	Якість сітки (Relevance)	100
4	Перевірка форми (Shape Checking)	CFD
5	Функція цілі скошеності (Target Skewness)	Program Controlled
6	Функція розміру (Size Function)	Proximity and Curvature
7	Рівень якості сітки (Relevance Center)	Fine
8	Згладжування (Smoothing)	High
9	Перехід (Transition)	Slow
10	Якість сітки криволінійних поверхонь (Span Angle Center)	Fine
11	Тип джерела для функції розміру Proximity	Faces and Edges

№	Найменування	Значення
	(Proximity Size Function)	
12	Мінімальний розмір (Min size)	8,5e-4 mm
13	Мінімальний розмір при використанні функції Proximity (Proximity Min Size)	0,5 mm
14	Максимальний розмір поверхневих елементів сітки (Max Face Size)	142,83 mm
15	Максимальний розмір тетраїдрів (Max Tet Size)	285,66 mm
Налаштування розрахункової сітки в примежовому шарі		
16	Подавлений (Suppress)	No
17	Метод вибору границь (Boundary Scoping Method)	Named Selections
18	Гранична умова (Boundary)	Wall
19	Спосіб задання примежового шару (Inflation Option)	First Layer Thickness
20	Висота першого шару (First Layer Height)	1,2e-3 mm
21	Кількість шарів (Maximum Layers)	50
22	Коефіцієнт зростання (Growth Rate)	1,17

Таблиця 1.4 – Характеристика розрахункової сітки для обтікання снаряда дозвуковим та трансзвуковим повітряним потоком

№	Найменування	Значення
1	Загальна кількість розрахункових вузлів (Total Number of Nodes)	6598158
2	Загальна кількість елементів (Total Number of Elements)	16468498
3	Загальна кількість тетраедрів (Total Number of tetrahedrons)	5123108
4	Загальна кількість призм (Total Number of Prisms)	11339291
5	Загальна кількість пірамід (Total Number of Pyramids)	6099

### 1.5 Налаштування розрахункової сітки для надзвукового обтікання

В таблицях 1.5 та 1.6 наведено налаштування модулю Meshing, які необхідні для створення розрахункової сітки для подальшого моделювання процесу обтікання досліджуемого РС надзвуковим повітряним потоком.

Таблиця 1.5 – Налаштування Ansys Mesh для створення розрахункової сітки для обтікання снаряда надзвуковим повітряним потоком

№	Найменування	Значення
Загальні налаштування розрахункової сітки		
1	Клас задачі (Physics Preference)	CFD
2	Тип вирішувача (Solver Control)	CFX
3	Якість сітки	100

№	Найменування	Значення
	(Relevance)	
4	Перевірка форми (Shape Checking)	CFD
5	Функція цілі скошеності (Target Skewness)	Program Controlled
6	Функція розміру (Size Function)	Proximity and Curvature
7	Рівень якості сітки (Relevance Center)	Fine
8	Згладжування(Smoothing)	High
9	Перехід(Transition)	Slow
10	Якість сітки криволінійних поверхонь (Span Angle Center)	Fine
11	Тип джерела для функції розміру Proximity (Proximity Size Function)	Faces and Edges
12	Мінімальний розмір (Min size)	3e-4 mm
13	Мінімальний розмір при використанні функції Proximity (Proximity Min Size)	0,3 mm
14	Максимальний розмір поверхневих елементів сітки (Max Face Size)	30,0 mm
15	Максимальний розмір тетраїдрів (Max Tet Size)	150,0 mm
Налаштування розрахункової сітки в примежовому шарі		
16	Подавлений (Suppress)	No
17	Метод вибору границь	Named Selections

№	Найменування	Значення
	(Boundary Scoping Method)	
18	Назва границі (Boundary)	Wall
19	Спосіб задання примежового шару (Inflation Option)	First Layer Thickness
20	Висота першого шару (First Layer Height)	1,2e-3 mm
21	Кількість шарів (Maximum Layers)	50
22	Коефіцієнт зростання (Rate)	1,17

Таблиця 1.6 – Характеристика розрахункової сітки для обтікання снаряда надзвуковим повітряним потоком

№	Найменування	Значення
1	Загальна кількість розрахункових вузлів (Total Number of Nodes)	10173776
2	Загальна кількість елементів (Total Number of Elements)	25733671
3	Загальна кількість тетраедрів (Total Number of tetrahedrons)	8482601
4	Загальна кількість призм (Total Number of Prisms)	17241535
5	Загальна кількість пірамід (Total Number of Pyramids)	9535



## 1.6 Загальні налаштування препроцесора Ansys CFX для дослідження обтікання РС повітряним потоком в заданому діапазоні чисел Маха

Контроль завершеності розв'язку задачі проводився по алгебраїчним розбіжностям розв'язання рівнянь сталості енергії, імпульсу, витрати. Додатково під час розрахунку контролювалася зміна коефіцієнту лобового опору РС та значення сили лобового опору. Критерієм закінчення розрахунку було визначено встановлення флуктуації контрольованих параметрів відносно очікуваного його значення під час розрахунку. Для візуального контролю зміни коефіцієнту лобового опору під час розрахунку створюється монітор контролю, в якому відображається в якості змінної математичний вираз

$(2 \cdot \text{force\_z}()@WALL)/(0.0113094 \cdot$

$\text{massFlowAve}(\text{Density})@INLET \cdot \text{massFlowAve}(\text{Velocity})@INLET \cdot \text{massFlowAve}(\text{Velocity})@INLET).$

Даний запис еквівалентний виразу:

$$c_x = \frac{2 \cdot R}{S \cdot \rho \cdot V_\infty^2} \quad (1.12)$$

де  $R$  – сила аеродинамічного опору,  $N$  (визначається безпосередньо під час розрахунку обтікання снаряда, значення сили доступне в калькуляторі додатку Post обробки результатів розрахунку);  $S$  – міделевий перетин,  $m^2$  (є характеристикою геометрії снаряда);  $\rho$  – густина повітря на нескінченності,  $kg/m^3$  (є вхідним даним для розрахунку);  $V_\infty$  – швидкість повітря на нескінченності,  $m/s$  (є вхідним даним для розрахунку).

Вікно динамічного контролю довершеності розв'язку задачі наведено на рис.1.9.

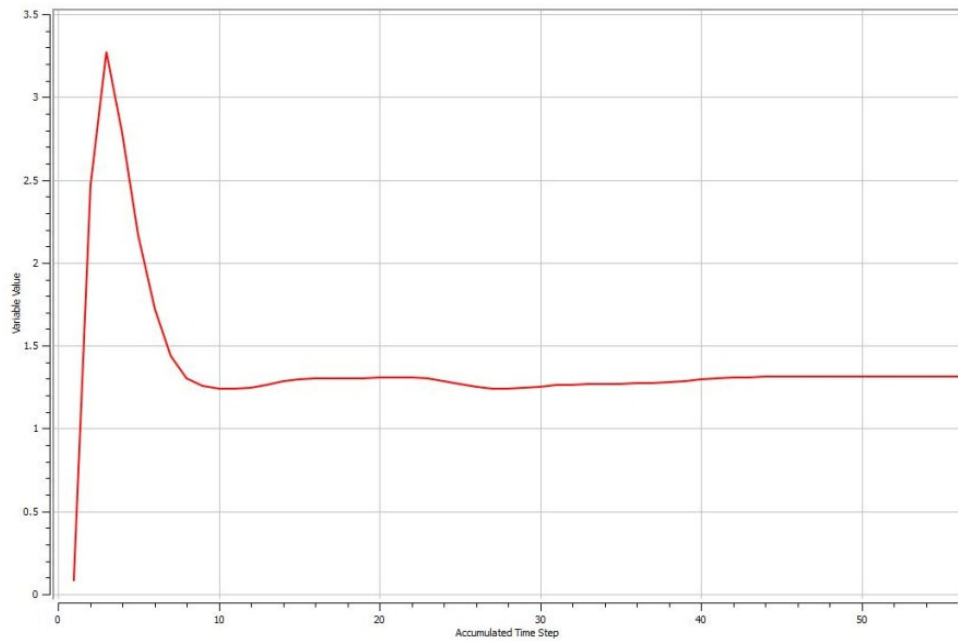


Рисунок 1.9 – Графік зміни коефіцієнту лобового опору під час розрахунку

Одним з основних параметрів налаштувань препроцесора Ansys CFX є крок інтегрування. Даний параметр впливає на швидкість розв'язку (необхідну кількість ітерацій для отримання сталого значення контрольованого параметру). Невірно підібране значення кроку інтегрування також може призвести до отримання нефізичного розв'язку. Значення шагу інтегрування для кожного з чисел Маха наведено у таблиці 1.7.

Таблиця 1.7 – Значення кроку інтегрування для досліджуваного діапазону чисел Маха.

##	M	t, c	##	M	t, c	##	M	t, c
1	0,1	0,025	7	1,0	0,0025	13	2,0	8,5e-5
2	0,2	0,025	8	1,1	0,0025	14	2,2	8,5e-5
3	0,4	0,025	9	1,2	0,0005	15	2,4	8,5e-5
4	0,6	0,0075	10	1,4	0,0005	16	2,6	5,0e-5
5	0,8	0,0075	11	1,6	0,0001	17	2,8	7,5e-6
6	0,9	0,0025	12	1,8	8,5e-5	—	—	—

## 1.7 Загальні налаштування граничних умов

Програмний комплекс ANSYS CFX володіє можливістю моделювати обтікання РС повітряним потоком з різними значеннями чисел Маха. В поточних дослідженнях налаштування ГУ проводилося з урахуванням кінематики повітряного потоку на нескінченності шляхом встановлення на ГУ «Вхід» режиму обтікання (Subsonic (дозвукове обтікання), Mixed (трансзвукове обтікання), Supersonic (надзвукове обтікання)). Таким чином імітаційні дослідження були розділені на три етапи відповідно до режиму обтікання:

- моделювання дозвукового обтікання снаряда ( $M=0\div 0,8$ );
- трансзвукове обтікання снаряда ( $M=0,8\div 1,2$ );
- надзвукове обтікання снаряда ( $M=1,2\div 2,8$ ).

## 1.8 Налаштування препроцесора Ansys CFX для дослідження обтікання РС дозвуковим повітряним потоком ( $M=0\div 0,8$ )

Налаштування ГУ, задіяних при моделюванні дозвукового обтікання РС, наведено в таблицях 1.8, 1.9 та 1.10.

Таблиця 1.8 – Налаштування ГУ «Вхід»

№	Найменування	Налаштування/значення
1	Тип течії (Flow Region)	Subsonic
2	Mass And Momentum	—
2.1	Спосіб визначення ГУ (Option)	Cyl. Vel. Components
2.2	Осьова компонента (Axial Component)	Значення швидкості на нескінченності
2.3	Радіальна компонента	0 м/с

<b>№</b>	<b>Найменування</b>	<b>Налаштування/значення</b>
	(Radial Component)	
2.4	Дотична компонента (Theta Component)	0 м/с
3	Турбулентність (Turbulence)	—
3.1	Спосіб визначення параметрів турбулентності (Option)	Intensity and Eddy Viscosity Ratio
3.2	Інтенсивність (Fraction Intensity)	0,1
3.3	Відношення в'язкостей (Eddy Viscosity Ratio)	2
4	Теплопередача (Heat Transfer)	—
4.1	Спосіб визначення параметрів теплопередачі (Option)	Static Temperature
4.2	Статична температура (Static Temperature)	293,15 К

Таблиця 1.9 – Налаштування ГУ «Вихід»

<b>№</b>	<b>Найменування</b>	<b>Налаштування/значення</b>
1	Тип течії (Flow Region)	Subsonic
2	Mass And Momentum	—
2.1	Спосіб визначення ГУ (Option)	Average Static Pressure
2.2	Відносний тиск (Relative Pressure)	98000 Па

№	Найменування	Налаштування/значення
2.3	Профіль епюри тиску (Press. Profile Blend)	0,05
3	Осереднення тиску (Pressure Averaging)	—
3.1	Спосіб осереднення тиску (Option)	Average Over Whole Outlet

Таблиця 1.10 – Налаштування ГУ «Стінка»

№	Найменування	Налаштування/значення
1	Тип взаємодії (Mass And Momentum)	Без проковзування (No Slip Wall)
2	Шорскість (Wall Roughness)	Гідравлічно гладка (Smooth wall)
3	Теплопередача (Heat Transfer)	Без теплообміну з оточуючим середовищем (Adiabatic)

### 1.9 Налаштування препроцесора Ansys CFX для дослідження обтікання РС трансзвуковим повітряним потоком ( $M=0,8 \div 1,2$ )

Налаштування ГУ, задіяних при моделюванні трансзвукового обтікання РС, наведено в таблицях 1.11, 1.12 та 1.13.

Таблиця 1.11 – Налаштування ГУ «Вхід»

№	Найменування	Налаштування/значення
1	Тип течії (Flow Region)	Mixed
2	Mass And Momentum	—

№	Найменування	Налаштування/значення
2.1	Спосіб визначення ГУ (Option)	Cyl. Vel. Components
2.2	Відносний статичний тиск (Rel. Static Pessure)	98000 Па
2.3	Осьова компонента (Axial Component)	Значення швидкості на нескінченності
2.4	Радіальна компонента (Radial Component)	0 м/с
2.5	Дотична компонента (Theta Component)	0 м/с
3	Турбулентність (Turbulence)	—
3.1	Спосіб визначення параметрів турбулентності (Option)	Intensity and Eddy Viscosity Ratio
3.2	Інтенсивність (Fraction Intensity)	0,1
3.3	Відношення в'язкостей (Eddy Viscosity Ratio)	2
4	Теплопередача (Heat Transfer)	—
4.1	Спосіб визначення параметрів теплопередачі (Option)	Static Temperature
4.2	Статична температура (Static Temperature)	293,15 К

Таблиця 1.12 – Налаштування ГУ «Вихід»

<b>№</b>	<b>Найменування</b>	<b>Налаштування/значення</b>
1	Тип течії (Flow Region)	Subsonic
2	ëMass And Momentum	—
2.1	Спосіб визначення ГУ (Option)	Average Static Pressure
2.2	Відносний тиск (Relative Pressure)	98000 Па
2.3	Профіль епюри тиску (Press. Profile Blend)	0,05
3	Осереднення тиску (Pressure Averaging)	—
3.1	Спосіб осереднення тиску (Option)	Average Over Whole Outlet

Таблиця 1.13 – Налаштування ГУ «Стінка»

<b>№</b>	<b>Найменування</b>	<b>Налаштування/значення</b>
1	Тип взаємодії (Mass And Momentum)	Без проковзування (No Slip Wall)
2	Шорскість (Wall Roughness)	Гідравлічно гладка (Smooth wall)
3	Теплопередача (Heat Transfer)	Без теплообміну з оточуючим середовищем (Adiabatic)

### 1.10 Налаштування препроцесора Ansys CFX для дослідження обтікання РС надзвуковим повітряним потоком ( $M=1,2 \div 2,8$ )

Налаштування ГУ, задіяних при моделюванні надзвукового обтікання РС, наведено в таблицях 1.14, 1.15 та 1.16.

Таблиця 1.14 – Налаштування ГУ «Вхід»

№	Найменування	Налаштування/значення
1	Тип течії (Flow Region)	Supersonic
2	Mass And Momentum	—
2.1	Спосіб визначення ГУ (Option)	Cyl. Vel. Components
2.2	Відносний статичний тиск (Rel. Static Pressure)	98000 Па
2.3	Осьова компонента (Axial Component)	Значення швидкості на нескінченності
2.4	Радіальна компонента (Radial Component)	0 м/с
2.5	Дотична компонента (Theta Component)	0 м/с
3	Турбулентність (Turbulence)	—
3.1	Спосіб визначення параметрів турбулентності (Option)	Intensity and Eddy Viscosity Ratio
3.2	Інтенсивність (Fraction Intensity)	0,1
3.3	Відношення в'язкостей (Eddy Viscosity Ratio)	2



№	Найменування	Налаштування/значення
4	Теплопередача(Heat Transfer)	—
4.1	Спосіб задання параметрів теплопередачі (Option)	Static Temperature
4.2	Статична температура (Static Temperature)	293,15 К

Таблиця 1.15 – Налаштування ГУ «Вихід»

№	Найменування	Налаштування/значення
1	Тип течії (Flow Region)	Supersonic

Таблиця 1.16 – Налаштування ГУ «Стінка»

№	Найменування	Налаштування/значення
1	Тип взаємодії (Mass And Momentum)	Без проковзування (No Slip Wall)
2	Шорскість (Wall Roughness)	Гідравлічно гладка (Smooth wall)
3	Теплопередача (Heat Transfer)	Без теплообміну з оточуючим середовищем (Adiabatic)

### 1.11 Моделі турбулентності

Більшість процесів обтікання повітряним потоком поверхні літальних апаратів (ЛА) є турбулентними. Турбулентність впливає на процеси теплообміну та на структуру потоку на поверхні елементів ЛА. Важливою проблемою моделювання турбулентного обтікання на поверхні елементів ЛА є точне

визначення місця відриву потоку під дією градієнту тиску та визначення місця ламінарно-турбулентного переходу (ЛТП). Точне визначення місця відриву потоку та ЛТП є важливою частиною розрахункового моделювання обтікання повітряним потоком ЛА, бо аеродинамічні характеристики окремих елементів ЛА передбачають наявність ЛТП та його віддалення від носової частини ЛА.

Існує доволі велика кількість моделей турбулентності, заснованих на осереднених рівняннях Нав'є-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS). Моделі турбулентності можуть бути розподілені на дві групи: моделі вихрової в'язкості та моделі рейнольдсових напруг. Оскільки моделі рейнольдсових напруг мають досить специфічну область застосування (течії з різкою зміною швидкості та напрямку потоку, течії з плавучістю), то далі будемо розглядати виключно моделі турбулентності вихрової в'язкості, такі як: k-ε, RNG k-ε, k-ω, SST.

Відповідно публікаціям [1] – [5] для розрахунку обтікання ЛА повітряним потоком доцільно застосовувати k-ε та SST моделі турбулентності

## 1.12 Стандартна k-ε модель турбулентності

Дана модель турбулентності отримала широке розповсюдження в багатьох галузях промисловості і засвідчила задовільну точність рішень та розрахункову стійкість. Дана модель турбулентності є найбільш протестованою на різного типу задачах.

Модель k-ε турбулентності включає в себе:

– рівняння переносу кінетичної енергії турбулентності:

$$\rho \cdot \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (1.13)$$

– рівняння для дисипації кінетичної енергії турбулентності:

$$\rho \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]. \quad (1.14)$$

В даній моделі  $\mu_t$  визначається через величини кінетичної енергії турбулентності  $k$  та дисипації цієї енергії  $\varepsilon$  [6].

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (1.15)$$

Із [7] відомо, що дана модель через запізніле передбачення точки відриву потоку дає завищені результати при розрахунку аеродинамічних показників ЛА.  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентності через незначні вимоги щодо щільності розрахункової сітки передбачає постійне застосування пристінних функцій для моделювання епюри швидкості біля стінки (рис. 1.10), що призводить до спрощення картини течії повітря в примежовому шарі.

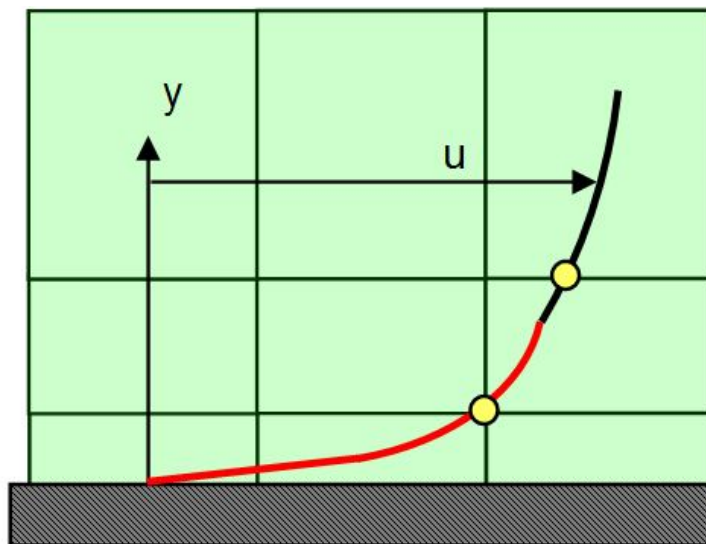


Рисунок 1.10 – Візуалізація застосування пристінної функції  $k$ - $\varepsilon$  моделі турбулентності

### 1.13 SST модель турбулентності

Заснована на  $k - \omega$  рівняннях, SST модель була створена для високоточного передбачення точки відриву потоку та розміру відривної зони, яка з'являється під дією несприятливого градієнту тиску та урахуванням ефектів переносу у виразах для вихрової в'язкості. Дана модель продемонструвала вражаючі співпадіння з результатами експериментальних досліджень [7], [8]. SST модель рекомендовано для високоточного моделювання примежового шару. Для успішної роботи даної моделі розрахункова сітка повинна мати більше 15 комірок по товщині примежового шару, а значення  $y^+$  не повинно перевищувати 2.

Особливістю SST моделі турбулентності є об'єднання емпіричних констант ( $\Phi_1$  та  $\Phi_2$ ) та вагової функції ( $F_1$ ) залежністю, яка приводить до зміни BSL моделі турбулентності до двошарової моделі Ментера [9], [10], [11] – моделі переносу дотичних напруг (SST  $k - \omega$ )

$$(\Phi = \Phi_1 \cdot F_1 + (1 - F_1) \cdot \Phi_2). \quad (1.16)$$

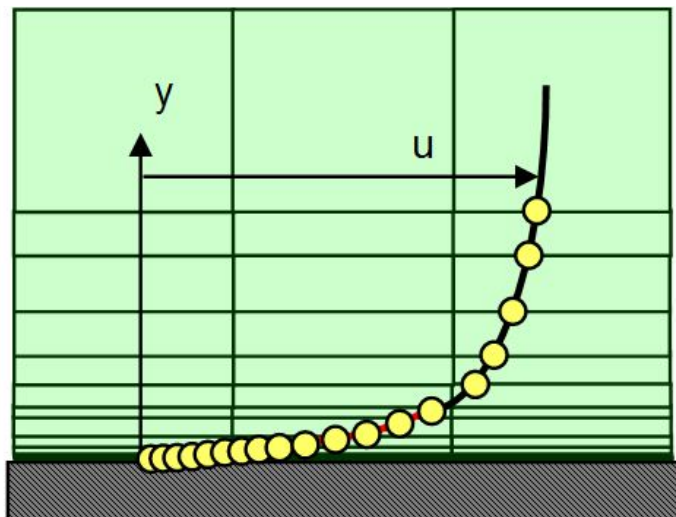


Рисунок 1.11 – Візуалізація застосування пристінної функції в примежовому шарі SST моделі турбулентності

Ментер модифікував стандартний зв'язок поміж  $k$ ,  $\omega$  та турбулентною в'язкістю  $\mu_t$ . В цей зв'язок було введено додатковий обмежувач (MSST), який забезпечує перехід до формули Бредшоу, відповідно якої турбулентна напруга тертя пропорційна кінетичній енергії турбулентності:  $\overline{u'_i u'_j} = 0,31k$ . Ментером була змінена модель переносу в'язкого вихору Модифікована модель містить компонент пульсацій, який пояснює структуру турбулентності та визначається шкалою Лаундера, Фон Кармана. SST модель турбулентності потребує значної щільності розрахункової моделі в примежовому шарі, рис. 1.11.

k-ε модель турбулентності погано розраховує параметри потоку в примежовому шарі, в якому присутні відриви потоку від поверхні стінок та ЛТП. В роботі [12] наведено порівняння експериментально отриманого профілю швидкості несиметричного дифузорового потоку з розрахованими значеннями швидкостей, отриманих за допомогою k-ε та SST моделей турбулентності, рис.1.12. З рисунку видно, що для адекватного моделювання складної просторової течії повітряного потоку доцільно застосовувати SST модель турбулентності.

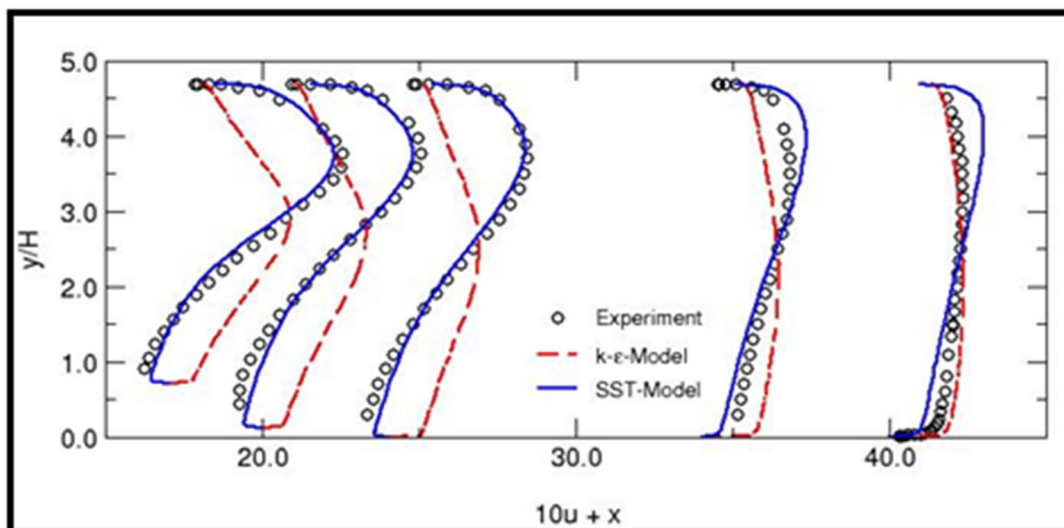


Рисунок 1.12 – Верифікація моделей турбулентності [12]

Моделі турбулентності мають специфічні вимоги щодо щільності розрахункової моделі пристінних зон. Перелік вимог до розрахункової області в пристінних зонах досліджуваних моделей турбулентності наведено в табл. 1.17.

Таблиця 1.17 – Значення  $y^+$  для відповідних моделей турбулентності.

Модель турбулентності	Кількість комірок	Значення $y^+$ на стінці
k-ε	10÷15	50÷100
SST	більше15	0,001÷2

Для розрахункового моделювання обтікання повітряним потоком ЛА доцільно використовувати SST модель турбулентності.

### 1.14 Обробка результатів комп'ютерного моделювання

Одним з основних етапів імітаційного моделювання є інтерпретація отриманих результатів розрахунку. Обробка результатів моделювання в ANSYS CFX проводиться в окремому модулі Results. В даному модулі можливо відображати розподіл необхідних для аналізу течії параметрів в робочій області (за допомогою додаткової геометрії, побудованої безпосередньо в Results) та на поверхнях ГУ. Приклад візуалізації розподілу чисел Маха навколо досліджуваного РС наведено на рис. 1.13. Модуль Results дозволяє аналізувати не тільки якісні параметри візуально відображені на дисплеї монітору а і кількісні, які можливо в подальшому використовувати при аналізі аеродинамічної досконалості досліджуємого РС. Додатково в модулі Results можливо побудувати та експортувати розподіл дотичних напруг на поверхні РС.

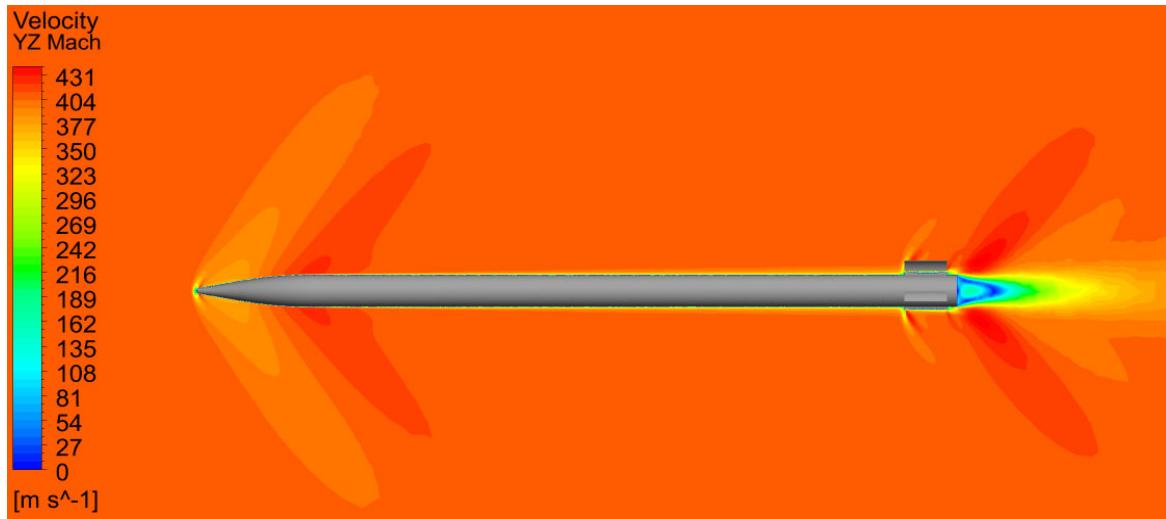


Рисунок 1.13 – Розподіл швидкості повітряного потоку навколо досліджуваного РС (M=1,2)

### **1.15 Верифікація комп'ютерного моделювання. Зіставлення результатів розрахункового моделювання з законом аеродинамічного опору 1958 року з урахуванням коефіцієнту форми РС М-210Ф**

Основною метою досліджень є розробка методики визначення аеродинамічних характеристик модернізованих та перспективних засобів ураження ствольної артилерії та РСЗВ, яка дозволяла б розробляти рекомендації щодо поліпшення балістичних та цільових властивостей. Розрахункове моделювання проводилося в два етапи:

- попередні розрахунки;
- верифікація методу числового моделювання та вивчення аеродинамічної досконалості досліджуємого РС;

Попередні розрахунки були спрямовані на вивчення впливу форми розрахункової області, щільності розрахункової сітки та налаштувань препроцесору ANSYS CFX на результати моделювання. Результатом проведення попередніх розрахунків стало визначення необхідних налаштувань, які

дозволяють моделювати з достатньою точністю аеродинамічні характеристики РС РСЗВ.

Верифікація комп'ютерного моделювання проводилася шляхом співставлення значення коефіцієнту лобового опору РС М-21ОФ, визначеного розрахунково, зі значенням коефіцієнту лобового опору РС М-21ОФ, визначеного за законом аеродинамічного опору 1958 року з урахуванням відомого коефіцієнту форми РС М-21ОФ (рис. 1.14). Коефіцієнт форми РС М-21ОФ для БМ-21 надається в [13] і дорівнює для всіх польотних чисел Маха  $i_{58}=0,903$ .

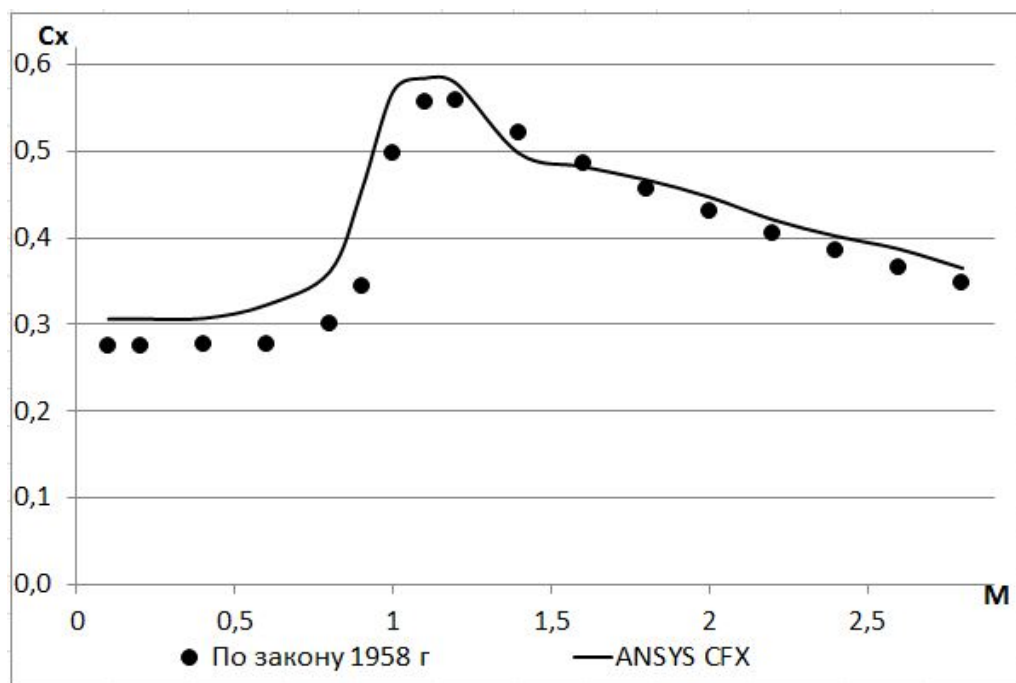


Рисунок 1.14 – Зіставлення значень коефіцієнту  $c_x$  лобового опору в залежності від числа Маха потоку, отриманих розрахунково в ANSYS CFX та за законом опору 1958 року з урахуванням коефіцієнту форми  $i_{58}$ .

Основним критерієм аеродинамічної досконалості РС є залежність коефіцієнту лобового опору  $c_x$  в залежності від числа Маха потоку. Зіставлення значень коефіцієнтів лобового опору  $c_x$ , отриманих розрахунково в ANSYS CFX зі значеннями, отриманими за законом опору 1958 року представлено на рис.1.14.



Таблиця 1.18 – Числові значення коефіцієнту лобового опору, отримані розрахунково, та відповідні значення за законом 1958 року з урахуванням коефіцієнту форми

№№	Число Маха	Коефіцієнт лобового опору ( $C_x$ )	
		Закон 1958 року	ANSYS CFX
1	0,1	0,275	0,3062
2	0,2	0,275	0,3065
3	0,4	0,278	0,3071
4	0,6	0,278	0,3227
5	0,8	0,301	0,3611
6	0,9	0,345	0,4545
7	1,0	0,498	0,569
8	1,1	0,556	0,5841
9	1,2	0,558	0,578
10	1,4	0,522	0,497
11	1,6	0,486	0,4821
12	1,8	0,457	0,467
13	2,0	0,431	0,447
14	2,2	0,405	0,421
15	2,4	0,385	0,402
16	2,6	0,366	0,387
17	2,8	0,349	0,365

Моделювання процесу обтікання РС проводилося для 17 значень чисел Маха, які відповідали швидкості незбуреного повітряного потоку на нескінченності. Значення чисел Маха та Рейнольдса для проведених досліджень знаходяться у інтервалах  $M = 0,1 \div 2,8$ ;  $Re = 2,8 \cdot 10^5 \div 7,8 \cdot 10^6$ . Числові значення коефіцієнту лобового опору, отримані розрахунково та відповідні значення за законом 1958 року з урахуванням коефіцієнту форми  $i_{58}$  РС М-21ОФ представлені в табл. 1.18

З рисунку 1.14 видно, що розбіжність між залежністю 1958 року з урахуванням коефіцієнту форми досліджуваного РС на дозвукових та трансзвукових режимах обтікання з результатами розрахункового моделювання не перевищує 2-3%. На надзвукових режимах обтікання відповідна розбіжність не перевищує 1%. Розбіжність значень коефіцієнту лобового опору, отриманих розрахунково у відповідності з законом 1958 року з урахуванням коефіцієнту форми знаходяться у межах похибки натурних пусків та свідчить про правильний вибір налаштувань препроцесору ANSYS CFX. Оскільки інтегральні аеродинамічні характеристики РС залежать від умов його обтікання повітряним потоком, то можна припустити, що отримані розрахунково розподіли тиску і дотичного напруження на поверхні РС відповідно є такими які відбуваються під час польоту РС М-21ОФ. Аналіз розподілу дотичного напруження на поверхні РС дозволить визначити місця ламінарно-турбулентного переходу (ЛТП) примежового шару.

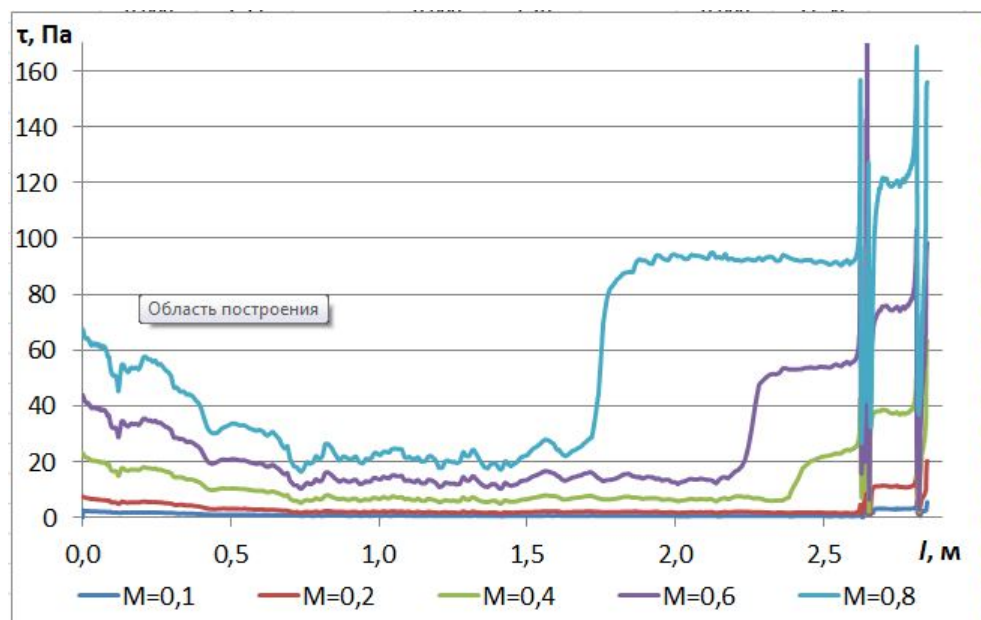


Рисунок 1.15 – Розподіл дотичних напружень на поверхні РС М-21ОФ для дозвукових режимів обтікання повітряним потоком

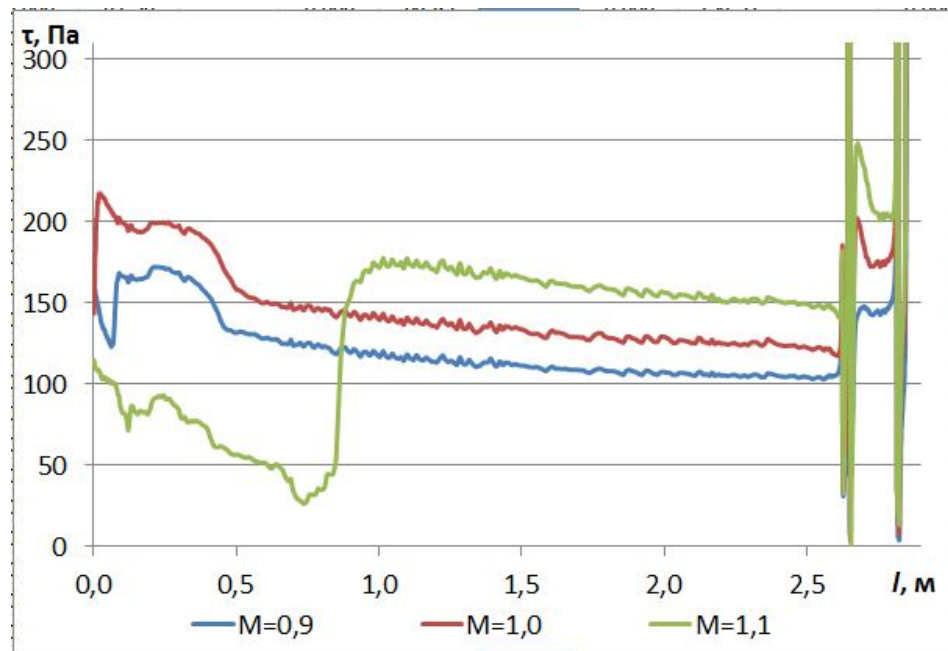


Рисунок 1.16 – Розподіл дотичних напружень на поверхні РС М-21ОФ для трансзвукових режимів обтікання повітряним потоком

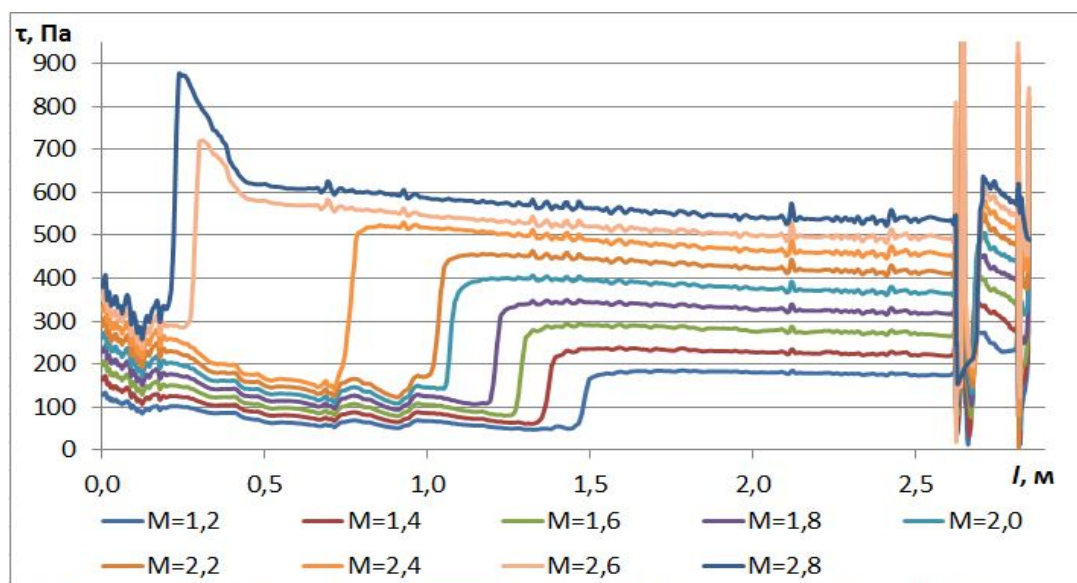


Рисунок 1.17 – Розподіл дотичних напружень на поверхні РС М-21ОФ для надзвукових режимів обтікання повітряним потоком

Відомо [14], що аеродинамічний опір за рахунок тертя повітряного потоку при ламінарному примежовому шарі в 3÷4 рази менший ніж аналогічний опір при турбулентному примежовому шарі. Отже, визначення точки ЛТП в примежовому шарі є практична задача, яка дає відповідь на питання про

можливості подальшого вдосконалення аеродинамічних характеристик досліджуваного РС. Розподіл дотичних напруг на поверхні РС М-21ОФ наведено на рис. 1.15-1.17.

### **1.16 Особливості використання моделі переходу SST при моделюванні обтікання тіл повітряним потоком в льотних умовах**

Режим течії навколо тіла, що рухається в повітрі, залежить від характеристик набігаючого потоку, швидкості руху тіла, його геометрії, матеріалу конструкції (впливає на теплообмін між тілом та середовищем). Для отримання достовірних результатів моделювання важливо задати граничні умови та розрахункові моделі, що відповідають дійсним льотним умовам.

Як відомо, режим течії навколо тіла, що рухається у повітрі, може бути ламінарним для однієї його ділянки, а для іншої – турбулентним, але точка початку розвитку турбулентності залежить, у значній мірі, від конкретних льотних умов. Для моделювання такого типу задач в ANSYS CFX може бути застосована модель переходу Transition Model (також має назви SST Transition Model,  $\gamma - Re_{\theta}$  Transition Model) [15].

До складу цієї моделі ламінарно-турбулентного переходу входить емпірична кореляція для числа Рейнольдса переходу за товщиною втрати імпульсу  $Re_{\theta t} = f(Tu, \lambda_{\theta})$ , яка дозволяє визначити локальні значення  $Re_{\theta t}$  в залежності від локальних значень інтенсивності турбулентності  $Tu$  та градієнту швидкості  $\lambda_{\theta} = \rho \theta^2 / \mu \cdot (dU/ds)$  (рис.1.18). У кожній точці на границі примежового шару визначається значення числа Рейнольдса за товщиною втрати імпульсу

$$Re_{\theta} = \frac{\rho \cdot \theta \cdot U_0}{\mu} \quad (1.17)$$

де  $\theta$  – товщина втрати імпульсу,  $U_0$  – місцева швидкість потоку.

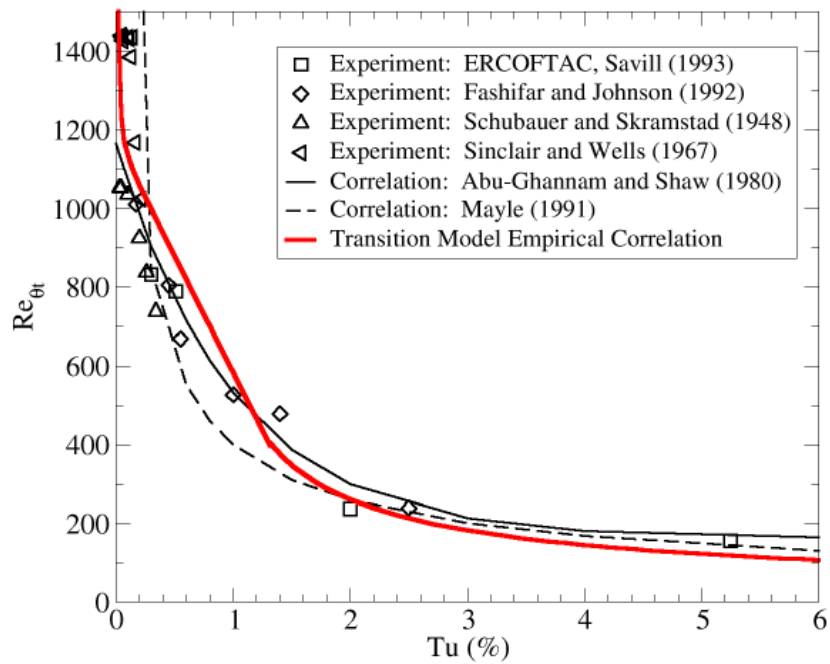


Рисунок 1.18 – Емпірична кореляція для залежності  $Re_{\theta t}$  від інтенсивності турбулентності  $Tu$  для плоскої пластини при нульовому градієнті тиску (позначено червоним кольором) [15]

Далі значення  $Re_{\theta}$  порівнюється з критичним значенням цього параметру для цієї ж точки поверхні тіла, тобто  $Re_{\theta t}$ . Нерівність  $Re_{\theta} > Re_{\theta t}$  означає виникнення перехідного режиму течії, який далі за потоком переходить у турбулентний. Локальне значення  $Re_{\theta t}$  залежить від локального значення  $Tu$ , яке в свою чергу залежить від значення  $Tu$  набігаючого потоку, яке є однією з граничних умов при моделюванні.

Згідно з [16] інтенсивність турбулентності в атмосфері дорівнює 0,01-0,02 %. Для побудови емпіричної кореляції  $Re_{\theta t} = f(Tu, \lambda_{\theta})$  використовувались експериментальні дані обтікання плоскої пластини в аеродинамічній трубі, причому найменше значення  $Tu$  згідно кореляції – 0,027 %, а відповідне значення  $Re_{\theta t}$  дорівнює 1450. При цьому, автор [15] підкреслює ймовірність менших значень  $Tu$  при польоті тіл в атмосфері та рекомендує задавати більш високі значення  $Re_{\theta t}$  у цих випадках.

У роботі [17] показано, що для  $Tu < 0,2\%$  значення числа Рейнольдса переходу  $Re_{tr}$ , отримані для плоскої пластини в аеродинамічній трубі, суттєво відрізняються у залежності від акустичних характеристик труби (рис. 1.19).

Значення  $Re_{tr} = 5 \cdot 10^6$  (або  $0,5 \cdot 10^7$ ) у цій роботі відповідає значенню  $Re_{\theta t} = 1450$  для емпіричної кореляції на рис.1.19.

Водночас з тим, у роботі [18] при надзвуковому обтіканні метеоракети «Облако» отримано в льотних умовах значення  $Re_{tr} = 1,06 \cdot 10^7$  при місцевому числі Маха 1,45.

Таким чином, можна зробити висновок, що в льотних умовах (за відсутності впливу особливостей конструкції аеродинамічної труби) при дозвуковому обтіканні величині  $Tu < 0,02\%$  відповідають значення  $Re_{\theta t} > 1450$  та  $Re_{tr} > 1,06 \cdot 10^7$ . Однак, за відсутності даних інших дозвукових експериментальних досліджень залежності  $Re_{\theta t} = f(Tu)$  при  $Tu < 0,02\%$  вибір значень  $Re_{\theta t}$  у діапазоні  $Re_{\theta t} > 1450$  для конкретних льотних умов є відкритим питанням.

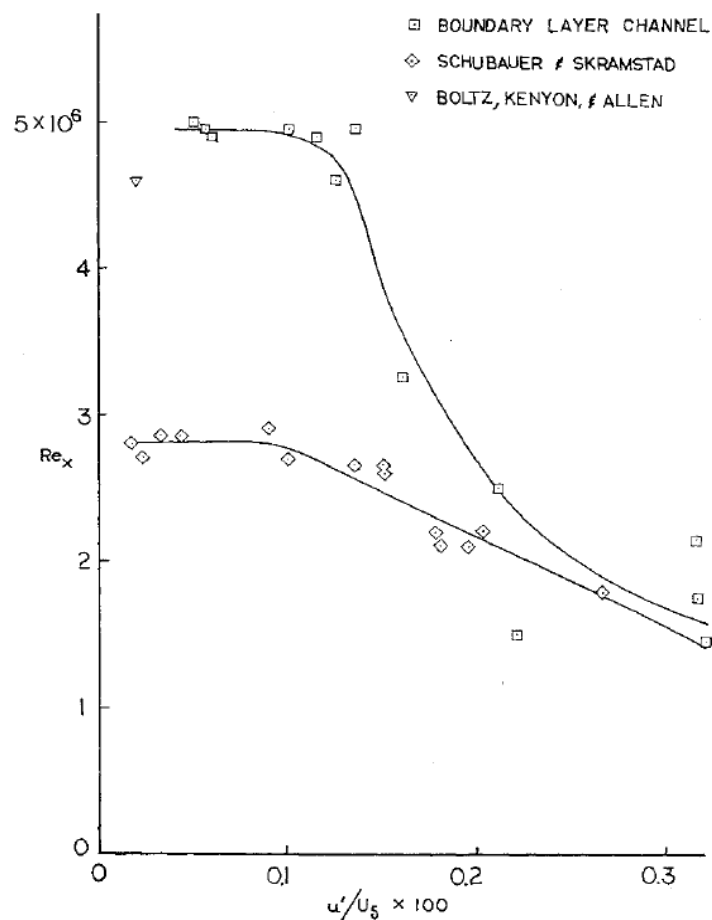


Рисунок 1.19 – Значення  $Re_{tr}$  в залежності від інтенсивності турбулентності  $Tu$ , отримані для плоскої пластини у різних дозвукових аеродинамічних трубах [17]

### 1.17 Вимоги до сітки при використанні моделі переходу SST $\gamma$ - $Re\theta$

Згідно з [15] для коректної роботи моделі переходу розрахункова сітка повинна відповідати наступним умовам:

- $y^+ = 0,001 \div 1$ ; значення  $1 < y^+ < 8$  призводять лише до незначного переміщення переходу уздовж потоку (рис. 1.20) і є також прийнятними в інженерних розрахунках ;

- коефіцієнт росту пристінних елементів сітки (Expansion Factor) має бути у діапазоні 1,05-1,1; при значеннях цього параметру 1,2  $\div$  1,4 спостерігається незначне зміщення точки переходу вгору по потоку (рис. 1.21);

- кількість вузлів сітки уздовж потоку має бути не менш 75-100; якщо перехід протікає на короткій дистанції (наприклад, обумовлений виникненням відриву потоку біля кромки чи уступу) потрібно забезпечити достатню кількість елементів сітки уздовж цієї ділянки.

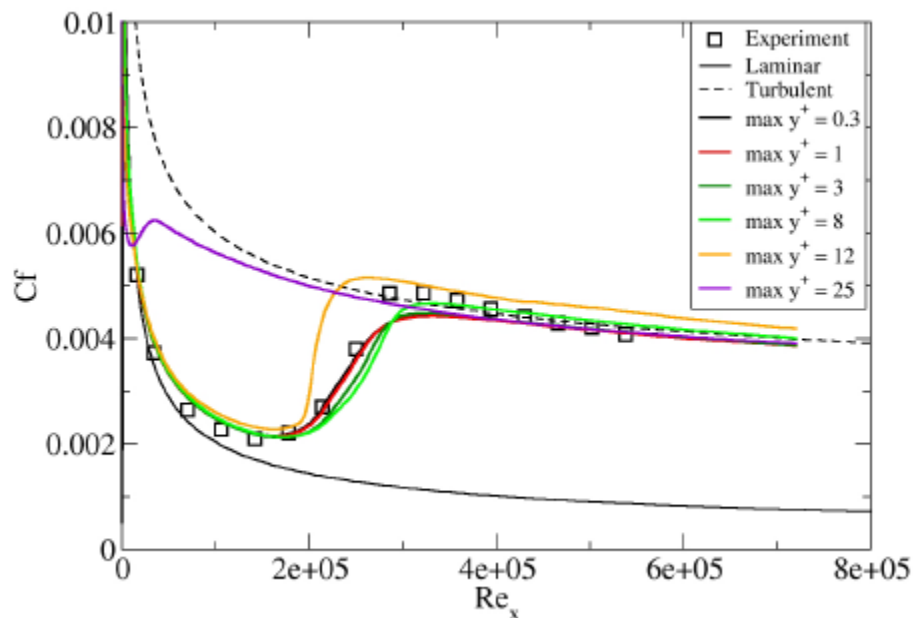


Рисунок 1.20 – Дослідження впливу  $y^+$  на визначення положення ламінарно-турбулентного переходу при обтіканні плоскої пластини [15]

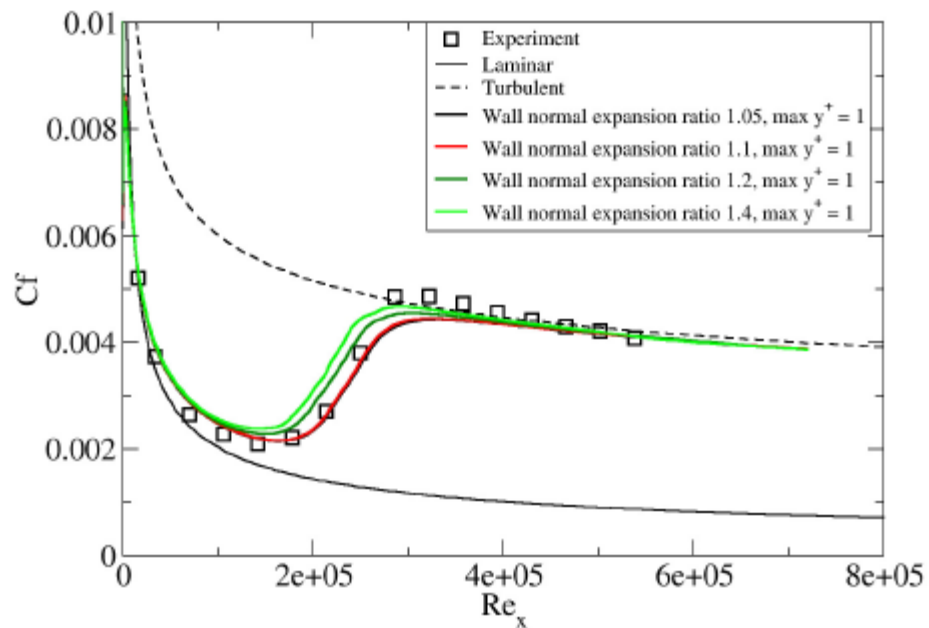


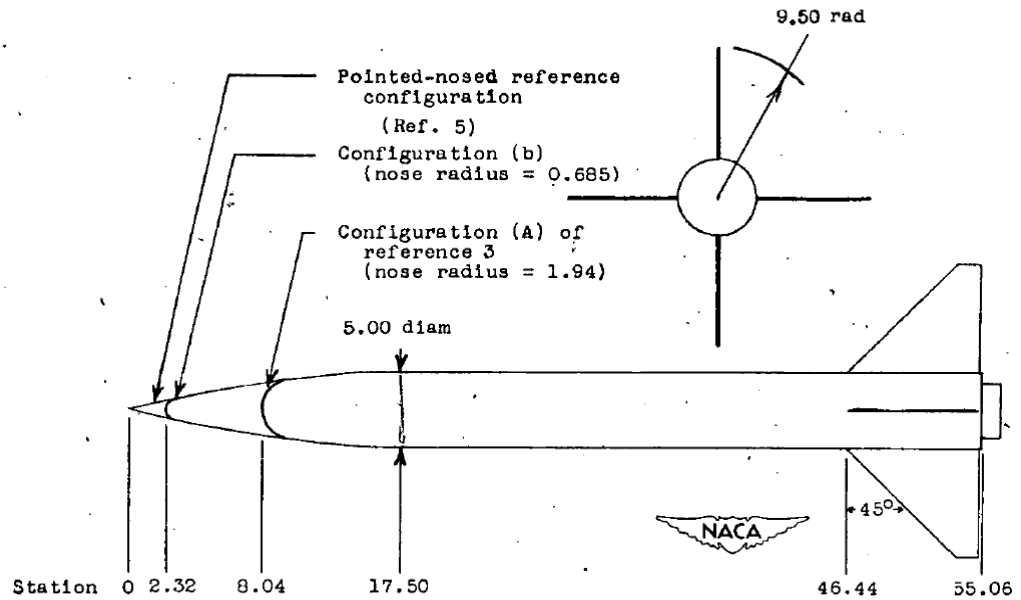
Рисунок 1.21 – Дослідження впливу коефіцієнту росту пристінних елементів сітки (Expansion Factor) на визначення положення ламінарно-турбулентного переходу при обтіканні плоскої пластини [15]

### 1.18 Верифікація розрахункової моделі PC в ANSYS CFX на основі льотних даних NASA

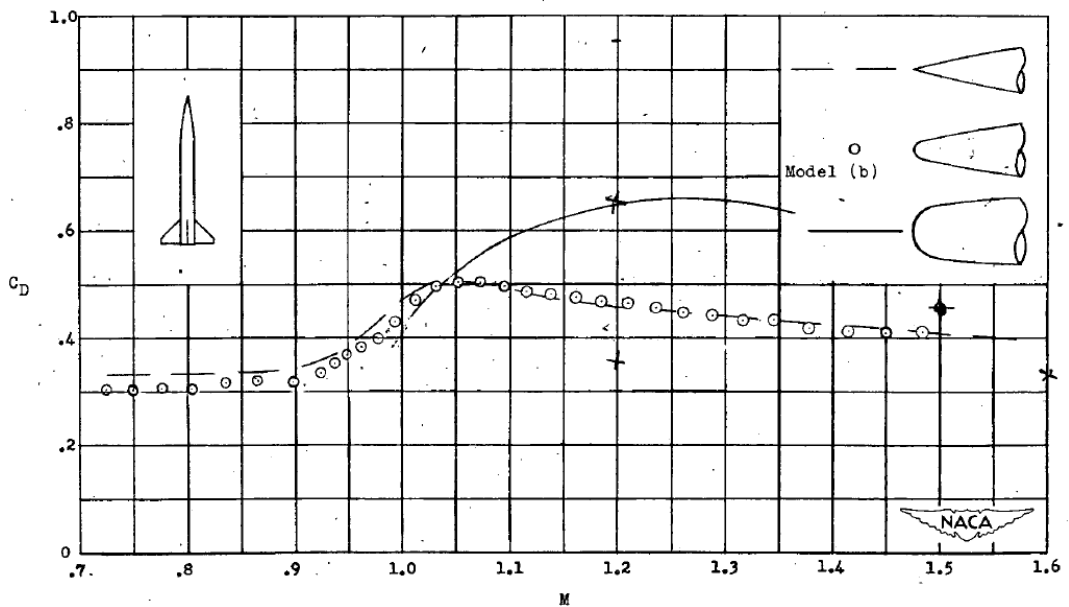
Серед відкритих експериментальних даних по дослідженню коефіцієнту опору ракет з фюзеляжем циліндричної форми в льотних умовах найбільш повними є дані NASA [19], [20]. Геометрія досліджуваної в цих роботах моделі зображена на рис. 22,а. Моделювання в ANSYS CFX в даній роботі виконувалось для конфігурації носика b (configuration b на рис. 1.22,а). Тіло має довжину  $L = 1339,6$  мм, діаметр міделевого перетину  $D = 127$  мм, 4 крила товщиною 2,3 мм. Відношення  $L/D = 10,548$  ( $D/L = 0,0948$ ). У цих експериментах швидкість руху тіла фіксувалась за допомогою постійно-хвильового доплеровського радару (CW Doppler radar unit AN/TPS-5), встановленого на місці запуску ракети. Коефіцієнт опору  $C_x$  (або  $C_D$ ) визначався на основі величини гальмування тіла на вертикальній траєкторії руху ракети після відключення двигуна. Отримані експериментальні значення коефіцієнта  $C_x$  наведено на рис. 1.22,б. Згідно з [21]



похибка визначення числа Маха таким методом складе  $\pm 0,01$ , а похибка визначення  $C_x$  дорівнює  $\pm 0,0007$ .



а) розміри ракети (у дюймах)



б) значення коефіцієнту повного опору ракети (за площею міделевого перетину) в залежності від числа Маха  $M_\infty$

Рисунок 1.22 – Геометрія та результати досліджень ракети NACA [19]

### 1.19 Дозвуковий режим обтікання

Льотні дані [19], [20] використовувались для вибору моделі турбулентності в залежності від режиму обтікання (дозвуковий і надзвуковий) та верифікації моделі переходу. Так, згідно рис.1.22,б значенням  $M_\infty = 0,72 \div 0,8$  відповідає  $C_x = 0,31$ . Оскільки модель переходу чутлива до параметрів сітки біля стінки, було протестовано декілька варіантів налаштувань параметрів сітки.

Розрахунковий домен для серії тестів №1 має форму напівсфери (рис. 1.23). Розрахункова сітка має 16,4 млн. елементів. Пристінний шар сітки має 70 призматичних елементів з висотою першого елемента 0,001 мм та коефіцієнтом росту 1,1 (табл. 1.20). Максимальний розмір поверхневих елементів сітки (на поверхні тіла) – 13 мм, тим самим забезпечується кількість елементів сітки уздовж потоку не менше 107. Середнє значення  $y^+ = 0,6$ . Параметри турбулентності на вході в домен для всіх подальших розрахунків з використанням моделі переходу задавались наступні:  $Tu = 0,01\%$ , відношення турбулентної в'язкості до молекулярної  $\mu_t/\mu = 1$ .

Розрахунки з використанням моделі  $\gamma$ - $Re_\theta$  показали, що незалежно від значень  $Re_{\theta t}$  (1400, 1800 чи 3000) ламінарна ділянка практично відсутня - перехід настає на носовій частині снаряда (табл. 1.21), а  $C_x = 0,44$  у всіх випадках (табл.1.19), що вище експериментального значення на 42%.

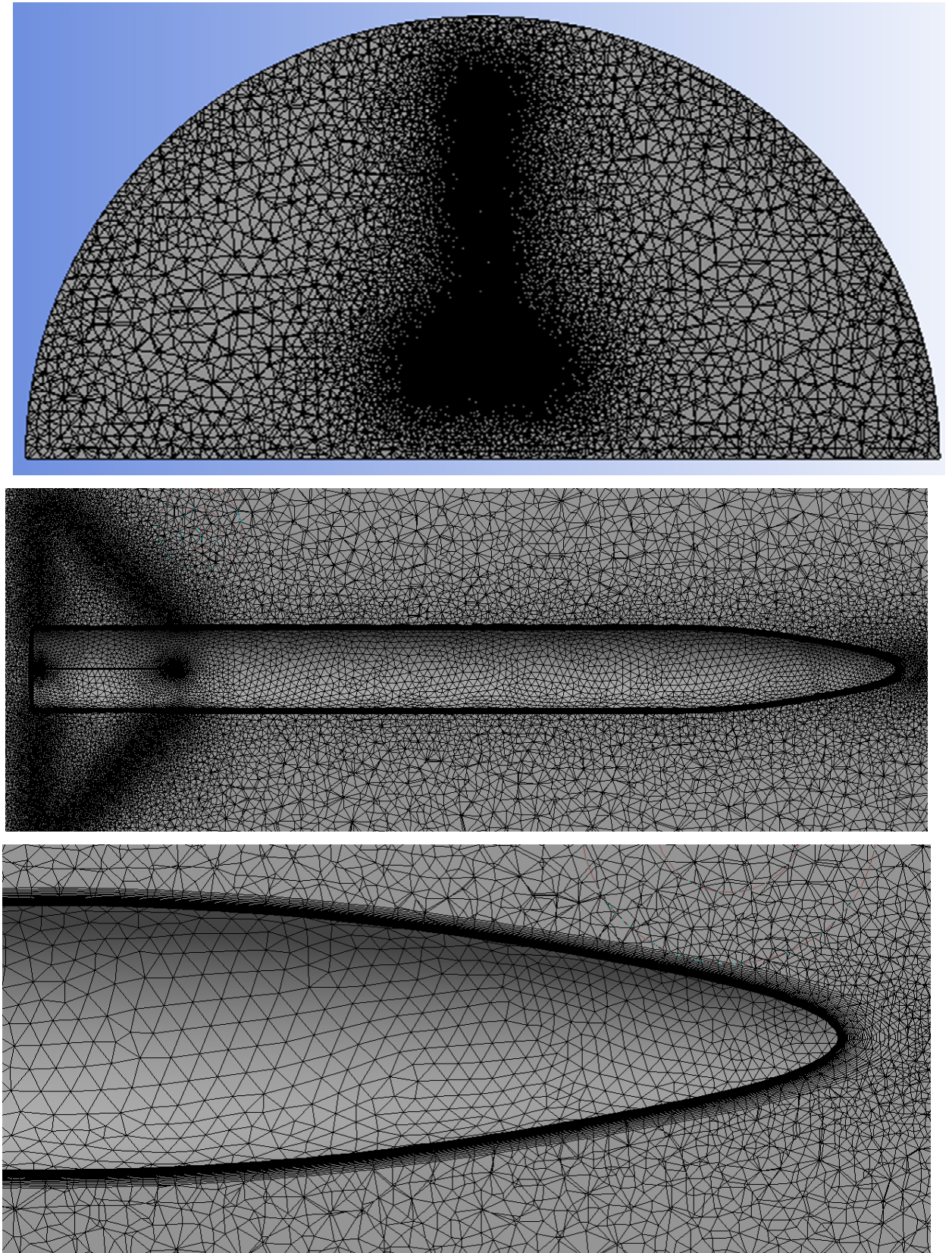


Рисунок 1.23 – Розрахункова сітка для серії тестів №1

Таблиця 1.19 – Результати моделювання для серії тестів № 1 в залежності від налаштувань моделі турбулентності ( $M_\infty=0,725$ ,  $p_\infty=101325$  Па,  $T_\infty=15$  °С)

Ва- ріант №	$Re_{0t}$	$c_x^{ANSIS}$	$C_x$	$\frac{c_x^{ANSIS} - c_x^{табл}}{c_x^{табл}} \cdot 100\%$
1	- (ламінарна модель)	- (сходимість відсутня)	0,31	-
2	1400	0,44		42%
3	1800	0,44		42%
4	3000	0,44		42%

Також для цієї серії тестів було виконано розрахунок з використанням ламінарної моделі, але рішення не зійшлося (варіант № 1, табл. 1.19). Тому для серії тестів № 2 з моделі ракети було виключено оперення; льотні дані для моделі без оперення представлені у [20]. Розрахунки проводились з використанням ламінарної моделі течії. Для варіанту №1 (табл. 1.23) параметри пристінного шару сітки та розмір поверхневих елементів ідентичні серії тестів № 1. Для варіанту № 2 та №3 розмір поверхневих елементів було зменшено до 4 мм (рис.1.25). Оскільки це призводить до надмірного збільшення кількості елементів сітки, параметри пристінного шару були змінені з метою зменшення кількості елементів сітки та, водночас, відповідали вимогам моделі переходу (варіанти 2,3 табл. 1.23).

Таблиця 1.20 – Налаштування розрахункової сітки для серії тестів № 1 ( $M_\infty=0,725$ ,  $p_\infty=101325$  Па,  $T_\infty=15$  °С)

Форма домена	Кількість елементів сітки, млн.	Висота першого елемента сітки, мм	Кількість пристінних призматичних елементів	Коефіцієнт росту	Розмір найбільшого елемента поверхні, мм	Середнє значення $y^+$
Напів сфера	16,4	0,001	70	1,1	13	0,6



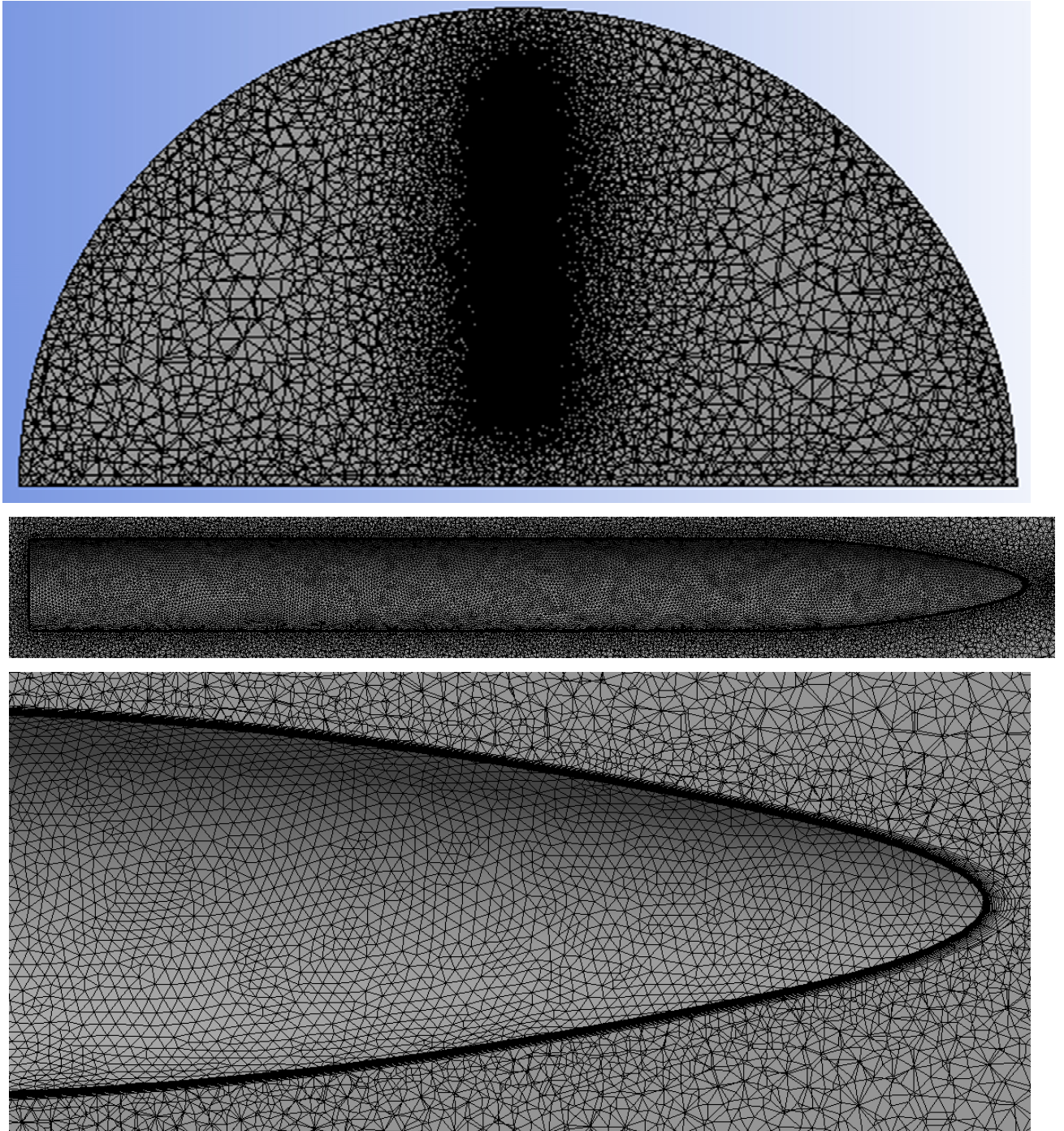


Рисунок 1.24 – Розрахункова сітка для варіантів 2,3 серії тестів № 2

Таблиця 1.21 – Розташування ламінарно-турбулентного переходу для серії тестів № 1 ( $M_\infty=0,725$ ,  $p_\infty=101325$  Па,  $T_\infty=15$  °С)

Варіант №	$Re_{0t}$	Положення розвиненого турбулентного режиму відносно системи координат, розташованої в носовій частині
2	1400	X=80 мм
3	1800	X=130 мм
4	3000	X=150 мм

Результати виконання серії тестів № 2 показали, що розмір поверхневих елементів суттєво впливає на результати моделювання. Отримане значення  $C_x$  практично співпадає з експериментальним при максимальному розмірі поверхневих елементів рівному 4 мм. Зіставляючи варіанти 2 і 3 (табл. 1.22), можна зробити висновок, що для ламінарної моделі результати моделювання не залежать від тиску набігаючого потоку  $p_\infty$ .

Також результати тестів № 2 вказують на те, що для дозвукових швидкостей польоту режим течії ламінарний (різниця експериментального та отриманого в ANSYS CFX для ламінарної моделі значення  $C_x$  не перевищує 6,5% (табл. 1.22)), а також, що неприйнятна схожимість варіанту № 1 серії тестів №1 ймовірно спричинена виникненням нестационарних процесів під впливом оперення, які не можуть бути вирішені ламінарною моделлю. Тому було виконано додатково серію тестів № 3, у якій форма домена є сектором полусфери з центральним кутом  $90^\circ$  (рис. 1.25). Оскільки задача є осесиметричною, то така постановка задачі є коректною та дозволяє зменшити кількість елементів сітки і покращити схожимість розрахунку завдяки наявності тільки одного крила. Також до геометрії ракети було додано сопло. Для моделювання потоку через бічні грані сектора полусфери використовується періодичний інтерфейс.

Таблиця 1.22 – Результати моделювання для серії тестів № 2 в залежності від параметрів  $p_\infty$  та  $T_\infty$  на вході в домен ( $M_\infty=0,725$ , ламінарна модель течії, геометрія ракети – без оперення)

Варіант №	Тиск $p_\infty$ , Па	Температура $T_\infty$ , °C	$c_x^{ANSIS}$	$C_x$	$\frac{c_x^{ANSIS} - c_x^{табл}}{c_x^{табл}} \cdot 100\%$
1	101325	15	0,283	0,23	23%
2	80000	0	0,245		6,5%
3	101325	15	0,245		6,5%

Таблиця 1.23 – Налаштування розрахункової сітки для серії тестів № 2 ( $M_\infty=0,725$ , ламінарна модель течії, геометрія ракети – без оперення)

Варіант №	Форма домена	Кількість елементів сітки, млн.	Висота першого елемента сітки, мм	Кількість пристінних призматичних елементів	Коефіцієнт росту	Розмір найбільшого елемента поверхні, мм
1	Напів сфера	1,7	0,001	70	1,1	13
2	Напів сфера	4,6	0,006	30	1,15	4
3	Напів сфера	4,6	0,006	30	1,15	4



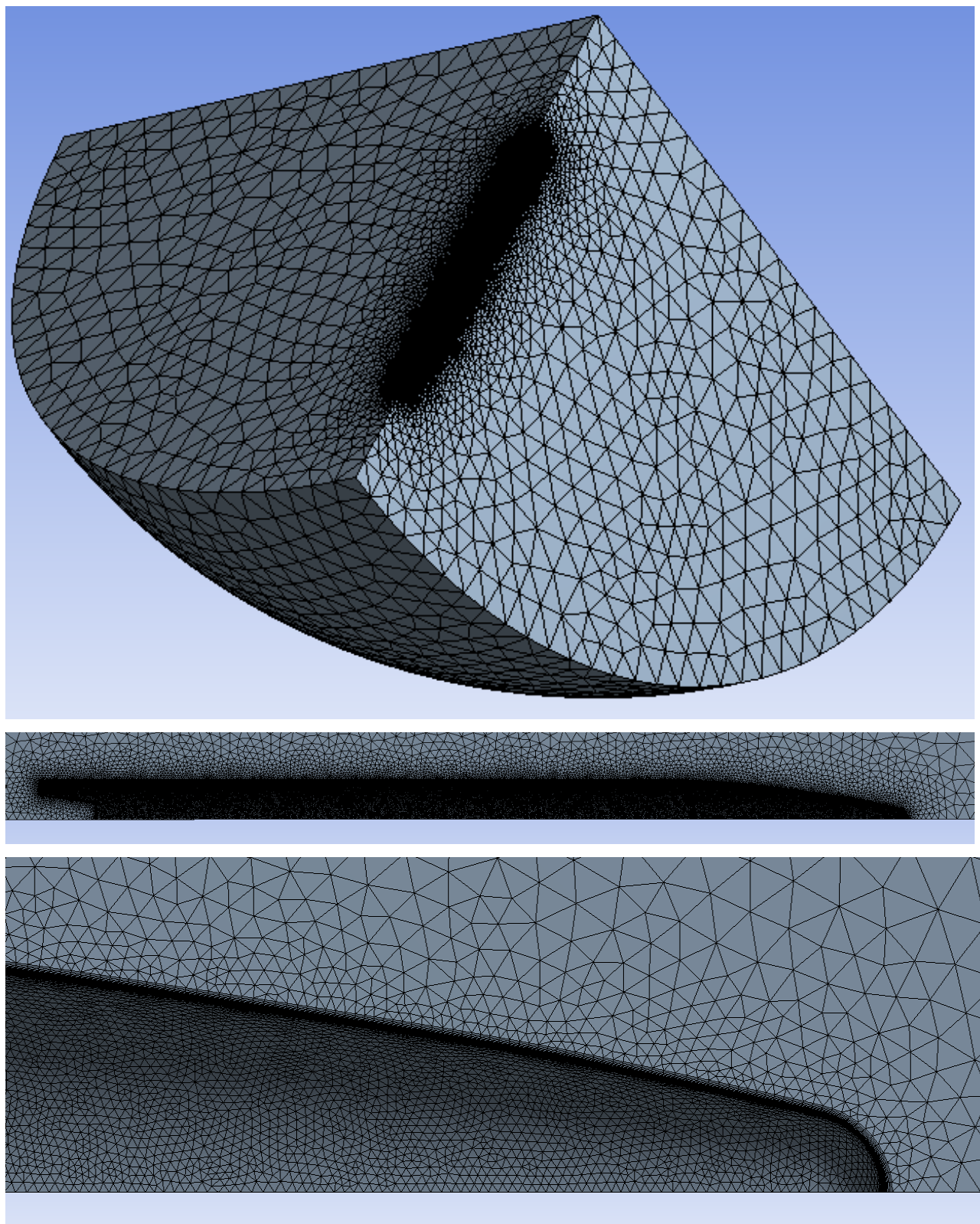


Рисунок 1.25 – Розрахункова сітка для серії тестів № 3

Оскільки значення  $y^+$  та коефіцієнту росту пристінних елементів сітки для серії тестів № 1 відповідають вимогам використання моделі  $\gamma - Re_{\theta}$ , то ймовірною



причиною раннього переходу (табл. 1.21) є недостатня кількість елементів уздовж потоку. Тому для серії тестів № 3 максимальний розмір поверхневих елементів було зменшено до 2 мм (табл. 1.25). Для такої сітки ламінарно-турбулентний перехід фіксувався приблизно посередині довжини ракети (табл.1.26). Оскільки домен є сектором полусфери, то при такому розмірі поверхневих елементів розмір сітки залишається прийнятним. Отримане у результаті моделювання, значення  $C_x$  помножується на 4.

Розрахунки з використанням ламінарної моделі течії для секторної моделі домена (варіанти 1,2 серії тестів № 3 (табл. 1.24)) показали гарну сходиність та близькі до експериментального значення  $C_x$  (різниця у межах 7,7%). Гарна сходиність розрахунку, вочевидь, обумовлена наявністю тільки одного крила, внаслідок чого нестационарні явища за вихідною кромкою крила не є критичними. Також можна відмітити, що розрахунки з використанням ламінарної моделі практично не залежать від тиску  $p_\infty$ .

Значення  $C_x$ , що були визначені з використанням моделі переходу для секторної моделі домена (варіанти 3-5 серії тестів № 3 (табл. 1.24)) є більш наближеними до експериментального значення, порівняно з серією тестів №1, але ще залишаються надмірно завищеними (на 36-38%). Слід також зазначити, що значення  $C_x$  та початок переходу (табл. 26), отримані з використанням моделі переходу, не суттєво залежать від тиску  $p_\infty$  та температури  $T_\infty$ .

Таблиця 1.24 – Результати моделювання для серії тестів № 3 ( $M_\infty=0,725$ , форма домена – сектор напівсфери)

Ва- ріант №	Тиск $p_\infty$ , Па	Темпе- ратура $T_\infty$ , °C	$Re_{\theta t}$	$c_x^{ANSIS}$	$C_x$	$\frac{c_x^{ANSIS} - c_x^{табл}}{c_x^{табл}} \cdot 100\%$
1	101325	15	- (ламінарна модель)	0,332	0,31	7,1%
2	80 000	15	-	0,334		7,7%

Ва- ріант №	Тиск $p_{\infty}$ , Па	Темпе- ратура $T_{\infty}$ , °C	$Re_{\theta t}$	$c_x^{ANSIS}$	$C_x$	$\frac{c_x^{ANSIS} - c_x^{табл}}{c_x^{табл}} \cdot 100\%$
			(ламінарна модель)			
3	101325	15	3000	0,426		37,4%
4	80000	15	3000	0,429		38,4%
5	80000	0	3000	0,423		36,5%

Таблиця 1.25 – Налаштування для серії тестів № 3 ( $M_{\infty}=0,725$ , форма домена – сектор напівсфери)

Варіант №	Форма домена	Кількість елементів сітки, млн.	Висота першого елемента сітки, мм	Кількість пристінних призматичних елементів	Коефіцієнт росту	Розмір найбільшого елемента поверхні, мм	Середнє значення $y^+$
1	Сектор напівсфери	3,6	0,006	30	1,15	2	-
2							-
3							2,8
4							2,3
5							2,2

Таблиця 1.26 – Розташування ламінарно-турбулентного переходу для серії тестів № 3 ( $M_{\infty}=0,725$ , форма домена – сектор напівсфери)

Варіант №	$Re_{\theta t}$	Точка початку переходу	Точка кінця переходу	$c_x^{ANSIS}$
3	3000	X=750 мм	X=800 мм	0,426
4	3000	X=720 мм	X=790 мм	0,429
5	3000	X=850 мм	X=920 мм	0,423

Таким чином, на підставі проведених числових досліджень та зіставлення результатів з льотними даними можна сформулювати наступні рекомендації для

розрахунку обтікання потоком повітря ракет та снарядів при **дозвуковій швидкості** набігаючого потоку:

- бажано використовувати ламінарну модель течії;
- $y^+$  не повинен перевищувати 8;
- для запобігання надмірного збільшення розміру сітки коефіцієнт росту пристінних елементів сітки (Expansion Factor) допустимо задавати рівним 1,15, а кількість пристінних елементів – 30;
- розмір поверхневих елементів сітки слід вибрати таким чином, щоб вздовж тіла налічувалось не менше 300 елементів;
- для покращення сходимості розрахунку та зменшення розміру сітки можливе використання секторної моделі розрахункового домена.

## 1.20 Надзвуковий режим обтікання

Верифікація розрахункової моделі ANSYS CFX для надзвукового режиму польоту виконувалась для  $M_\infty=1,5$ . Розрахунковий домен є полусферою. Параметри сітки представлені у табл.1.28. Результати розрахунків з використанням ламінарної та SST  $\gamma$ - $Re_\theta$  моделей показали надмірно завищені результати порівняно з льотними даними, на 43,4% та 52,4% відповідно (табл. 1.27).

Для виявлення причини завищення значення  $C_x$  було визначено його складові (табл. 1.29 та 1.30). Видно, що для ламінарного режиму доля тертя складає незначну частину від сумарного значення  $C_x$ , лише 3,4%, а для розрахунку з використанням моделі переходу (при  $Re_{\theta t} = 1450$ ) коефіцієнт тертя практично співпадає з коефіцієнтом головного опору і складає 16,7% від  $C_x$ . При цьому в останньому випадку ламінарно-турбулентний перехід виникає на носовій частині ракети, що можна побачити на графіку розподілу дотичних напруг вздовж поверхні ракети (рис. 1.26). У даному випадку точці початку ламінарно-турбулентного переходу відповідає значення  $Re_x = 0,4 \cdot 10^7$  (визначено за швидкістю  $U_\infty$ ). Місцеве число Маха у цій точці дорівнює  $M_e=1,35$ , а визначене

за місцевою швидкістю  $U$  число Рейнольдса  $Re_{tr} = 0,4 \cdot 10^7$ , що є значно нижчим, ніж  $Re_{tr} = 1,06 \cdot 10^7$  (при місцевому числі  $Ma_e=1,45$  та  $Ma_\infty=1,41$ ) згідно льотних даних [18].

Таблиця 1.27 – Результати моделювання для надзвукового режиму обтікання ( $Ma_\infty=1,5$ ,  $p_\infty=80\ 000$  Па,  $T_\infty=15$  °С)

Ва- ріант №	$Re_{\theta t}$	$c_x^{ANSIS}$	$C_x$	$\frac{c_x^{ANSIS} - c_x^{табл}}{c_x^{табл}} \cdot 100\%$
1	- (ламінарна модель)	0,588	0,41	43,4%
2	1450	0,625		52,4%

Таблиця 1.28 – Налаштування розрахункової сітки для надзвукового режиму обтікання ( $Ma_\infty=1,5$ ,  $p_\infty=80\ 000$  Па,  $T_\infty=15$  °С)

Форма домена	Кількість елементів сітки, млн.	Висота перш ого елемента сітки, мм	Кількість пристінних призматичних елементів	Коефіцієнт росту	Розмір найбільшого елемента поверхні, мм	Середнє значення $y^+$
Напівсфера	14,9	0,006	30	1,15	2	3,9

Таблиця 1.29 – Складові коефіцієнту опору  $C_x$ , за результатами моделювання в ANSYS CFX з використанням ламінарної моделі течії для  $M_\infty=1,5$

Назва коефіцієнту	Формула, згідно якої визначається відповідна сила	Значення коефіцієнту	Доля складової, віднесена до $C_x$
Коефіцієнт тертя	$\int_S \tau_x dS$	0,020	3,4%
Коефіцієнт головного опору	$\int_{S_{noc}} (p - p_\infty) \cos(nx) dS$	0,105	17,9%
Коефіцієнт донного опору	$\int_{S_{дон}} (p - p_\infty) \cos(nx) dS$	0,336	57,4%
Коефіцієнт головного опору оперіння	$\int_{S_{noc}} (p - p_\infty) \cos(nx) dS$	0,066	11,3%
Коефіцієнт донного опору оперення	$\int_{S_{крдон}} p dS - p_\infty S_{крдон}$	0,058	9,9%
Сумарний коефіцієнт опору $C_x$		0,585	

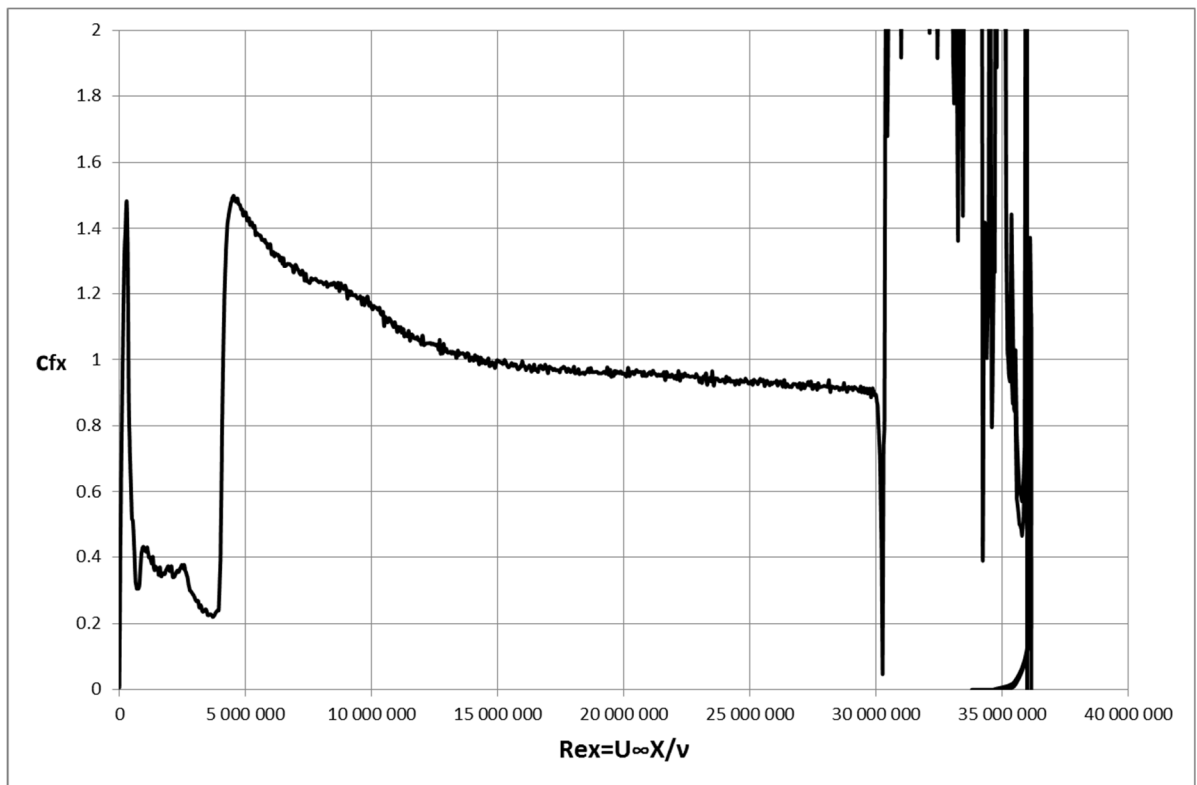
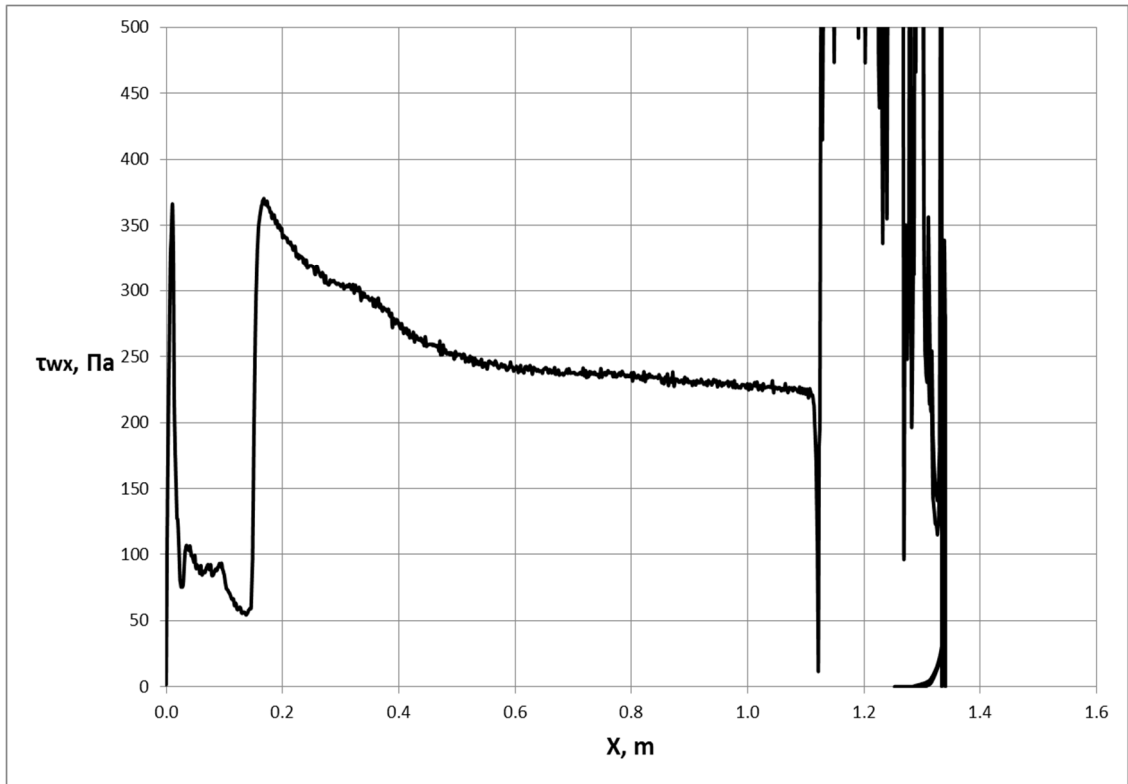


Рисунок 1.26 – Розподіл дотичних напруг вздовж поверхні ракети у розмірному та безрозмірному вигляді

Таблиця 1.30 – Складові коефіцієнту опору  $C_x$ , визначені за результатами моделювання в ANSYS CFX з використанням моделі переходу для  $M_\infty=1,5$

Назва коефіцієнту	Формула, згідно якої визначається відповідна сила	Значення коефіцієнту	Доля складової, віднесена до $C_x$
Коефіцієнт тертя	$\int_S \tau_x dS$	0,102	16,7%
Коефіцієнт головного опору	$\int_{S_{нос}} (p - p_\infty) \cos(nx) dS$	0,106	16,5%
Коефіцієнт донного опору	$\int_{S_{дон}} (p - p_\infty) \cos(nx) dS$	0,298	48%
Коефіцієнт головного опору оперення	$\int_{S_{нос}} (p - p_\infty) \cos(nx) dS$	0,065	10,1%
Коефіцієнт донного опору оперення	$\int_{S_{кр дон}} p dS - p_\infty S_{кр дон}$	0,054	8,4%
Сумарний коефіцієнт опору $C_x$		0,625	

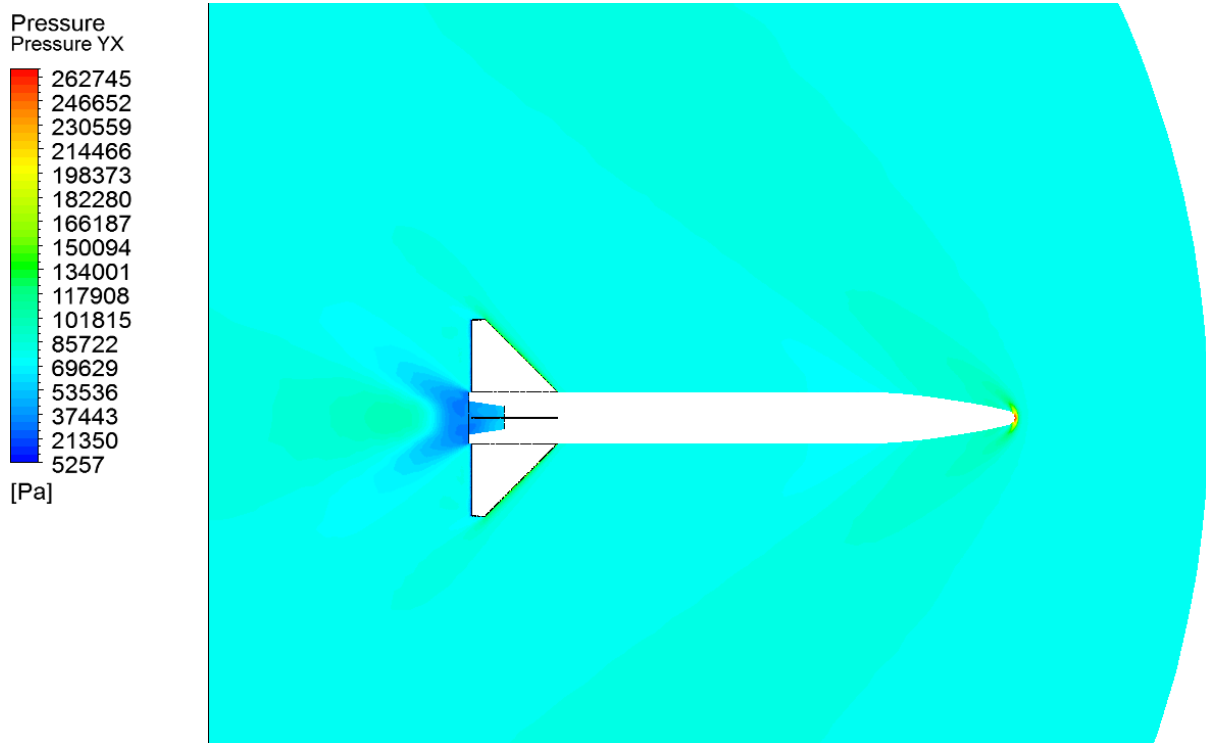


Рисунок 1.27 – Поле тиску для розрахунку з використанням моделі ламінарної течії при  $M_\infty=1,5$ ,  $p_\infty=80\,000$  Па,  $T_\infty=15$  °С

Вагоме значення в обох випадках мають опір головної частини та донний опір. Стрибок ущільнення, розташований на головній частині (рис. 1.27), супроводжується ростом тиску, за рахунок чого опір головної частини збільшується.

В роботі [20] представлені експериментальні (льотні дані) значення коефіцієнту донного опору (рис. 1.28). Екстраполюючи ці данні можна зробити висновок, що для  $M_\infty=1,5$  величина коефіцієнту донного опору не повинна перевищувати  $0,2\div 0,24$ . В ANSYS CFX отримано суттєво завищені значення цього коефіцієнту:  $0,336$  та  $0,298$  відповідно для ламінарної моделі та моделі переходу.

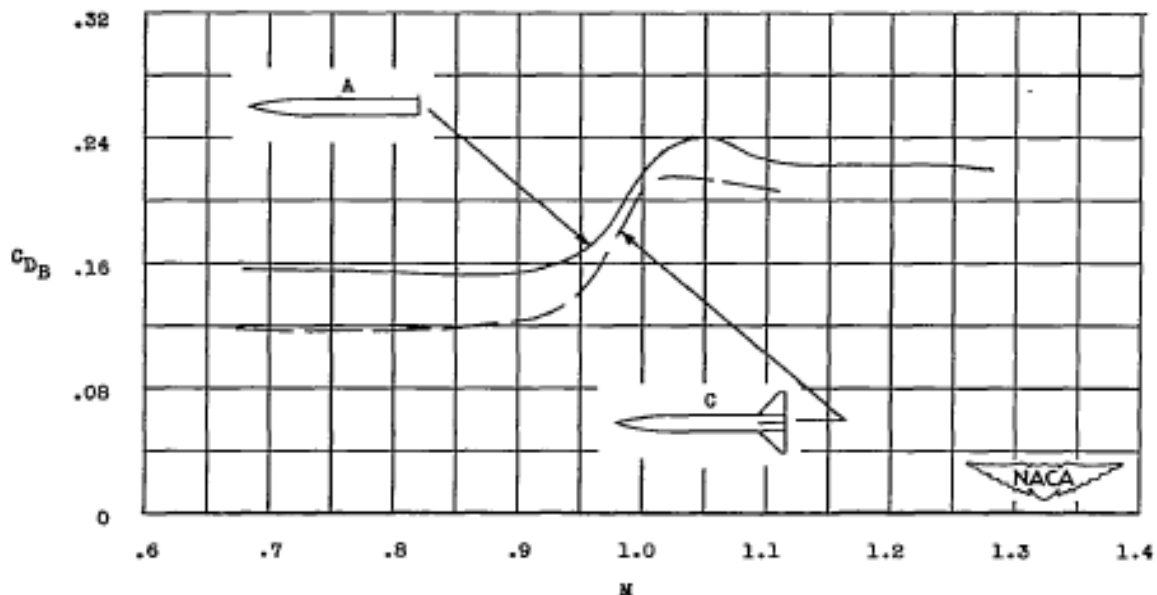


Рисунок 1.28 – Значення коефіцієнту донного опору ракети (за площею міделевого перетину) в залежності від числа Маха  $M_\infty$  [20]

Ймовірно, завищені значення  $C_x$  для надзвукового обтікання обумовлені похибкою при моделюванні стрибка ущільнення та конструктивними особливостями соплового апарату, які не можуть бути враховані при моделюванні. Розрахунок з використанням моделі переходу при  $Re_{\theta t} \gg 1450$  дозволить лише несуттєво зменшити значення  $C_x$  за рахунок збільшення області ламінарного режиму. Тому на даному етапі неможливо віддати перевагу ламінарній моделі або моделі переходу SST  $\gamma$ - $Re_\theta$  в розрахунках при



надзвуковому обтіканні. Однак, зокрема, теоретичні розрахунки ламінарного та турбулентного примежового шару у роботі [20] вказують на те, що примежовий шар є турбулентним на переважній частині ракети НАСА при надзвуковому обтіканні. Тому використання моделі переходу SST  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  при надзвуковому обтіканні є обґрунтованим.

### 1.21 Результати моделювання снаряда типу ОФ-21 при обтіканні його під кутом атаки $5^{\circ}$

Враховуючи результати досліджень, що наведені у попередньому розділі, при моделюванні обтікання снаряда типу М-21ОФ під кутом атаки  $5^{\circ}$  використовувалась ламінарна модель при  $M_{\infty} < 1$ , та модель переходу ( $Re_{\theta t} = 1450$ ) при  $M_{\infty} > 1$ .

Розрахунковий домен має форму напівсфери (рис. 1.29). Розрахункова сітка складається з 13,3 млн. елементів. Пристінний шар сітки має 30 призматичних елементів з висотою першого елементу 0,006 мм та коефіцієнтом росту 1,15. Максимальний розмір поверхневих елементів сітки – 4 мм, тим самим забезпечується кількість елементів сітки уздовж потоку не менше 700.

Момент тангажу для елементарної ділянки поверхні в ANSYS CFX визначається як векторний добуток сил тиску і в'язкості:

$$M_{zi} = \vec{r} \times \vec{F}_{ni} + \vec{r} \times \vec{F}_{\tau i} \quad (1.18)$$

де  $\vec{F}_{ni}$  – сила тиску, що діє на елементарну ділянку об'єкту;  $\vec{F}_{\tau i}$  – сила в'язкості, що діє на елементарну ділянку поверхні об'єкту.

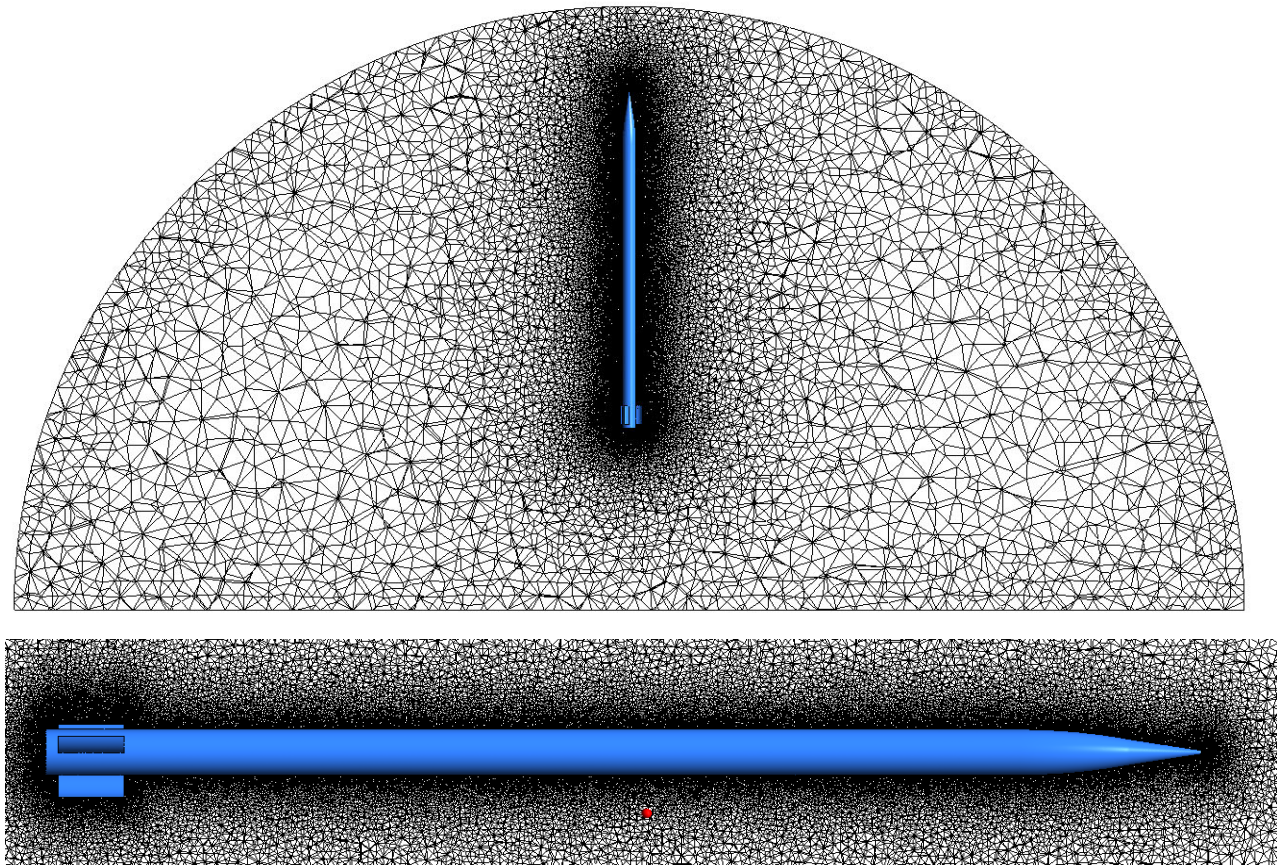


Рисунок 1.29 – Розрахункова сітка, що використовувалась при розрахунку обтікання снаряда М-21ОФ під кутом атаки  $5^\circ$

Сумарний момент тангажу  $M_z$  відносно осі  $z$  системи координат, розташованої на носіку снаряда, визначається як додаток моментів  $M_{zi}$  для всіх елементарних ділянок його поверхні. Коефіцієнт моменту тангажу визначається за формулою

$$m_z = \frac{M_z}{0,5 \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot S \cdot L}, \quad (1.19)$$

де  $L$  – довжина снаряда, м;  $S$  – площа міделевого перетину,  $m^2$ .

Таблиця 1.31 – Аеродинамічні коефіцієнти та координата центру тиску  $x_{\text{цт}}$ , отримані за результатами моделювання обтікання снаряда М-21ОФ під кутом атаки  $5^\circ$  в ANSYS CFX

$M_\infty$	$C_x$	$C_{x \text{ дон}}$	$C_y$	$m_z$	$x_{\text{цт}}, \text{ м}$
0.1	0.32	0.131	0.841	0.603	2.123
0.3	0.322	0.159	0.776	0.55	2.098
0.5	0.323	0.183	0.804	0.58	2.135
0.7	0.321	0.183	0.888	0.661	2.205
0.9	0.357	0.191	0.901	0.673	2.213
1.1	0.683	0.275	0.931	0.692	2.202
1.3	0.651	0.259	0.883	0.643	2.159
1.5	0.612	0.235	0.855	0.612	2.12
1.7	0.57	0.213	0.826	0.58	2.077
1.9	0.534	0.194	0.789	0.538	2.018
2.1	0.504	0.177	0.749	0.494	1.951

Відстань від носика снаряда до центру тиску  $x_{\text{цт}} = M_z / Y$ , де  $Y$  – нормальна аеродинамічна сила

Значення аеродинамічних коефіцієнтів та  $x_{\text{цт}}$  зведено у таблицю 1.31. Залежності повного коефіцієнту опору  $C_x$  та коефіцієнту донного опору  $C_{x \text{ дон}}$  від числа Маха  $M_\infty$  представлено на рис. 1.30. Залежності коефіцієнту нормальної сили  $C_y$  та коефіцієнту моменту тангажу  $m_z$  від числа Маха  $M_\infty$  представлено на рис. 1.31 та рис. 1.32 відповідно.

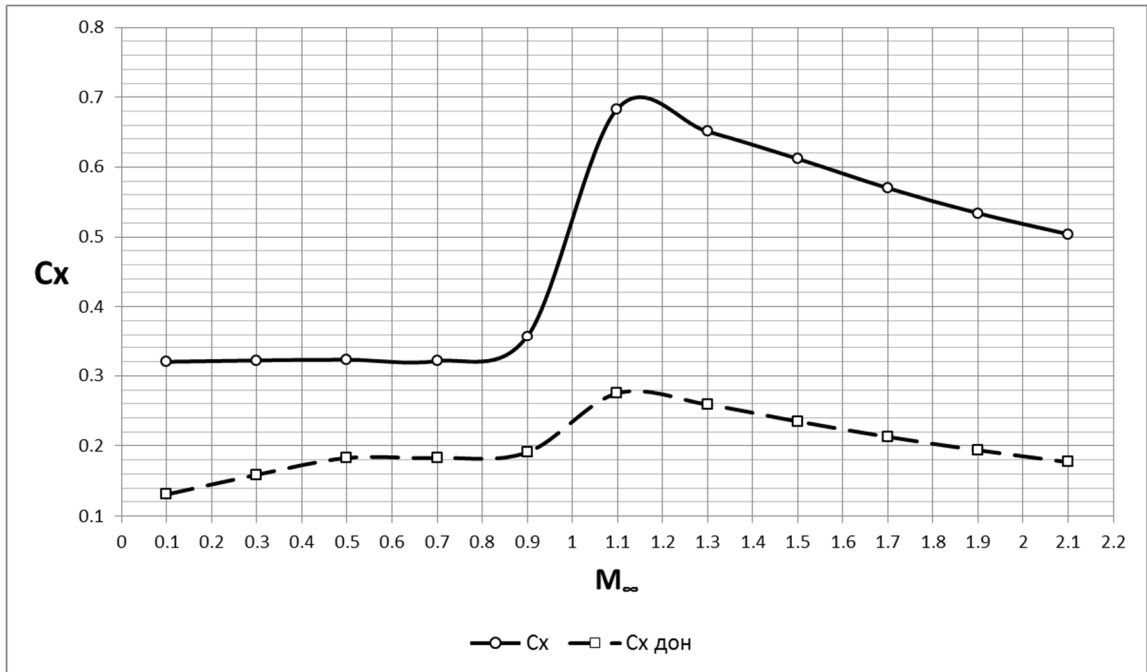


Рисунок 1.30 – Значення коефіцієнтів  $C_x$  та  $C_x \text{ дон}$  в залежності від числа Маха  $M_\infty$  при обтіканні снаряда типу М-21ОФ під кутом атаки  $5^\circ$ , отримані за результатами моделювання в ANSYS CFX

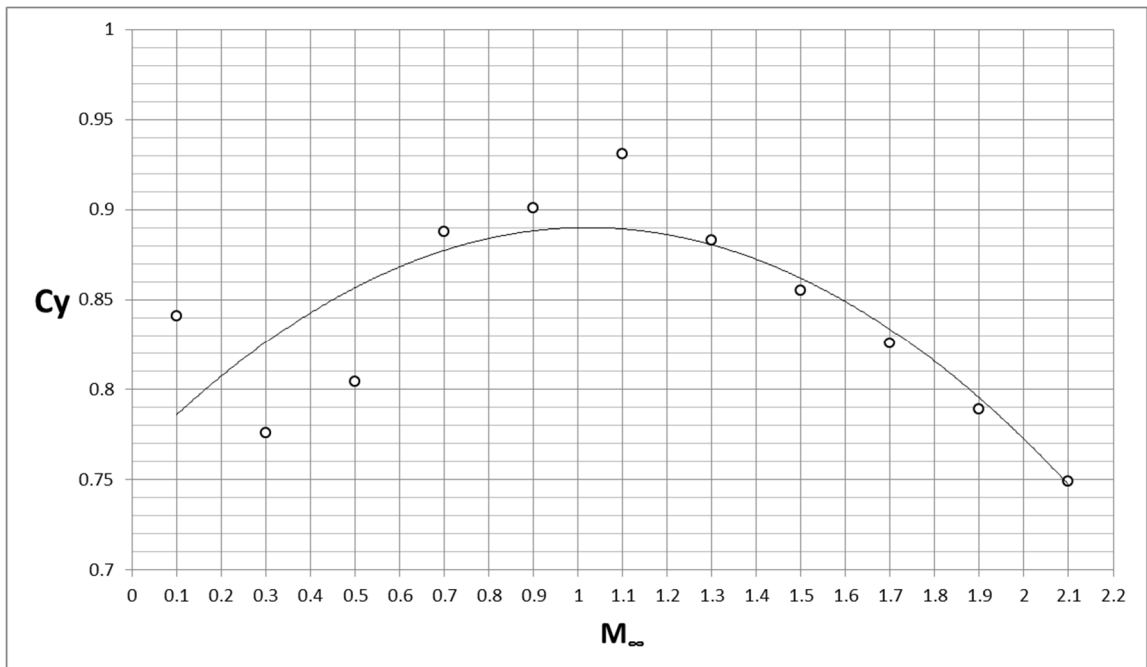


Рисунок 1.31 – Значення коефіцієнта  $C_y$  в залежності від числа Маха  $M_\infty$  при обтіканні снаряда ОФ-21 під кутом атаки  $5^\circ$ , отримані за результатами моделювання в ANSYS CFX

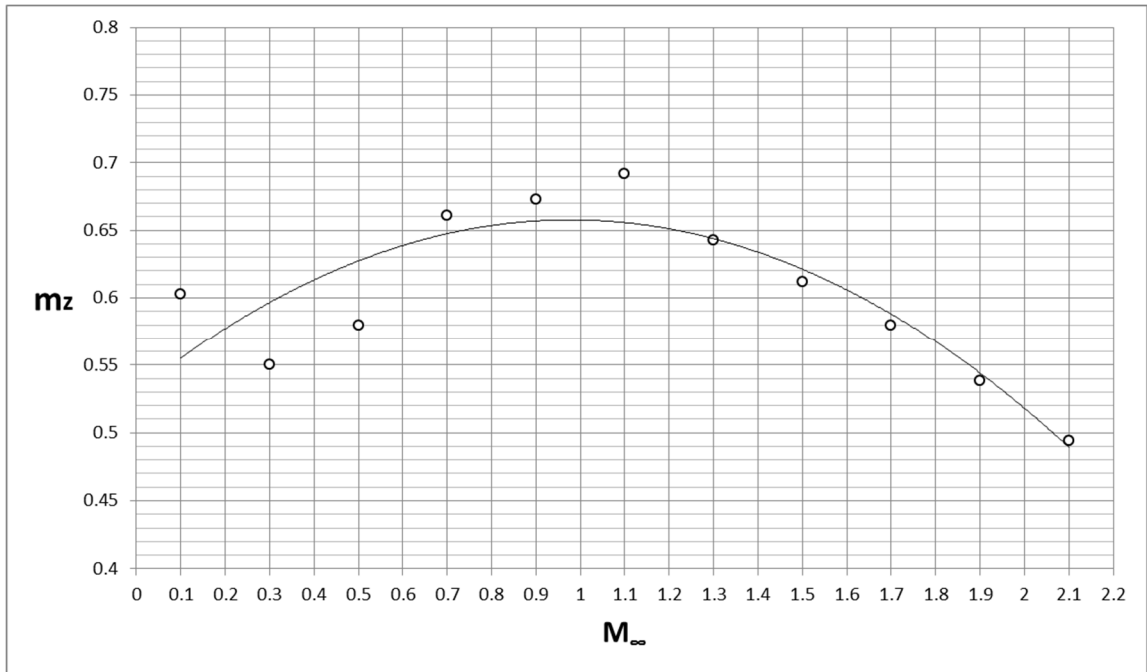


Рисунок 1.32 – Значення коефіцієнта  $m_z$  в залежності від числа Маха  $M_\infty$  при обтіканні снаряд М-21ОФ під кутом атаки  $5^\circ$ , отримані за результатами моделювання в ANSYS CFX

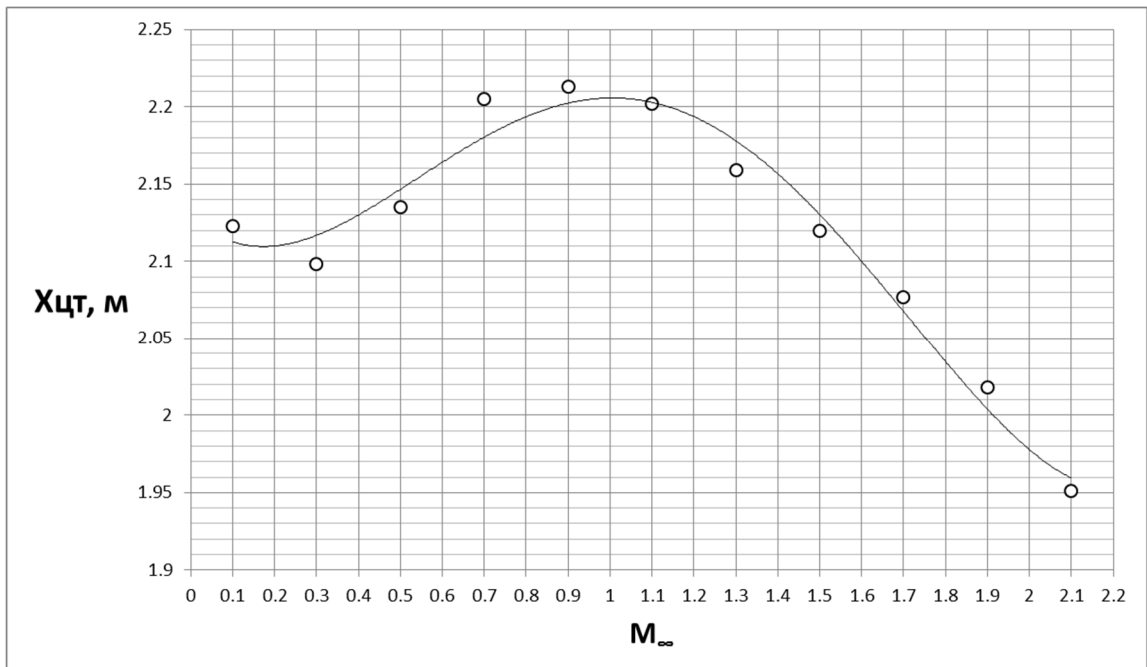


Рисунок 1.33 – Значення координати центру тиску  $x_{цт}$  в залежності від числа Маха  $M_\infty$  при обтіканні снаряда М-21ОФ під кутом атаки  $5^\circ$ , отримані за результатами моделювання в ANSYS CFX

## 2 МОДЕЛЮВАННЯ АКТИВНОЇ І ПАСИВНОЇ ДІЛЯНОК ТРАЄКТОРІЇ ПРОСТОРОВОГО РУХУ РЕАКТИВНОГО СНАРЯДА

### 2.1 Аналіз останніх досліджень і публікацій

Розподілені по поверхні снаряда аеродинамічні сили опору в загальному випадку можливо поділити на три складові: сили опору тертя (опір тертя); сили опору, пов'язані з підвищенням тиску на головній частині і на торцевих поверхнях оперення (опір тиску); сили опору, пов'язані з розрідженням за донним зрізом снаряда (донний опір) [22], [23]. Величина кожного з компонентів аеродинамічного опору визначається формою тіла та його головними розмірами, режимом течії (тобто числами Маха, Рейнольдса та температурного фактору). На сучасному етапі розвитку аеродинаміки найбільш поширеним та результативним шляхом визначення аеродинамічних сил є розрахунково-дослідний. В цілому задача визначення аеродинамічного опору оперених тіл обертання є надзвичайно складною, що визначається складністю процесів обтікання. Її всебічне вирішення потребує створення спеціалізованих наукових організацій або ж підрозділів галузевих наук, які б досконально опанували та використовували існуючі сучасні методи аеродинамічних розрахунків, мали сучасну дослідницьку базу (аеродинамічні труби, траси та полігони для стрільби). Існуюча на теперішній час відкрита інформація про результати експериментальних досліджень та відомі методи розрахунків окремих складових аеродинамічного опору при детальному аналізі та професійному використанні дозволяють створювати достатньо ефективні методи розрахунку окремих складових аеродинамічного опору тіл обертання [24], [25], [26], [28].

Опір тертя – одна з вагомих складових аеродинамічного опору тіл обертання, що при надзвукових швидкостях польоту складає 20% і більше від повного опору, а при дозвукових швидкостях – значно більшу долю загального опору. Як відомо, аеродинамічний опір тертя в першу чергу залежить від режиму течії в прикордонному шарі: ламінарного, перехідного або ж розвинутого турбулентного. У першому наближенні опір тертя тіл обертання розраховують

як для пластини при відомих числах Маха  $M_\infty$  та Рейнольдса  $Re_\infty$  [24], [30], [31]. Для його розрахунку необхідно, перш за все, знати місце початку зони переходу від ламінарної форми течії до турбулентної в прикордонному шарі на тілі. По-друге, необхідні залежності, за якими проводяться розрахунки локального коефіцієнту тертя  $C_f$  при різних режимах течії в прикордонному шарі. Для визначення локального коефіцієнту тертя в точці на поверхні тіла обертання у випадку турбулентного прикордонного шару можна застосувати асимптотичну теорію пристінної турбулентності, розроблену С.С.Кутателадзе та А.І.Леонтьєвим [31]. Теорія справедлива як при числах Рейнольдса  $Re \rightarrow \infty$ , так і при їх доволі великих кінцевих значеннях. Заснований на цій теорії відомий метод розрахунку тепловіддачі та тертя Кутателадзе-Леонтьєва продемонстрував свою ефективність при вирішенні складних задач теплообміну і турбулентного тертя як в умовах внутрішнього обтікання (сопла, теплообмінники та ін.), так і при вирішенні задач аеродинаміки. Для визначення локального коефіцієнту тертя в точці на поверхні тіла обертання у випадку стискаємого ламінарного прикордонного шару можна скористатися залежностями, наданими в [32] для поздовжнього обтікання плоскої пластинки.

Складова опору тертя аеродинамічного коефіцієнту поздовжньої сили  $C_x$  може визначатися на основі інтерполяційних формул, що належать проф. Коваленко В. М. і надані авторам роботи для користування. Розроблений їм метод розрахунку характеристик турбулентного прикордонного шару при надзвукових швидкостях був обґрунтований теоретично та експериментально. Досліди були проведені в вільному потоці та в аеродинамічних трубах ЦАГІ ім. Жуковського та в Інституті теоретичної і прикладної механіки Сибірського відділення АН СРСР. По даних автора, розрахунок по інтерполяційним формулам забезпечує достатню точність (похибка не перевершує 3-4%). Формули придатні при  $0 < M < 10$ ,  $10^5 < Re < 10^{10}$ .

Для визначення опору тиску тіл обертання при надзвукових швидкостях польоту може застосовуватися теорія стрибків ущільнень [25], [28], що виникають при надзвуковому обтіканні на їх головних частинах. Вона дає змогу

визначити кут нахилу стрибка та параметри потоку безпосередньо за стрибком ущільнення. Для подальшого вирішення задачі про розподіл параметрів потоку в околиці снаряда та на його поверхні за стрибком ущільнення, є можливість використати відомий в теорії надзвукової газової динаміки метод характеристик [25], [28]. Цей метод всебічно розроблений для розв'язання рівнянь руху сталих надзвукових газових течій. Зміст методу характеристик, розробка якого належить проф. Ф. Франклю, зводиться до того, що рішення рівнянь газової динаміки знаходиться за допомогою рівнянь особливих ліній, які зветься характеристиками та уявляють з себе лінії слабких збурень (лінії Маха), вздовж яких поширюються збурення в стискаємому середовищі. Знайшовши за допомогою характеристик значення тиску в окремих точках поверхні снаряда за стрибком ущільнення, його потім можна інтерполювати, наприклад поліномом Лагранжа, а потім інтегрувати по боковій поверхні снаряда, отримуючи таким чином значення сили хвильового опору, або ж відповідного аеродинамічного коефіцієнту.

Розрахунок аеродинамічного опору тіл обертання може виконуватися на підставі інженерних методик, наданих в існуючих джерелах. До їх числа можна віднести відомі класичні підручники вчених. Написані ними капітальні курси [24], [25], [26], [27], [28], [29] з аеродинаміки використовуються в спецкурсах для студентів та аспірантів по спеціальностям авіаційної, ракетно-космічної та артилерійської техніки. Розрахунок аеродинамічного опору тертя, опору тиску і донного опору неоперених тіл обертання також досить точно можна виконати на підставі Керівництва для конструкторських артилерійських підрозділів Військово-морських сил США [33]. Інформація з цього довідника містить значну кількість найбільш достовірних розрахункових та експериментальних результатів американських вчених, отриманих в період до 1961 року. Ці дані можуть бути з успіхом використані і зараз, оскільки являються досить консервативними за своєю суттю та змістом. В джерелі приводяться дані по опору тертя, опору тиску та донному опору для тіл обертання відносних подовжень, притаманних артилерійським снарядам. Дані наводяться у вигляді



графіків, за якими можна отримати інтерполяційні формули для коефіцієнту донного опору у широкому діапазоні до-, транс- та надзвукових швидкостей польоту.

Всі перелічені джерела складають основу розробленої авторами роботи комплексної методики розрахунку аеродинамічних коефіцієнтів неоперених тіл обертання за кресленнями їх зовнішніх контурів, що використовувалися для розрахунків траєкторій польоту. Розрахунки параметрів траєкторій велися на основі обмеженої кількості рівнянь розробленої „повної” системи диференціальних рівнянь руху тіл обертання, стабілізованих за рахунок обертання. Досвід розрахунків показав, що за умови обмеженості знань аеродинамічних коефіцієнтів, можливо головні розрахункові параметри траєкторії визначати за допомогою аеродинамічного коефіцієнту поздовжньої сили  $C_x$ , обмеживши кількість рівнянь в системі.

## 2.2 Призначення та зміст етапу роботи

Досвід розрахунків аеродинамічного опору оперених осесиметричних тіл обертання показав наявність принципових труднощів розрахунково-експериментальних методів, пов'язаних зі складним механізмом впливу оперення на величини складових опору тертя, донного опору, з розрахунком величин поперечної аеродинамічної сили, положення центру тиску у випадку обтікання тіла зустрічним потоком під кутом атаки.

В той же час, в зв'язку з розвитком обчислювальної техніки і технологій комп'ютерного моделювання, ситуація з розв'язанням складних задач аеродинаміки радикально змінилася. На зміну розрахунково-експериментальним методам досліджень приходять комп'ютерні технології чисельного моделювання. На ринку з'явилися програмні засоби для розрахунків в різних областях фізики, механіки, гідро- і аеродинаміки. Ефективне використання таких потужних інструментів в прикладних і фундаментальних дослідженнях потребує адекватної методології застосування, що базується на досвіді

розв'язання різноманітних прикладних задач. Цей досвід змінює підхід до їх розв'язання, приводить до появи нових більш складних і адекватних розрахункових моделей, стимулює дослідників до використання універсальних пакетів обчислювальних програм, існуючих як програмний комерційний продукт.

В зв'язку з цим актуальним є розробка методики застосування призначених для розв'язання задач аеродинаміки пакетів обчислювальних програм (програмні продукти ANSYS CFX, ANSYS Fluent та ін.) при розрахунковому визначенні коефіцієнтів аеродинамічного опору оперених тіл обертання за кресленнями їх зовнішніх контурів в межах до-, транс- та надзвукових швидкостях, що мають.

В роботі використано [13] зовнішні контури опереного осесиметричного тіла обертання типу некерованого реактивного снаряда М-21ОФ, для якого відомі значення аеродинамічного коефіцієнту лобового опору при осесиметричному обтіканні.

Визначення розрахункових траєкторій оперених осесиметричних тіл обертання типу некерованих реактивних снарядів пов'язано з рішенням систем диференціальних рівнянь їх руху. Праві частини таких рівнянь містять вирази для проєкцій на відповідні осі рівнодіючих аеродинамічних сил і моментів, виникаючих на поверхнях тіл обертання.

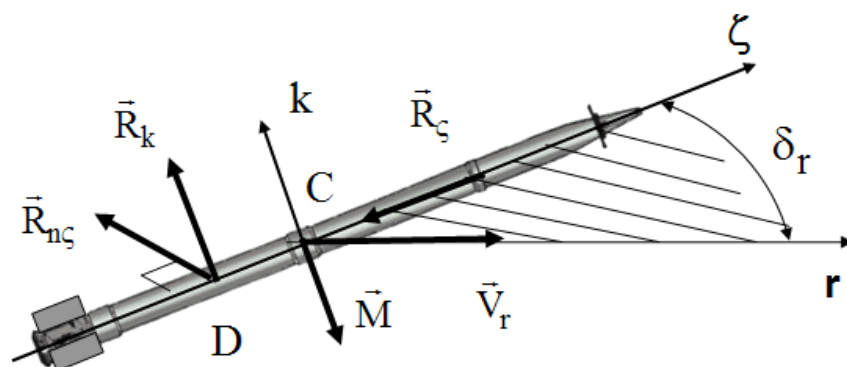


Рисунок 2.1 – Складові аеродинамічних сил і моментів опереного осесиметричного тіла обертання.

Як відомо, напрямок дії і величини аеродинамічних сил і моментів залежать від взаємного просторового розміщення поздовжньої осі  $\zeta$  і вектора відносної повітряної швидкості  $\vec{V}_r$  центру мас осесиметричного льотного об'єкта, утворюючих так звану площину опору (рис.2.1). Кут між поздовжньою віссю  $\zeta$  і вектором відносної повітряної швидкості  $\vec{V}_r$  носить назву просторового кута атаки. У зв'язку з цим вирази для аеродинамічних сил і моментів слід визначати в системі координат, пов'язаної з площиною опору і в залежності від просторового кута атаки  $\delta_r$ .

При наявності кута атаки аеродинамічні сили на поверхні снаряда представляють двома рівнодіючими: поздовжньою силою  $\vec{R}_\zeta$  і поперечною силою  $\vec{R}_{n\zeta}$  (рис.2.1). Якщо на підставі аеродинамічних випробувань або розрахунків відомі аеродинамічні коефіцієнти для поздовжньої аеродинамічної сили  $\vec{R}_\zeta$  і аеродинамічної поперечної сили  $\vec{R}_{n\zeta}$  по відношенню до площі міделя тіла обертання, то величини сил знаходяться таким чином:

$$R_\zeta = C_\zeta \cdot \frac{\rho v_r^2}{2} \cdot S; \quad R_{n\zeta} = C_{n\zeta} \cdot \frac{\rho v_r^2}{2} \cdot S, \quad (2.1)$$

де  $C_\zeta$  – аеродинамічний коефіцієнт поздовжньої аеродинамічної сили,  $C_{n\zeta}$  – аеродинамічний коефіцієнт поперечної аеродинамічної сили,  $(\rho \cdot v_r^2)/2$  – швидкісний напір зустрічного потоку з урахуванням вітру,  $S$  – площа міделя тіла обертання. Величина аеродинамічного стабілізуючого моменту (рис.2.1)

$$M = R_{n\zeta} \cdot |CD|, \quad (2.2)$$

де  $|CD|$  - відстань від центру мас тіла обертання до центру тиску.

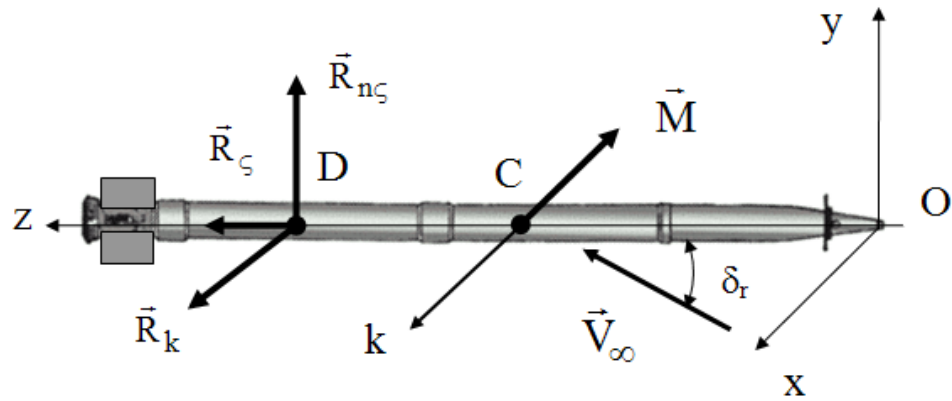


Рисунок 2.2 - Складові аеродинамічних сил і стабілізуючий момент

З огляду на значні досягнення і можливості чисельних методів розрахунку об'єктів на основі рівнянь Нав'є-Стокса при їх безвідривному і відривному обтіканні, відмічені в попередньому розділі, обчислення аеродинамічних коефіцієнтів в даній роботі виконано шляхом чисельного розрахунку в рамках програмного комплексу ANSYS CFX з використанням рівнянь Нав'є-Стокса і двохпараметричної диференційної  $E-\omega$  моделі пристінної турбулентності Ментера.

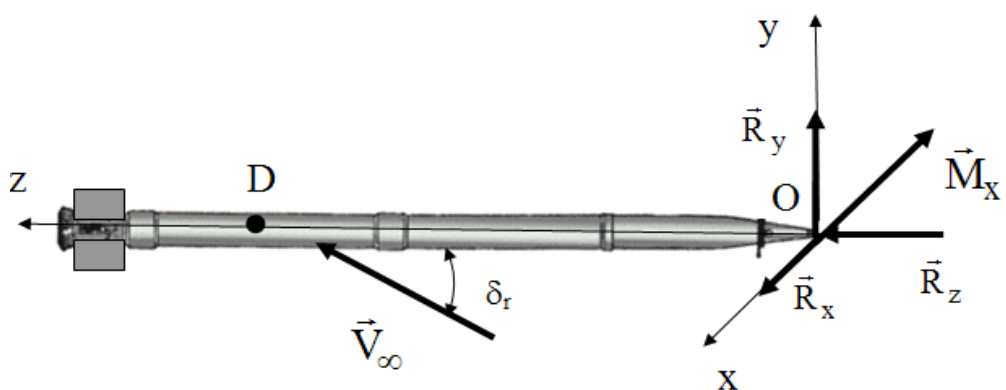


Рисунок 2.3

У відповідності з поставленою метою при виконанні роботи були проведені розрахунки обтікання опереного осесиметричного тіла обертання за кресленнями його зовнішніх контурів, спрямовані на отримання значень аеродинамічної поздовжньої сили  $R_z$ , аеродинамічної поперечної сили  $R_{пз}$ , положення центру тиску і значень аеродинамічного стабілізуючого моменту  $M$  (Рис.2.1) з послідуочим обчисленням аеродинамічних коефіцієнтів у відповідності з залежностями (2.1) і (2.2).

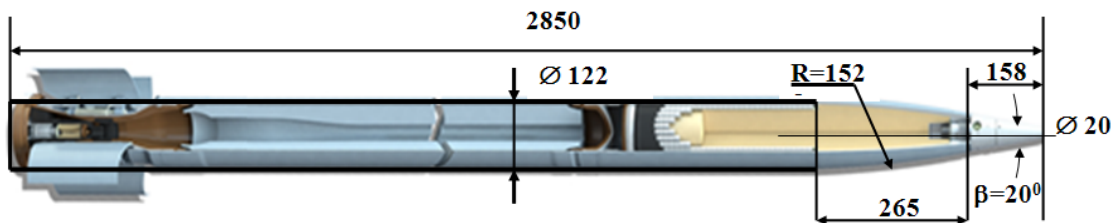


Рисунок 2.4 - Зовнішні контури опереного осесиметричного тіла обертання

Для розрахунків були використані [13] зовнішні контури опереного тіла обертання типу некерованого реактивного снаряда ОФ-21 (рис.2.4). Необхідні розміри контурів снаряда були відтворені пропорційно діаметру міделя, що складає 0,122 м.

Розрахунки були проведені для чисел Маха набігаючого потоку в межах  $0,1 \leq M_\infty \leq 2,5$  як при осесиметричному обтіканні, так і при наявності кута атаки ( $\delta r \neq 0$ ) зустрічного потоку. В якості граничних умов задавались швидкість набігаючого потоку  $V_\infty$ , статичний тиск  $P_\infty$  і статична температура  $T_\infty$ , відповідні нормальним атмосферним умовам, а також ступінь турбулентности зустрічного потоку  $\varepsilon=0,5\%$ , що відповідає незбуреній атмосфері. Числа Рейнольдса зустрічного потоку при розрахунках не моделювались.

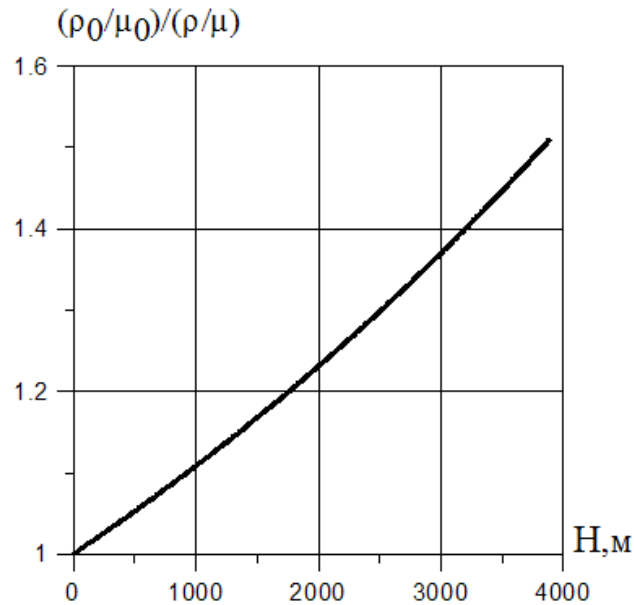


Рисунок 2.5 - Залежність відносної зміни числа Рейнольдса від висоти польоту

В загальному випадку аеродинамічні коефіцієнти складових аеродинамічних сил і моментів є функцією не тільки числа Маха, а і числа Рейнольдса. В той же час для значної кількості оперених тіл обертання, що стартують з земної поверхні, відносна зміна чисел Рейнольдса, пов'язана зі зміною висоти польоту, незначна. В якості ілюстрації цієї обставини на рис.2.5 наводиться отримана в даній роботі розрахункова залежність відносної зміни чисел Рейнольдса, пов'язана зі зміною висоти атмосфери при польоті по траєкторії РС типу М-21ОФ . Видно, що для помірних висот, характерних для реактивних некерованих снарядів РСЗВ, максимальне значення цієї величини складає приблизно 1,5.

Залежність аеродинамічних коефіцієнтів від висоти польоту починає помітно проявлятися при значній зміні висоти польоту [22]. Крім того, особливістю турбулентного прикордонного шару є слабка залежність його характеристик від числа Рейнольдса. Про це свідчить існування граничних відносних законів тертя і теплообміну, встановлених С.С. Кутателадзе і А.І Леонтьєвим [27]. Суть цих законів в тому, що при  $Re \rightarrow 0$  відношення  $C_f/C_{f0}$  не залежить від числа Рейнольдса.

Чисельне моделювання руху по траєкторії опереного тіла обертання типу некерованого РС потребує в кожній точці траєкторії розрахункових величин поперечної аеродинамічної сили, положення центра тиску і аеродинамічного стабілізуючого моменту, який виникає при неосесиметричному обтіканні РС. Надвичайно важливою задачею при проведенні розрахунків траєкторій оперених тіл обертання типу некерованих РС є визначення розрахункових відхилень снарядів при вітрі. Для її успішного розв'язання шляхом чисельного рішення системи диференціальних рівнянь польоту снаряда необхідні значення коефіцієнтів аеродинамічної поперечної сили і аеродинамічного стабілізуючого моменту, що виникають при появі кута атаки зустрічного потоку за рахунок його вітрового збурення. В зв'язку з цим в роботі були проведені розрахунки обтікання опереного тіла обертання типу некерованого РС при наявності кута атаки набігаючого на тіло потоку з метою отримання значень аеродинамічних коефіцієнтів поперечної аеродинамічної сили, стабілізуючого моменту і положення центру тиску. Розрахунки були проведені за допомогою програмного комплексу ANSYS CFX при різних значеннях кута атаки  $\delta$  в межах зміни чисел Маха набігаючого потоку  $0,1 \leq M_\infty \leq 2,5$ .

### **2.3 Моделювання активної і пасивної ділянок траєкторії просторового руху реактивного снаряда**

В літературі по зовнішній балістиці існує досить багато публікацій, що стосуються моделей руху артилерійських снарядів. Недоліками цих рівнянь є те, що вони або не враховують наявності вітру взагалі, або спрощуючи дійсну картину обтікання та нехтуючи існуючими перехресними інерційними зв'язками, розглядають рух під впливом вітру, поділяють його окремо на повздовжній та боковий. Інколи рівняння містять надто складні вирази, що робить їх малопривабливими для практичного використання. Так, відома система рівнянь В.С.Пугачова, яка згідно [22] є найбільш загальною системою

рівнянь просторового руху артилерійського снаряда, містить всі складові аеродинамічних сил і моментів, що діють в площині опору снаряда, або ж дія яких пов'язана з площиною опору. В цій системі рівнянь величини аеродинамічних сил і моментів визначаються в залежності від кута нутації, що утворюється в площині опору снаряда віссю снаряда та вектором абсолютної швидкості центру мас снаряда, що вже тим самим виключає можливість врахування впливу вітру. Вектори всіх аеродинамічних сил і моментів, що входять до рівнянь системи, записуються за допомогою одиничного вектору вісі снаряда та одиничного вектору, що співпадає з напрямком швидкості центру мас. Вказані вектори визначають площину опору снаряда. Завдяки вибору проекцій орту вісі снаряда на напрямок орту швидкості в якості головних змінних, за допомогою системи рівнянь В.С.Пугачова можливо обчислити параметри траєкторії снаряда, а також одночасно провести дослідження коливного руху вісі снаряда відносно вектора швидкості центру мас. До недоліків даної системи рівнянь слід віднести порівняно складні вирази правих частин рівнянь, що описують коливний рух вісі снаряда, а також те, що рівняння не враховують вплив вітру.

Як відомо, напрямок дії та величини аеродинамічних сил і моментів залежать від взаємного просторового розміщення поздовжньої вісі снаряда та вектора відносної повітряної швидкості центру мас снаряда в площині опору. Тому, як зазначено в [22], [23], доречно вирази для аеродинамічних сил і моментів, що входять до рівнянь руху снаряда, визначати в системі координат, пов'язаній з просторовим кутом атаки в площині опору та в залежності від цього кута. Але в більшості випадків просторових моделей балістики аеродинамічні сили і моменти, що діють на снаряд, знаходяться своїми складовими в площинах кутів ковзання та кута атаки. Така заміна для симетричного тіла обертання, яким в більшості випадків є снаряд, недоречна, тому що призводить до спотворювання фізичної моделі обтікання і утворення аеродинамічних сил, особливо при зростанні просторових кутів ковзання та атаки і, як наслідок, до зростання похибок розрахунків траєкторії. Крім цього, в деяких випадках вісі, що



використовуються для запису рівнянь обертального руху снаряда, не співпадають з дійсними осями обертання.

Метою даної роботи є створення системи диференціальних рівнянь просторового руху артилерійського снаряда, призначеної для розрахунків траєкторії руху та дослідження коливань снаряда. Рівняння повинні відображати існуючу картину обтікання снаряда зустрічним потоком повітря, враховуючи всі можливі складові вітру та зберігаючи при цьому існуючі перехресні інерційні зв'язки. Рівняння повинні бути придатними для використання при любых кутах нутації снаряда, не містити занадто складних виразів та бути зручними при чисельному інтегруванні.

Після пострілу снаряд рухається як тверде тіло, маючи при цьому взаємопов'язані поступальні і обертальні складові руху, що здобуваються снарядом під час пострілу. Повітряне середовище, в якому відбувається рух, в свою чергу переміщується з деякою швидкістю  $\vec{W}$ . Швидкість снаряда відносно атмосфери (відносна або ж повітряна швидкість) буде:

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{W}, \quad (2.3)$$

де:  $\vec{V}$  – швидкість снаряда відносно нерухомої системи координат.

Зведемо вітер до трьох його складових: повздовжньої  $\vec{W}_x$ , вертикальної  $\vec{W}_y$  та поперечної  $\vec{W}_z$ .

Розрахункова модель снаряда зображена на рис.2.6. Діючі сили: сила тяги  $\vec{P}$ , сила тяжіння  $\vec{m}g$ , аеродинамічні сили.

Запровадимо слідуючі системи вісів прямокутних координат.

1. Нерухому стартову систему вісів  $Oxyz$ .
2. Систему прямокутних вісів  $x',y',z'$ , яка має початок в центрі мас снаряда і рухається поступально та паралельно вісям  $x,y,z$  (стартова приєднана система координат).

3. Траєкторну систему прямокутних вісів  $T, N, B$  з початком в центрі мас снаряда, вісь  $T$  якої співпадає з вектором швидкості центру мас. Вісь  $N$  спільно з вісею  $T$  утворює вертикальну площину. Вісь  $B$  перпендикулярна цій площині.

4. Напівзв'язану систему прямокутних вісів  $\zeta, \xi, \eta$  з початком в центрі мас снаряда. Вісі цієї системи не приймають участі в обертанні снаряда навколо його поздовжньої вісі. Вісь  $\zeta$  співпадає з поздовжньою віссю снаряда, вісь  $\xi$  перпендикулярна вісі  $\zeta$  і знаходяться в вертикальній площині симетрії снаряда, горизонтальна вісь  $\eta$  перпендикулярна вертикальній площині вісів  $\zeta$  та  $\xi$ .

Положення напівшвидкісної системи відносно нерухомої системи визначається кутами  $\Psi$  і  $\theta$ . Положення зв'язаної системи відносно нерухомої системи визначається  $\psi$  і  $\vartheta$ . Послідовність обертів стартової поєднаної до сполучення з напівшвидкісною та з пов'язаною системами вісів і відповідні складові кутових швидкостей можна побачити з рис. 2.6.

Параметрами руху снаряда є такі величини:  $x_c, y_c, z_c$ - координати центру мас снаряда в системі  $xyz$ ; кути  $\Psi$  і  $\theta$ ,  $\psi$  і  $\vartheta$ , що визначають кутову орієнтацію вектора швидкості та вісі снаряда відносно стартової системи  $xyz$ ;  $V$ - швидкість центру мас снаряда; складові кутової швидкості і поздовжньої вісі снаряда  $\dot{\Psi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}$ , кутова швидкість обертання снаряда навколо поздовжньої вісі  $\dot{\phi}$ .

Всі ці параметри пов'яжемо між собою рівняннями руху. Поступальна складова руху може бути визначена рівняннями руху центру мас снаряда, що на підставі [23] мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{y}_c &= V \cdot \sin \theta; & \dot{V} &= \Sigma F_T / m; \\ \dot{x}_c &= V \cdot \cos \theta \cdot \cos \Psi; & \dot{\theta} &= \Sigma F_N / (m \cdot V); \\ \dot{z}_c &= -V \cdot \cos \theta \cdot \sin \Psi; & \dot{\Psi} &= -\Sigma F_B / (m \cdot V \cdot \cos \theta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

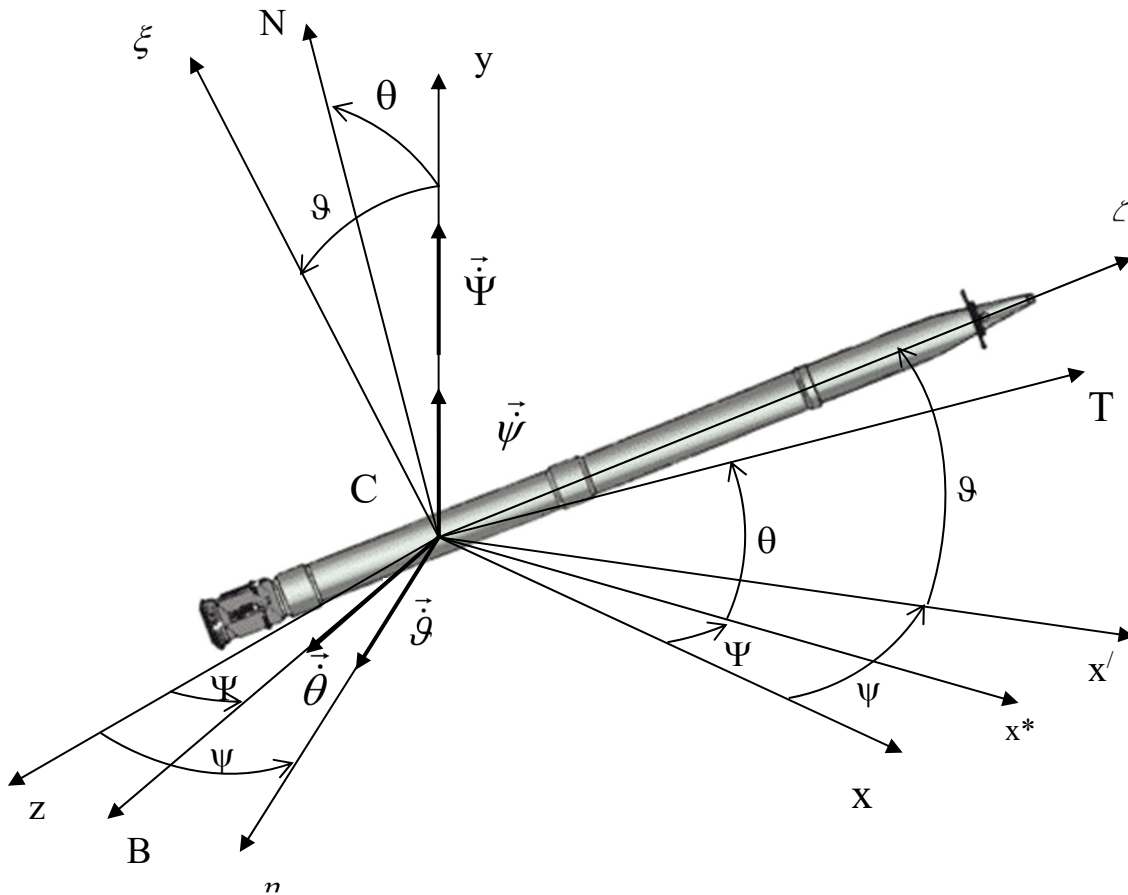


Рисунок. 2.6 - До моделі руху снаряда.

Головний вектор діючих сил представимо у вигляді (рис. 2.7):

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{g} + \vec{P} + \vec{R}_\zeta + \vec{R}_{n\zeta}, \quad (2.5)$$

де  $m\vec{g}$  - сила тяжіння,  $\vec{P}$  - сила тяги двигуна,  $\vec{R}_\zeta$  та  $\vec{R}_{n\zeta}$  - складові рівнодіючої аеродинамічних сил, що діють на снаряд, в площині опору снаряда. Складова  $\vec{R}_\zeta$  спрямована вздовж вісі снаряда (поздовжня аеродинамічна сила),  $\vec{R}_{n\zeta}$  - нормальна складова рівнодіючої аеродинамічної сили в площині опору снаряда, що перпендикулярна вісі снаряда.

Нагадаємо, що площина опору снаряда утворюється віссю снаряда та вектором повітряної швидкості центру мас снаряда (швидкості центру мас

снаряда відносно атмосфери). Набігаючий на снаряд потік повітря рухається відносно снаряда паралельно цій площині в напрямку протилежному вектору швидкості центру мас снаряда.

Якщо на підставі аеродинамічних випробувань або розрахунків відомі аеродинамічні коефіцієнти для подовжньої аеродинамічної сили та аеродинамічної нормальної сили снаряда, а також аеродинамічний коефіцієнт лобового опору стабілізатора по відношенню до площі міделя снаряда, то величини аеродинамічних сил  $R_\zeta$  та  $R_{n\zeta}$  обчислюються таким чином:

$$R_\zeta = C_\zeta \cdot \frac{\rho v_r^2}{2} \cdot S; \quad R_{n\zeta} = C_{n\zeta} \cdot \frac{\rho v_r^2}{2} \cdot S, \quad (2.6)$$

де  $C_\zeta$  – аеродинамічний коефіцієнт продольної аеродинамічної сили,  $C_{n\zeta}$  – аеродинамічний коефіцієнт нормальної аеродинамічної сили,  $\frac{\rho v_r^2}{2}$  – швидкісний напір набігаючого на снаряд повітря з урахуванням вітру,  $S$  – площа поперечного перерізу снаряда.

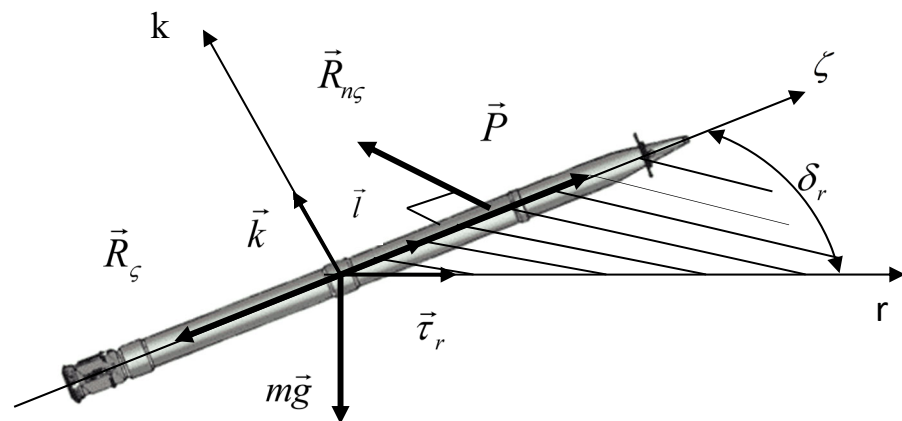


Рисунок 2.7 - До визначення аеродинамічних сил.

Введемо у розгляд два одиничних вектора:  $\vec{l}$  – одиничний вектор вісі снаряда;  $\vec{\tau}_r$  – одиничний вектор напрямку повітряної швидкості. Кут між векторами  $\vec{l}$  та  $\vec{\tau}_r$  позначимо  $\delta_r$ . Складемо вирази для кожної зі складових аеродинамічних сил, використовуючи введені вектори:

$$\vec{R}_\zeta = -C_\zeta \cdot \frac{\rho v_r^2}{2} \cdot S \cdot \vec{l} \cdot \text{sign}(\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r); \quad \vec{R}_{n_\zeta} = C_{n_\zeta} \cdot \frac{\rho v_r^2}{2} \cdot S \cdot \frac{1}{\bar{m}} [\vec{l} \times (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)] ;$$

або ж так

$$\vec{R}_\zeta = A_\zeta \cdot \vec{l}; \quad \vec{R}_{n_\zeta} = A_{n_\zeta} \cdot [\vec{l} \times (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)], \quad (2.7)$$

де: 
$$A_\zeta = -C_\zeta \cdot \frac{\rho v^2}{2} \cdot S \cdot \text{sign}(\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r); \quad A_{n_\zeta} = \frac{R_{n_\zeta}}{\bar{m}} = \frac{C_{n_\zeta} \cdot \frac{\rho v^2}{2} \cdot S}{\bar{m}} ;$$

$\bar{m} = \text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r) = |\sin \delta_r| = \sqrt{1 - (\cos \delta_r)^2}$ ,  $\delta_r = \arccos(\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r)$  – кут атаки в площині опору снаряда;

$$\cos \delta_r = (\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r) = \tau_{r\zeta}, \text{ або ж } \cos \delta_r = (\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r) = l_T \cdot \tau_{rT} + l_N \cdot \tau_{rN} + l_B \cdot \tau_{rB};$$

Якщо записати векторний добуток  $(\vec{\tau}_r \times \vec{l})$  за допомогою відомого визначника, що містить проекції  $\vec{l}$  та  $\vec{\tau}_r$  на вісі  $\zeta$ ,  $\xi$  та  $\eta$ , то отримуємо таку залежність:

$$\text{mod}(\vec{\tau}_r \times \vec{l}) = \sqrt{\tau_{r\xi}^2 + \tau_{r\eta}^2}. \quad (2.8)$$

Аеродинамічні коефіцієнти  $C_\zeta$  та  $C_{n_\zeta}$  визначаються по результатах аеродинамічних випробувань або розрахунків в залежності від кута атаки

снаряда набігаючим потоком повітря, що в даному випадку дорівнює куту  $\delta_r$ , та числа Маха набігаючого потоку. Число Маха  $M = \frac{V}{a} = \frac{V_\tau}{a_{0N}}$ ;  $a = 20,05 \cdot \sqrt{\tau}$ ;  $\tau$

– умовна (віртуальна) температура повітря;

Швидкісний напір обчислимо за залежністю:

$$q = \frac{\rho V_r^2}{2} = \pi(y) \cdot \frac{\Pi_{0N}}{2g} \cdot V_{r\tau}^2; \quad (2.9)$$

Де  $\pi(y)$  - функція тиску;  $V_\tau = V \cdot \sqrt{\tau_{0N}/\tau}$

Для того, щоб при розрахунках функції тиску повітря  $\pi(Y)$  не проводити інтерполяцію її табличних значень, знайдемо аналітичний вираз для похідної  $\dot{\pi}(Y)$ . Це дозволить, включивши  $\dot{\pi}(Y)$  до числа рівнянь руху, отримувати значення  $\pi(Y)$  на кожному кроці чисельного інтегрування.

Продиференціюємо вираз для  $\pi(Y)$  за часом:

$$\pi(Y) = \frac{h}{h_{0N}}; \quad \dot{\pi}(Y) = \frac{\dot{h}}{h_{0N}}, \quad (2.10)$$

де  $h$  – тиск повітря у точці траєкторії;  $h_{0N}$  – нормальний тиск на земній поверхні ( $h_{0N} = 750$  мм рт. ст.).

Для того, щоб визначити  $\dot{h}$ , скористуємося рівнянням вертикальної рівноваги атмосфери, котре має вигляд:

$$\frac{dh}{h} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dY}{\tau}$$

Помножимо та розділимо його ліву частину на  $dt$ . У результаті отримаємо:

$$\frac{dt}{dt} \cdot \frac{dh}{h} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dY}{\tau}; \quad \frac{dh}{dt} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{1}{R \cdot \tau} \cdot \frac{dY}{dt},$$

або

$$\frac{\dot{h}}{h} = -\frac{1}{R \cdot \tau} \cdot \dot{Y},$$

звідки

$$\dot{h} = -\frac{h}{R \cdot \tau} \cdot V \cdot \sin \theta. \quad (2.11)$$

Підставляючи вираз (2.11) в (2.10), отримуємо:

$$\dot{\pi}(Y) = -\frac{\pi(Y)}{R \cdot \tau} \cdot V \cdot \sin \theta. \quad (2.12)$$

Якщо враховувати дійсний розподіл температури за висотою, тоді

$$\dot{\pi}(Y) = -\frac{\pi(Y)}{R \cdot [\tau(Y) + \Delta \tau]} \cdot V \cdot \sin \theta, \quad (2.13)$$

де  $\tau(Y)$  – нормальна залежність змінення віртуальної температури з висотою;  $\Delta \tau$  – відхилення віртуальної температури повітря від нормальної залежності:

$$\Delta \tau = \frac{\Delta T}{1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{e}{h}},$$

де  $e$  – тиск водяних парів;  $h$  – тиск вологого повітря;  $\Delta T$  – відхилення абсолютної температури вологого повітря від нормального закону розподілу;  $R$  – газова постійна.

За нормальний розподіл температури  $\tau(y)$  по висоті можуть бути прийняті залежності Д. А. Вентцеля:

$$\text{для висот від 0 до 9300 м: } \tau(y) = \tau_{\text{ON}} - 0,006328 \cdot Y;$$

$$\text{для висот від 9300 м до 12000 м:}$$

$$\tau(y) = 230,0 + 0,006328(Y - 9300) + 1,172 \cdot 10^{-6} (Y - 9300)^2;$$

для висот від 12000 м і вище:  $\tau(Y) = 221,5^0 \text{К}$ .

Перейдемо до визначення проєкцій діючих сил на вісі траєкторної системи.

1. Сила тяжіння.

$$(m\vec{g})_T = -mg \cdot \sin \Theta; \quad (m\vec{g})_N = -mg \cdot \cos \Theta; \quad (m\vec{g})_B = 0.$$

2. Сила тяги.

$$(\vec{P})_T = P_x \cdot \cos \Theta \cdot \cos \Psi + P_y \cdot \sin \Theta - P_z \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Psi;$$

$$(\vec{P})_N = -P_x \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Psi + P_y \cdot \cos \Theta + P_z \cdot \sin \Theta \cdot \sin \Psi;$$

$$(\vec{P})_B = P_x \cdot \sin \Psi + P_z \cdot \cos \Psi,$$

Де, в свою чергу, проєкції сили тяги двигуна на вісі стартової системи мають значення:

$$P_x = P \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \psi; \quad P_y = P \cdot \sin \vartheta; \quad P_z = -P \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \psi.$$

3) Продольна аеродинамічна сила.

$$(\vec{R}_\zeta)_T = A_\zeta \cdot l_T; \quad (\vec{R}_\zeta)_N = A_\zeta \cdot l_N; \quad (\vec{R}_\zeta)_B = A_\zeta \cdot l_B$$

4) Нормальна аеродинамічна сила.

Користуючись формулою подвоєного векторного добутку, маємо:

$$[\vec{l} \times (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)] = \vec{l} \cdot (\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r) - \vec{\tau}_r \cdot (\vec{l} \cdot \vec{l}).$$

Враховуючи, що  $(\vec{l} \cdot \vec{l}) = 1$ , а також те, що скалярний добуток одиничних векторів

$$(\vec{l} \cdot \vec{\tau}) = l_\zeta \cdot \tau_{r\zeta} + l_\xi \cdot \tau_{r\xi} + l_\eta \cdot \tau_{r\eta} = 1 \cdot \tau_{r\zeta} + 0 \cdot \tau_{r\xi} + 0 \cdot \tau_{r\eta} = \tau_{r\zeta}, \quad (2.14)$$

замінемо подвійний векторний добуток векторною різницею:



$$[\vec{l} \times (\vec{l} \times \vec{\tau}_r)] = \tau_{r\zeta} \cdot \vec{l} - \vec{\tau}_r.$$

В такому випадку

$$\vec{R}_{n\zeta} = A_{n\zeta} \cdot (\tau_{r\zeta} \cdot \vec{l} - \vec{\tau}_r). \quad (2.15)$$

Запишемо (2.15) в проекціях на вісі T, N, B.

$$(\vec{R}_{n\zeta})_T = A_{n\zeta} \cdot (\tau_{r\zeta} \cdot l_T - \tau_{rT}); \quad (\vec{R}_{n\zeta})_N = A_{n\zeta} \cdot (\tau_{r\zeta} \cdot l_N - \tau_{rN});$$

$$(\vec{R}_{n\zeta})_B = A_{n\zeta} \cdot (\tau_{r\zeta} \cdot l_B - \tau_{rB}).$$

Знайдемо проекції одиничних векторів  $\vec{l}$  та  $\vec{\tau}_r$  на вісі T, N, B. Рівняння (2.3) в проекціях на вісі x, y, z дає:

$$\tau_{rx} = \frac{\dot{x} - W_x}{V_r}; \quad \tau_{ry} = \frac{\dot{y}}{V_r}; \quad \tau_{rz} = \frac{\dot{z} - W_z}{V_r}, \quad (2.16)$$

де: 
$$V_r = \sqrt{(\dot{x} - W_x)^2 + (\dot{y} - W_y)^2 + (\dot{z} - W_z)^2}$$

Користуючись відомим перетворенням координат (таблиця 2.1), знаходимо проекції вектора  $\vec{\tau}_r$  на вісі траєкторної системи координат:

$$\tau_{rT} = \tau_{rx} \cdot \cos \Theta \cdot \cos \Psi + \tau_{ry} \cdot \sin \Theta - \tau_{rz} \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Psi;$$

$$\tau_{rN} = -\tau_{rx} \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Psi + \tau_{ry} \cdot \cos \Theta + \tau_{rz} \cdot \sin \Theta \cdot \sin \Psi; \quad (2.17)$$

$$\tau_{rB} = \tau_{rx} \cdot \sin \Psi + \tau_{rz} \cdot \cos \Psi.$$

Таблиця 2.1 – Косінуси кутів траекторної та стартової систем координат

Вісі координат	T	N	B
$x'$	$\cos \Theta \cdot \cos \Psi$	$-\sin \Theta \cdot \cos \Psi$	$\sin \Psi$
$y'$	$\sin \Theta$	$\cos \Theta$	0
$z'$	$-\cos \Theta \cdot \sin \Psi$	$\sin \Theta \cdot \sin \Psi$	$\cos \Psi$

Таблиця 2.2 – Косинуси кутів напівзв'язаної та стартової систем координат

Вісі координат	$\zeta$	$\xi$	$\eta$
$x'$	$\cos \vartheta \cdot \cos \psi$	$-\sin \vartheta \cdot \cos \psi$	$\sin \psi$
$y'$	$\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$	0
$z'$	$-\cos \vartheta \cdot \sin \psi$	$\sin \vartheta \cdot \sin \psi$	$\cos \psi$

Для знаходження проєкцій одиничного вектора  $\vec{l}$  на вісі траекторної системи координат, спочатку знайдемо проєкції  $\vec{l}$  на вісі стартової системи координат. Таблицю 2.2 направляючих косинусів напівзв'язаної системи по відношенню до стартової отримаємо, замінивши в таблиці 2.1 кути  $\Psi$  і  $\Theta$  на кути  $\psi$  і  $\vartheta$  відповідно.

Враховуючи, що проєкції одиничного вектора  $\vec{l}$  на вісі напівзв'язаної системи мають значення  $l_{\zeta} = 1$ ,  $l_{\xi} = 0$ ,  $l_{\eta} = 0$ , та здійснюючи перехід до стартової системи координат за допомогою таблиці 2.2, отримаємо значення проєкції одиничного вектора  $\vec{l}$  на вісі стартової системи координат у вигляді:

$$l_x = \cos \vartheta \cdot \cos \psi; \quad l_y = \sin \vartheta; \quad l_z = -\cos \vartheta \cdot \sin \psi; \quad (2.18)$$

Тепер знаходимо проєкції одиничного вектора  $\vec{l}$  на вісі траекторної системи координат, користуючись таблицею 2.1. Будемо мати:

$$\begin{aligned}
l_T &= l_x \cdot \cos \Theta \cdot \cos \Psi + l_y \cdot \sin \Theta - l_z \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Psi; \\
l_N &= -l_x \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Psi + l_y \cdot \cos \Theta + l_z \cdot \sin \Theta \cdot \sin \Psi; \\
l_B &= l_x \cdot \sin \Psi + l_z \cdot \cos \Psi.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Необхідну для обчислень проекцію  $\tau_{r\zeta}$ , що у відповідність з (2.14) дорівнює скалярному добутку одиничних векторів  $\vec{l}$  та  $\vec{\tau}_r$ , знайдемо таким чином:

$$\tau_{r\zeta} = \tau_{rx} \cdot \cos \mathcal{G} \cdot \cos \psi + \tau_{ry} \cdot \sin \mathcal{G} - \tau_{rz} \cdot \cos \mathcal{G} \cdot \sin \psi; \tag{2.20}$$

По результатах обчислення скалярного добутку  $(\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r)$  за залежністю (2.20) визначаємо  $\text{sign}(\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r)$  і значення кута  $\delta_r$  між віссю снаряда та вектором повітряної швидкості центру мас снаряда. За значенням кута  $\delta_r$  та числа Маха з таблиць аеродинамічних коефіцієнтів знаходимо величини  $C_{n\zeta}$ ,  $C_{n\zeta}$ .

Рівняння обертального руху снаряда отримаємо на підставі теореми про зміну момента кількості руху матеріальної системи відносно центру мас, згідно якої

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \vec{M}_c \tag{2.21}$$

де  $\vec{K}_c$  – момент кількості обертального руху снаряда, обчислений в системі відліку, що рухається поступально разом з центром мас,  $\vec{M}_c$  – головний момент діючих на снаряд сил.

Використовуючи відому теорему про зв'язок між абсолютною та локальною похідними векторної величини, ліву частину рівняння (2.21) можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \frac{d'\vec{K}_c}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{K}_c, \quad (2.22)$$

де  $\frac{d'\vec{K}_c}{dt}$  – похідна від вектора  $\vec{K}_c$ , що визначається в рухомій системі осей,  $\vec{\Omega}$  – вектор кутової швидкості рухомої системи осей.

Підставляючи (2.22) в (2.21) та записуючи отримане векторне рівняння в проєкціях на напівзв'язану систему прямокутних осей в  $\zeta, \xi, \eta$ , а також враховуючи, що проєкції похідних на локальні вісі дорівнюють похідним проєкцій на ці вісі, будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{d'K_{c\zeta}}{dt} + (\Omega_\xi \cdot K_{c\eta} - \Omega_\eta \cdot K_{c\xi}) &= \sum_n^{i=1} m_{\zeta i}; \\ \frac{d'K_{c\xi}}{dt} + (\Omega_\eta \cdot K_{c\zeta} - \Omega_\zeta \cdot K_{c\eta}) &= \sum_n^{i=1} m_{\xi i}; \\ \frac{d'K_{c\eta}}{dt} + (\Omega_\zeta \cdot K_{c\xi} - \Omega_\xi \cdot K_{c\zeta}) &= \sum_n^{i=1} m_{\eta i} \end{aligned} \quad (2.23)$$

У якості рухомих осей для визначення локальної похідної вектора  $\vec{K}_c$  візьмемо також систему прямокутних напівзв'язаних осей  $\zeta, \xi, \eta$ . Так як вони для осесиметричного тіла обертання є головними центральними осями, то як відомо, проєкції вектора  $\vec{K}_c$  на ці вісі будуть такі:

$$K_{c\zeta} = I_\zeta \cdot \omega_\zeta; \quad K_{c\xi} = I_\xi \cdot \omega_\xi; \quad K_{c\eta} = I_\eta \cdot \omega_\eta. \quad (2.24)$$

При цьому проєкції кутової швидкості снаряда на вісі  $\zeta, \xi, \eta$  будуть такими:

$$\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta; \quad \omega_\xi = \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta; \quad \omega_\eta = \dot{\vartheta}, \quad (2.25)$$

де  $\dot{\varphi}$  - кутова швидкість обертання снаряда навколо поздовжньої вісі.

Проекції кутової швидкості напівзв'язаної системи прямокутних осей  $\zeta, \xi, \eta$  на ці ж самі вісі дорівнюють:

$$\Omega_{\zeta} = \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta; \quad \Omega_{\xi} = \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta; \quad \Omega_{\eta} = \dot{\vartheta}, \quad (2.26)$$

Підставляючи (2.24) з урахуванням (2.25) та (2.26) в (2.23) і враховуючи, що для осесиметричних снарядів  $I_{\xi} = I_{\eta} = A$ ,  $I_{\zeta} = C$ , після необхідних перетворень отримаємо наступну систему рівнянь обертального руху снаряда:

$$\begin{aligned} C \cdot \dot{\omega}_{\zeta} &= \sum_n^{i=1} m_{\zeta i}; \\ A \cdot (\dot{\psi} \cdot \cos \vartheta - 2 \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \sin \vartheta) + C \cdot \omega_{\zeta} \cdot \dot{\vartheta} &= \sum_n^{i=1} m_{\xi i}; \\ A \cdot (\ddot{\vartheta} + \dot{\psi}^2 \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta) - C \cdot \omega_{\zeta} \cdot \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta &= \sum_n^{i=1} m_{\eta i}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

Праві частини рівнянь обертального руху (2.27) містять додатки моментів діючих на снаряд сил відносно напівзв'язаних вісів  $\zeta, \xi, \eta$ . Моменти сили тяжіння та моменти сили тяги, за умови відсутності її ексцентриситету, дорівнюють нулю так, як лінії дії цих сил проходять крізь початок координат осей  $\zeta, \xi, \eta$ . З тієї ж самої причини дорівнюють нулю і моменти відносно осей  $\zeta, \xi, \eta$  поздовжньої аеродинамічної сили  $\vec{R}_{\zeta}$ .

Моменти відносно осей  $\zeta, \xi, \eta$  нормальної складової рівнодіючої аеродинамічної сили  $\vec{R}_{n\zeta}$ , яка прикладена до снаряда в точці, що прийнято звати центром тиску, визначемо за допомогою рис. 2.8. На малюнку рис.2.3 центр тиску позначений літерою D. Його положення на поздовжній вісі снаряда визначається координатою  $\zeta_D$ . Зазначена координата може бути додатною або ж від'ємною.

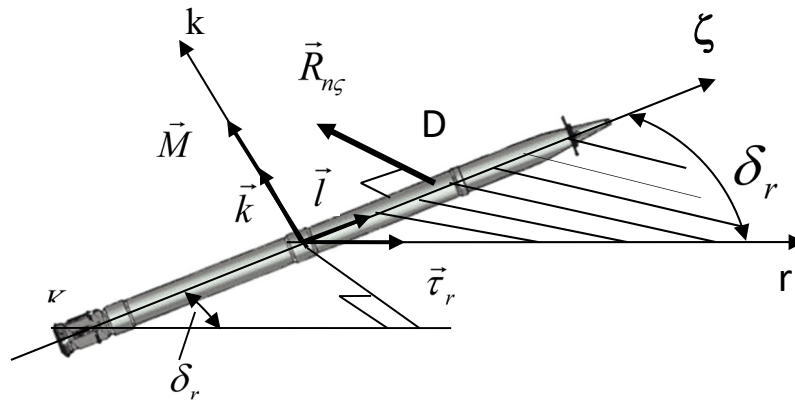


Рисунок 2.8 - До визначення аеродинамічних моментів в площині опору.

Завдяки тому, що сила  $\vec{R}_{n\zeta}$  діє в площині опору снаряда, вектор її аеродинамічного моменту  $\vec{M}$ , що перпендикулярний площині опору снаряда, може бути записаний за допомогою одиничних векторів  $\vec{l}$  та  $\vec{\tau}_r$  у вигляді

$$\vec{M} = M \cdot \vec{k}, \quad (2.28)$$

де  $M = R_{n\zeta} \cdot \zeta_D$ ,  $\vec{k} = \frac{1}{\bar{m}} \cdot [(\vec{\tau}_r \times \vec{l})]$ ,

$R_{n\zeta}$  – додатне чисельне значення нормальної аеродинамічної сили,  $\zeta_D$  – координата центру тиску за умови, що початок відліку поздовжньої вісі снаряда  $\zeta$  знаходиться в центрі мас снаряда,  $\bar{m} = |\text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r)| = |\sin \delta_r|$  – синус кута між одиничними векторами  $\vec{l}$  та  $\vec{\tau}_r$ ,  $\vec{k}$  – одиничний вектор, перпендикулярний до площини опору снаряда.

Координата  $\zeta_D$  може бути додатною або ж від'ємною в залежності від положення точки D та на вісі снаряда, величина M, що обчислюється за залежністю (2.28) може бути додатною або ж від'ємною в залежності від знаків координат  $\zeta_D$ .

Для знаходження проєкцій вектора аеродинамічного моменту  $\vec{M}$  на вісі  $\zeta, \xi, \eta$ , що дорівнюють моментам сили  $\vec{R}_{n\zeta}$  відносно цих осей, запишемо векторний добуток  $(\vec{\tau}_r \times \vec{l})$  за допомогою визначника, тобто надамо (2.28) вигляд

$$\vec{M} = \frac{M}{\bar{m}} \cdot \begin{vmatrix} \vec{\zeta} & \vec{\xi} & \vec{\eta} \\ \tau_{r\zeta} & \tau_{r\xi} & \tau_{r\eta} \\ l_\zeta & l_\xi & l_\eta \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

Розкриваючи визначник, маємо:

$$\begin{aligned} M_\zeta &= \frac{M}{\bar{m}} \cdot (\tau_{r\xi} \cdot l_\eta - \tau_{r\eta} \cdot l_\xi); \\ M_\xi &= \frac{M}{\bar{m}} \cdot (\tau_{r\eta} \cdot l_\zeta - \tau_{r\zeta} \cdot l_\eta); \\ M_\eta &= \frac{M}{\bar{m}} \cdot (\tau_{r\zeta} \cdot l_\xi - \tau_{r\xi} \cdot l_\zeta). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Так, як проєкції одиничного вектора  $\vec{l}$  на напівзв'язані вісі  $\zeta, \xi, \eta$  мають значення  $l_\zeta = 1$ ;  $l_\xi = 0$ ;  $l_\eta = 0$ , то проєкції (2.30) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} M_\zeta &= 0; \\ M_\xi &= \bar{M} \cdot (\tau_{r\eta} \cdot 1 - \tau_{r\zeta} \cdot 0) = \frac{M}{\bar{m}} \cdot \tau_{r\eta}; \\ M_\eta &= \bar{M} \cdot (\tau_{r\zeta} \cdot 0 - \tau_{r\xi} \cdot 1) = -\frac{M}{\bar{m}} \cdot \tau_{r\xi}; \end{aligned} \quad (2.31)$$

Необхідні проєкції  $\tau_{r\xi}$  та  $\tau_{r\eta}$  знайдемо за допомогою Таблиці 2 направляючих косинусів.

$$\begin{aligned}\tau_{r\xi} &= -\tau_{rx} \cdot \sin \mathcal{G} \cdot \cos \psi + \tau_{ry} \cdot \cos \mathcal{G} + \tau_{rz} \cdot \sin \mathcal{G} \cdot \sin \psi; \\ \tau_{r\eta} &= \tau_{rx} \cdot \sin \psi + \tau_{rz} \cdot \cos \psi;\end{aligned}\quad (2.32)$$

де  $\mathcal{G}$  та  $\psi$  – кути тангажу та ристання снаряда.

Вектор демпфуючого моменту, що діє в площині опору супротив напрямку обертання при коливаннях снаряда навколо центру мас, може бути записаний таким чином:

$$\vec{M}_D = -M_D \cdot \vec{r} \quad , \quad (2.33)$$

де 
$$M_D = 0,5 \cdot \rho \cdot V_r \cdot S \cdot l^2 \cdot m_z^{\bar{\omega}_z} \cdot \dot{\delta}_r \quad ,$$

$m_z^{\bar{\omega}_z}$  – обертальна похідна аеродинамічного демпфуючого моменту;  $S$  – площа міделевого перетину снаряда,  $\rho$  – щільність повітря,  $V_r$  – швидкість польоту,  $l$  – довжина снаряда,  $\dot{\delta}$  – кутова швидкість снаряда в площині опору. При цьому добуток  $\rho \cdot V$  знаходимо таким чином:

$$\rho \cdot V = \pi(y) \cdot \frac{\Pi_{0N}}{g} \cdot \frac{\tau_{0N}}{\tau} \cdot V_r \quad (2.34)$$

Проекції вектора демпфуючого моменту записуються таким чином:

$$M_{D\xi} = -\frac{M_D}{m} \cdot \tau_{r\eta} \quad , \quad M_{D\pi} = \frac{M_D}{m} \cdot \tau_{r\xi} \quad , \quad (2.35)$$

Підставляючи в рівняння поступального (2.4) та обертального (2.27) рухів снаряда знайдені проекції сил та моментів, що надаються без врахування впливу ексцентриситету сили тяги двигуна, отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь, записаних у формі зручній для чисельного інтегрування:



- 1)  $\dot{y}_c = V \cdot \sin \Theta$ ;
- 2)  $\dot{x}_c = V \cdot \cos \Theta \cdot \cos \Psi$ ;
- 3)  $\dot{z}_c = -V \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Psi$ ;
- 4)  $\dot{V} = \Sigma F_T / m$ ;
- 5)  $\dot{\Theta} = \Sigma F_N / (m \cdot V)$ ;
- 6)  $\dot{\Psi} = -\Sigma F_B / (m \cdot V \cdot \cos \Theta)$ ;
- 7)  $\dot{\pi}(Y) = -\frac{\pi(Y)}{R \cdot [\tau(Y) + \Delta\tau]} \cdot V \cdot \sin \theta$ ,

$$\Sigma F_T = (m\vec{g})_T + (\vec{P})_T + (\vec{R}_\zeta)_T + (\vec{R}_{n\zeta})_T;$$

$$\Sigma F_N = (m\vec{g})_N + (\vec{P})_N + (\vec{R}_\zeta)_N + (\vec{R}_{n\zeta})_N;$$

$$\Sigma F_B = (m\vec{g})_B + (\vec{P})_B + (\vec{R}_\zeta)_B + (\vec{R}_{n\zeta})_B.$$

Проекції сили тяги двигуна на вісі траєкторної системи записуються у вигляді:

$$(\vec{P})_T = P_x \cdot \cos \Theta \cdot \cos \Psi + P_y \cdot \sin \Theta - P_z \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Psi;$$

$$(\vec{P})_N = -P_x \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Psi + P_y \cdot \cos \Theta + P_z \cdot \sin \Theta \cdot \sin \Psi;$$

$$(\vec{P})_B = P_x \cdot \sin \Psi + P_z \cdot \cos \Psi,$$

Де, в свою чергу, проекції сили тяги двигуна на вісі стартової системи мають значення:

$$P_x = P \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \psi; \quad P_y = P \cdot \sin \vartheta; \quad P_z = -P \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \psi.$$

Проекції сили тяжіння на вісі траєкторної системи записуються у вигляді:

$$(m\vec{g})_T = -mg \cdot \sin \Theta; \quad (m\vec{g})_N = -mg \cdot \cos \Theta; \quad (m\vec{g})_B = 0.$$

Проекції аеродинамічних сил:

$$\begin{aligned}(\vec{R}_\zeta)_T &= A_\zeta \cdot l_T; & (\vec{R}_\zeta)_N &= A_\zeta \cdot l_N; & (\vec{R}_\zeta)_B &= A_\zeta \cdot l_B; \\(\vec{R}_{n_\zeta})_T &= A_{n_\zeta} \cdot (\tau_{r_\zeta} \cdot l_T - \tau_{rT}); & (\vec{R}_{n_\zeta})_N &= A_{n_\zeta} \cdot (\tau_{r_\zeta} \cdot l_N - \tau_{rN}); \\(\vec{R}_{n_\zeta})_B &= A_{n_\zeta} \cdot (\tau_{r_\zeta} \cdot l_B - \tau_{rB}),\end{aligned}$$

де 
$$A_\zeta = -C_\zeta \cdot \frac{\rho V_r^2}{2} \cdot S \cdot \text{sign}(\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r); \quad A_{n_\zeta} = \frac{R_{n_\zeta}}{m} = \frac{C_{n_\zeta} \cdot \frac{\rho V_r^2}{2} \cdot S}{m};$$

$$V_r = \sqrt{(\dot{x} - W_x)^2 + (\dot{y} - W_y)^2 + (\dot{z} - W_z)^2}, \quad \tau_{rx} = \frac{\dot{x} - W_x}{V_r}; \quad \tau_{ry} = \frac{\dot{y}}{V_r}; \quad \tau_{rz} = \frac{\dot{z} - W_z}{V_r},$$

$$\bar{m} = \text{mod}(\vec{l} \times \vec{\tau}_r) = |\sin \delta_r| = \sqrt{1 - (\cos \delta_r)^2} = \text{mod}(\vec{\tau} \times \vec{l}) = \sqrt{\tau_{r\xi}^2 + \tau_{r\eta}^2};$$

$$\cos \delta_r = (\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r) = \tau_{r_\zeta}, \text{ або ж } \cos \delta_r = (\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r) = l_T \cdot \tau_{rT} + l_N \cdot \tau_{rN} + l_B \cdot \tau_{rB};$$

$$\text{sign}(\vec{l} \cdot \vec{\tau}_r) = \text{sign}(\cos \delta_r) = \text{sign}(\tau_{r_\zeta}); \delta_r = \arcsin(\bar{m}); C_\zeta = C_\zeta(M, \delta_r) -$$

аеродинамічний коефіцієнт;  $C_{n_\zeta} = C_{n_\zeta}(M, \delta_r)$  - аеродинамічний коефіцієнт,

$$M = \frac{V_r}{a} = \frac{V_r}{20,05\sqrt{\tau}} - \text{число Маха в потоці набігаючого на снаряд повітря, } \tau -$$

умовна (віртуальна) температура повітря.

Проекції одиничних векторів:

$$l_T = l_x \cdot \cos \Theta \cdot \cos \Psi + l_y \cdot \sin \Theta - l_z \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Psi;$$

$$l_N = -l_x \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Psi + l_y \cdot \cos \Theta + l_z \cdot \sin \Theta \cdot \sin \Psi;$$

$$l_B = l_x \cdot \sin \Psi + l_z \cdot \cos \Psi,$$

де 
$$l_x = \cos \mathcal{G} \cdot \cos \psi; \quad l_y = \sin \mathcal{G}; \quad l_z = -\cos \mathcal{G} \cdot \sin \psi.$$

$$\tau_{r_\zeta} = \tau_{rx} \cdot \cos \mathcal{G} \cdot \cos \psi + \tau_{ry} \cdot \sin \mathcal{G} - \tau_{rz} \cdot \cos \mathcal{G} \cdot \sin \psi;$$

$$\tau_{r_\xi} = -\tau_{rx} \cdot \sin \mathcal{G} \cdot \cos \psi + \tau_{ry} \cdot \cos \mathcal{G} + \tau_{rz} \cdot \sin \mathcal{G} \cdot \sin \psi;$$

$$\tau_{r\eta} = \tau_{rx} \cdot \sin \psi + \tau_{rz} \cdot \cos \psi ,$$

$$\text{де} \quad \tau_{rx} = \frac{\dot{x} - W_x}{V_r}; \quad \tau_{ry} = \frac{\dot{y} - W_y}{V_r}; \quad \tau_{rz} = \frac{\dot{z} - W_z}{V_r},$$

$$V_r = \sqrt{(\dot{x} - W_x)^2 + (\dot{y} - W_y)^2 + (\dot{z} - W_z)^2} .$$

$$\tau_{rT} = \tau_{rx} \cdot \cos \Theta \cdot \cos \Psi + \tau_{ry} \cdot \sin \Theta - \tau_{rz} \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Psi;$$

$$\tau_{rN} = -\tau_{rx} \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Psi + \tau_{ry} \cdot \cos \Theta + \tau_{rz} \cdot \sin \Theta \cdot \sin \Psi;$$

$$\tau_{rB} = \tau_{rx} \cdot \sin \Psi + \tau_{rz} \cdot \cos \Psi .$$

$$8) \dot{\omega}_\zeta = \frac{1}{C} \cdot \sum M_\zeta ;$$

$$9) \dot{\mathcal{G}} = \omega_1 ;$$

$$10) \dot{\psi} = \omega_2 ;$$

$$11) \dot{\omega}_1 = \frac{1}{A} \cdot \left( -\omega_2^2 \cdot A \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta + C \cdot \omega_\zeta \cdot \omega_2 \cdot \cos \vartheta \right) + \sum M_\eta ;$$

$$12) \dot{\omega}_2 = \frac{1}{A \cdot \cos \vartheta} \cdot \left( 2 \cdot A \cdot \omega_2 \cdot \omega_1 \cdot \sin \vartheta - C \cdot \omega_\zeta \cdot \omega_1 \right) + \sum M_\xi ,$$

$$\text{де} \quad \sum M_\xi = (M - M_D) \cdot \frac{\tau_{r\eta}}{\bar{m}} ; \quad \sum M_\eta = (M - M_D) \cdot \left( -\frac{\tau_{r\xi}}{\bar{m}} \right) ;$$

$$M = R_{n\zeta} \cdot \zeta_D - F_{\dot{n}\delta} \cdot \zeta_{\dot{E}} \cdot \bar{m} , \quad M_D = 0,5 \cdot \rho \cdot V_r \cdot S \cdot l^2 \cdot m_z^{\bar{\omega}_z} \cdot \dot{\delta}_r ;$$

$$m_z^{\bar{\omega}_z} = m_z^{\bar{\omega}_z} (M, \delta_r) ; \quad q = \frac{\rho V_r^2}{2} = \pi(y) \cdot \frac{\Pi_{0N}}{2g} \cdot V_{rt}^2 ;$$

$$\rho \cdot V_r = \pi(y) \cdot \frac{\Pi_{0N}}{g} \cdot \frac{\tau_{0N}}{\tau} \cdot V_r ; \quad V_{rt} = \frac{\tau_{0N}}{\tau} \cdot V_r ; \quad \pi(y) - \text{функція тиску};$$

аеродинамічні коефіцієнти  $C_\zeta(M, \delta_r)$ ;  $C_{n_\zeta}(M, \delta_r)$ ;  $m_{\xi}^{\bar{\omega}_\xi}(M, \delta_r)$ ;  $m_{\eta}^{\bar{\omega}_\eta}(M, \delta_r)$

визначаються по числу Маха та куту  $\delta_r$ ,  $\Pi_{0N} = 1,206 \cdot 9.81 \frac{\text{Н}}{\text{М}^3}$ ,  $\tau_{0N} = 288,9^0\text{С}$

– питома вага та умовна (віртуальна) нормальна температура повітря по НАА.

За нормальний розподіл температури  $\tau$  по висоті прийняті залежності Д. А. Вентцеля:

$$\text{для висот від 0 до 9300 м: } \tau(y) = \tau_{0N} - 0,006328 \cdot Y + \Delta\tau;$$

для висот від 9300 м до 12000 м:

$$\tau(y) = 230,0 + 0,006328(Y - 9300) + 1,172 \cdot 10^{-6}(Y - 9300)^2 + \Delta\tau;$$

$$\text{для висот від 12000 м і вище: } \tau(Y) = 221,5^0\text{К} + \Delta\tau,$$

де  $\Delta\tau$  – відхилення температури від  $t=15^0\text{С}$  на рівні моря.

На підставі наведених рівнянь і аеродинамічного моделювання були розроблені алгоритм та обчислювальна програма розрахунку параметрів траєкторії реактивного опереного некерованого снаряда. Проведені розрахунки показали задовільні результати в порівнянні з існуючими табличними даними.

## ВИСНОВКИ

У результаті виконання 2-го етапу НДР було проведено моделювання польоту реактивного снаряду та проведені розрахунки аеродинамічних коефіцієнтів складових аеродинамічного опору опереного тіла обертання як при осесиметричному обтіканні, так і при наявності куті атаки за кресленнями його зовнішніх контурів на основі чисельного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса з використанням диференційних моделей турбулентної в'язкості в рамках програмного продукту ANSYS CFX. Під час дослідження було виконано наступне:

1. Створено методику, що призначена для обчислення аеродинамічних коефіцієнтів опору тертя, опору тиску та донного опору в залежності від польотних чисел Маха  $M_\infty \leq 4,5$  та Рейнольдса  $Re_{L,\infty} \leq 10^8$  за допомогою програмного продукту ANSYS CFX.

2. Розроблена придатна для практичного застосування методика розрахунку аеродинамічних коефіцієнтів складових аеродинамічного опору оперених тіл обертання за їх кресленнями при осесиметричному обтіканні і обтіканні під кутом атаки. За допомогою розробленої методики можливо обчислити аеродинамічні коефіцієнти опору тертя, опору тиску та донного опору снаряда в залежності від польотних чисел Маха та Рейнольдса при до-, транс- та надзвукових швидкостях.

3. Створено систему диференційних рівнянь просторового руху РС, призначену для розрахунків траєкторії руху та дослідження коливань снаряда. Рівняння відображають існуючу картину обтікання снаряда зустрічним потоком повітря, враховуючи всі можливі складові вітру та зберігаючи при цьому існуючі перехресні інерційні зв'язки. Вони придатні для використання при любых кутах нутації снаряда та придатні для чисельного інтегрування.

Математичне моделювання польоту РС та моделювання обтікання РС набігаючим потоком повітря в польоті дозволяє значно зменшити обсяг відповідних натурних випробувань, вирішити такі проектні задачі, як аналіз

форми снаряда, дослідження параметричної стабільності траєкторії польоту РС, а також оцінити вплив окремих факторів, що збурюють, при відтворенні різних умов польоту.

Результати роботи можна використовувати у конструкторських бюро та підприємствах відповідного профілю. Створені моделі та методики дозволять підвищити якісно-експлуатаційні характеристики РС, скоротити час та зменшити вартість розробки новітніх зразків РС РСЗВ, які будуть конкурентоспроможні як на вітчизняному, так і на міжнародному ринках.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Ameer G. Mikhail. Flow Simulation and Drag Components for Heat Projectiles With Spike and Cone Noses [Text]/ Ameer G. Mikhail. – Army Research Laboratory. – 1995 –№3– P. 55.
2. James DeSpirito. CFD Computation of Magnus Moment and Roll Damping Moments of a Spinning Projectile [Text] / James DeSpirito and Karen R. Heavey. – Army Research Laboratory. – 2006 – P. 24.
3. Langtry, R.B. Transition Modeling for General CFD Application in Aeronautics [Text] / R.B. Langtry, F.R. Menter – AIAA . – 2005 – №522 – P. 1 – 14.
4. Адамов, Н.П. Исследование аэродинамики возвращаемых аппаратов при натуральных значениях чисел Рейнольдса [Текст] / Н.П. Адамов, М.Д. Бродецкий, Л.Г. Васенев и др. – 2006.– №3 – С. 341–351.
5. Timirzyanov, B.A. Assessment of Magnus Effect on the Ballistic Properties of a Rotating Sphere [Text] / B.A. Timirzyanov – New university. Technical sciences – 2016. – С. 55-64.
6. Lien, F. S. Low Reynolds-Number Eddy-Viscosity Modelling Based on Non-Linear Stress-Strain [Text] / F.S. Lien, W.L. Chen, M.A. Leschziner – Vorticity Relations. – Engineering Turbulence Modelling and Measurements 3. – Elsevier. — 1996. – P. 91–100.
7. Park, T. S. A nonlinear low-Reynolds-number  $k$ - $\epsilon$  model for turbulent separated and reattaching flows [Text] / T.S.Park, H.J.Sung –Flow field computations. – Int. J. Heat Mass Transfer. – 1995. – Vol. 38, No. 14. – P. 2657–2666.
8. Годунов, С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики [Текст] / С.К.Годунов. – М.: Наука. – 1976. – 400с.
9. Mansour, N. N. Reinolds-stress and dissipation rate budgets in a turbulent channel flow [Text] / N. N. Mansour , J. Kim , P. J. Moin. – Fluid Mech. – 1988. – Vol. 194. P. 15 – 44.

10. Menter, F. R. Multiscale Model for Turbulent Flows [Text]/ F. R. Menter. – In 24th Fluid Dynamic Conference. – American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 1993. – P.128-143.
11. Menter, F. R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications [Text] / F. R. Menter. – AIAA Journal. – 1994. – Vol. 32, No. 8. – P.42-53.
12. Menter, F. R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model[Text]/ F. R. Menter. – Tubulence, Heat and Mass Transfer 4 – 2003.
13. Таблицы стрельб осколочно-фугасными реактивными снарядами М-210Ф – М.:Военное издательство МО СССР. – 1975. – 96 с.
14. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969, 711 с.
15. Langtry, R. B. A Correlation-Based Transition Model using Local Variables for Unstructured Parallelized CFD Code / R. B. Langtry // University of Stuttgart, – PhD Thesis, – May 31, – 2006.
16. Краснов, Н.Ф. Аэродинамика. Том 1. Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла. [Текст] / Н. Ф. Краснов – Учебник для вузов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, – 1976, – 384 с.
17. Sinclair, C. Effects of Freestream Turbulence on Boundary-Layer Transition [Text] / C. Sinclair, Jr. Wells // AIAA Journal, – vol. 5, – no. 1, – 1967, – pp. 172-174.
18. Леонтьев, А. И. Ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковых пограничных слоях на летном осесимметричном аэрофизическом комплексе и на модели в аэродинамической трубе при наличии теплообмена и отоса воздуха / А. И. Леонтьев, А. М. Павлюченко //Теплофизика высоких температур. – 2008. – Т.46, №4. – С. 596 – 622.
19. Roger G. Hart. Flight Investigation at Mach Number From 0.8 to 1.5 to Determine the Effects of Nose Bluntness on the Total Drag of Two Fin-Stabilized Bodies of Revolution / Roger G. Hart. // NASA RM L50108a , – 1950.



20. Roger G. Hart. Effects of Stabilizing Fins and a Rear-Support Sting on the Base Pressures of a Body of Revolution in Free Flight at Mach Numbers from 0.7 to 1.3. [Text] / Roger G. Hart. // NACA RM L52E06, – 1952.
21. Morrow, J. D. Nelson. Large – Scale Flight Measurements of Zero-Lift Drag of 10 Wing-Body Configurations at Mach Numbers from 0.8 to 1.6. / J. D. Morrow, R. L. Nelson /
22. Чернозубов, А. Д. Внешняя баллистика / А. Д. Чернозубов. – М.: ВАИА им. Дзержинского. – 1954. – 496 с.
23. Дмитриевский, А. А. Внешняя баллистика / А. А. Дмитриевский. – М.: Машиностроение. – 1972. – 582с.
24. Краснов, Н. Ф. Аэродинамика. Часть I. Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла [Текст] / Н. Ф. Краснов – М.: Высшая школа. – 1978. – 416 с.
25. Краснов, Н.Ф. Аэродинамика. Часть II. Методы аэродинамического расчета [Текст] / Н. Ф. Краснов – М.: Высшая школа. – 1980. – 416 с.
26. Аэродинамика ракет. Кн. 2. Методы аэродинамического расчета [Текст] // ред. М. Хемш, Дж. Нилсен. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
27. Абрамович, Г. Н. Прикладная газовая динамика [Текст] / Г. Н. Абрамович. – М.: Наука. –1976. – 888 с.
28. Фабрикант, Н. Я. Аэродинамика [Текст] / Н. Я. Фабрикант. – М.: Наука. –1964.– 814 с.
29. Черный, Г. Г. Газовая динамика [Текст] / Г. Г. Черный. – М: Наука. Гл. Ред.. физ.-мат. лит. – 1988. – 424 с.
30. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969. – 742
31. Кутателадзе, С. С. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое [Текст] / С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев – М.: Энергия, 1985. – 319 с.

32. Handbook of supersonic aerodynamics, Section 8, Bodies of Revolution, Navweps report 1488 (vol. 3). U. S. Government Printing Office, Washington, October, 1961.
33. Шийко, О. М. Розрахунок складової донного опору аеродинамічного коефіцієнту лобового опору артилерійського снаряда [Текст] / О. М. Шийко, П. В. Полениця, І. В. Коплик та ін. // Артиллерийское и стрелковое вооружение. Международный научно-технический журнал. – Киев:КБ «Артиллерийское вооружение». – 2010. –№2. –С. 63-64.
34. Шийко, О. М. Складова опору тиску аеродинамічного коефіцієнту лобового опору артилерійського снаряда [Текст] / О. М. Шийко, П. В. Полениця, І. В. Коплик та ін. // Системи озброєння і військова техніка. – Харків: ХУПС. – 2010.– №1. – С. 108-117.
35. Шийко, О. М. Розрахунок складової опору тертя коефіцієнту лобового опору тіла конічної форми [Текст] / О. М. Шийко, П. В. Полениця, І. В. Коплик та ін. // Вісник СумДУ, Серія технічні науки. – Суми: СумДУ.– 2010. – №2. – С. 62-67.