

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática



Tema:

**INTRODUCCIÓN A LAS SUPERFICIES DE
RIEMANN**

Trabajo de graduación para obtener el grado de Licenciado en
Matemática

Autor:

Br. Mario Orlando Escobar Zelaya

Asesor: MSc. Mario Alexis Ruiz Mejía

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

MSc. Roger Armando Arias

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO:

Ing. Nelson Bernabé Granados

VICE-RECTOR ACADEMICO:

Dr. Manuel de Jesús Joya

SECRETARIO GENERAL:

Lic. Cristobal Hernán Ríos

FISCAL:

Lic. Rafael Humberto Peña

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdova

VICE-DECANO:

Lic. Carlos Antonio Quintanilla Aparicio

SECRETARIA:

Licda. Damaris Melany Herrera Turcios

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR DE ESCUELA:

Dr. José Nerys Funes Torres

ASESOR:

MSc. Mario Alexis Ruíz

Índice

Agradecimientos	4
Introducción	5
Objetivos	6
CAPITULO 1: Preliminares	7
1.1. Definiciones básicas	7
1.2. Un repaso de teoría de variable compleja	8
1.3. Homotopías	12
1.4. Modelo planar de superficies	16
1.5. Series de Puiseux	18
CAPITULO 2	30
2.1. Continuación meromorfa y analítica	30
2.2. Continuación meromorfa a lo largo de un camino	36
2.3. El teorema de Monodromía	39
2.4. Superficie de Riemann de $\log(z)$	43
2.5. Superficie de Riemann de $z^{1/q}$	48
CAPITULO 3	53
3.1. Superficies abstractas de Riemann	53
3.2. La esfera de Riemann	55
3.2.1. Comportamiento de funciones en el infinito	57
3.2.2. Funciones racionales	60
3.2.3. Propiedades topológicas	62
CAPITULO 4	67
4.1. Relación entre curvas algebraicas y superficies de Riemann	67
4.2. Construcción de superficie de Riemann asociada a una curva	68
4.3. Monodromía de una curva algebraica plana	69
4.4. Superficie de Riemann de $f(z) = \frac{z^3}{z^2 - 1}$	75
Conclusiones	82
Referencias	83

Agradecimientos

A mis padres, porque ellos siempre estuvieron a mi lado brindándome apoyo y consejos para ser de mi una mejor persona, a mis hermanos que estuvieron pendientes para ayudarme en cualquier dificultad que se presentó durante este proceso.

Agradezco a mi asesor Mario Ruiz por haberme brindado la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento, así también por haberme tenido toda la paciencia del mundo para guiarme durante todo el desarrollo de este trabajo.

Para finalizar agradezco a todos los que fueron mis compañeros durante mis años de universidad, ya que gracias al compañerismo, amistad y apoyo moral, han aportado en gran medida mis ganas de seguir superándome como profesional.

En especial agradezco a Alexander por motivarme a seguir adelante en los momentos de desesperación, a Eunice por estar ahí siempre que la necesité, a Jorge por todas las lecciones de vida que me diste, a Víctor y Mike por todos sus consejos y apoyo.

Introducción

Riemann observó que para construir una teoría sólida de funciones analíticas de una variable compleja, es necesario extender el dominio de definición, pues la propiedad “ser analítica” es una propiedad local. La solución a este problema la proporciona la idea de *Superficie de Riemann* asociada a una función de la cual es el dominio natural máximo de la función construida a partir de su comportamiento local.

Este trabajo está estructurado en cuatro capítulos. En el capítulo 1 se encuentra una recopilación de los resultados más importantes del análisis complejo que son necesarios para el estudio de las superficies de Riemann, se incluye el concepto de homotopía, el cual es necesario para demostrar el teorema de monodromía. Luego hacemos un breve estudio sobre el modelo planar de superficies, finalizando el capítulo con una introducción a las series de Puiseux, las cuales son una herramienta fundamental para calcular el grupo de monodromía de una curva algebraica.

En el capítulo 2 se introducen los conceptos de continuación analítica y meromorfa, y luego mostramos cómo esto conduce a la construcción de superficies de Riemann. Luego consideramos las funciones multivaluadas $\log z$ y $z^{1/q}$, y en cada caso se construye el dominio (la superficie de Riemann) sobre el cual se representan por una función univaluada.

En el capítulo 3 se da la definición general de superficie de Riemann, luego se demuestra que el plano complejo extendido que se llamará esfera de Riemann verifica dicha definición y por tanto es una superficie de Riemann, para la cual se estudian algunas propiedades topológicas de esta.

En el capítulo 4 se explica la construcción de superficies compactas de Riemann. Explicamos un algoritmo implementado en Maple que permite calcular el grupo de monodromía de la curva algebraica plana que define la superficie compacta.

Objetivos

Objetivo General

Desarrollar un estudio introductorio a las superficies de Riemann desde una perspectiva intuitiva que permita comprender su geometría.

Objetivos Específicos

- Estudiar la superficie de Riemann asociada a una función multivaluada.
- Comprender la relación entre una curva algebraica y la superficie de Riemann que define.
- Construir la superficie de Riemann definida por una curva algebraica mediante métodos y algoritmos computacionales.

CAPITULO 1: Preliminares

En este capítulo haremos una recopilación de los resultados más importantes de variable compleja necesarios para el estudio de las superficies de Riemann, además de estudiar homotopías, las cuales son necesarias para demostrar el teorema de monodromía. Luego hacemos un breve estudio sobre el modelo planar de superficies. Y por último introducimos las series de Puiseux que nos ayudarán a encontrar el grupo de monodromía de una curva algebraica.

1.1. Definiciones básicas

En el resto del documento haremos mención a las siguientes definiciones:

Un punto es llamado *singular* de una función dada si no es analítica en dicho punto. Digamos, $z = z_0$ es un punto singular de $f(z)$ si $f'(z_0)$ no existe. Suponga que $f(z)$ es analítica en una región $0 < |z - z_0| < R$ (i.e en una vecindad de $z = z_0$), y no en el punto z_0 . Entonces el punto $z = z_0$ es llama *punto singular aislado* de $f(z)$.

Si $f(z)$ es analítica en una región $0 < |z - z_0| < R$, y si $f(z)$ puede ser analítica en $z = z_0$ asignando el valor apropiado para $f(z_0)$, entonces $z = z_0$ es una singularidad removible.

Una singularidad aislada en $z = z_0$ de $f(z)$ se dice que es un *polo* si $f(z)$ tiene la siguiente representación:

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^N}$$

donde N es un entero positivo, $N \geq 1$, $\phi(z)$ es analítica en una vecindad de z_0 , y $\phi(z_0) \neq 0$. Más general diremos que $f(z)$ tiene un polo de orden N si $N \geq 2$ y que tiene un polo simple si $N = 1$.

Una función *meromorfa* es una función que es analítica casi en todo punto, excepto en un conjunto de puntos aislados (los polos de la función).

Un mapeo continuo $f : X \rightarrow Y$ es una *función recubridora* si cada $y \in Y$ tiene una vecindad V tal que $f^{-1}(V)$ consiste de conjuntos abiertos disjuntos mapeados de manera homeomorfa en V por f , en cada caso X es un *espacio recubridor* de Y .

1.2. Un repaso de teoría de variable compleja

En esta sección retomamos los principales teoremas de [5] sobre el cálculo de variable compleja, los cuales son importantes en el estudio que vamos a desarrollar. Daremos prueba de algunos resultados que se utilizaran con frecuencia.

Teorema 1.1. (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Sea $f(z)$ analítica en una región R y sea $u(x, y), v(x, y)$ las partes real e imaginaria de $f(z)$ respectivamente. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

en todos los puntos de R . Estas son llamadas las ecuaciones de *Cauchy-Riemann*. A la inversa, suponga que u_x, u_y, v_x, v_y existen y son continuas en R y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Entonces f es analítica en todo R .

El teorema básico de integración compleja es el Teorema de Cauchy.

Teorema 1.2. Sea $f(z)$ analítica en una región simplemente conexa A y sea γ un camino cerrado diferenciable a trozos en A . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Daremos algunos resultados importantes que se derivan del teorema de Cauchy.

Teorema 1.3. Fórmula integral de Cauchy

Sea $f(z)$ analítica en una región A simplemente conexa, y sea γ un camino cerrado diferenciable a trozos en A y sea b un punto en la región encerrada por γ . Entonces

$$f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-b)} dz.$$

A demás, tenemos la siguiente fórmula para la derivada de f , obtenida de diferenciar bajo el signo de integral:

$$f^{(n)}(b) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}} dz.$$

Teorema 1.4. Sea γ un camino cerrado diferenciable por partes en una región R y encerrando la región A . Sea f analítica en R excepto posiblemente para un número finito de singularidades en A . Entonces $\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \times$ (suma de los residuos en la singularidades de f en A).

El siguiente resultado es una simple consecuencia del Teorema anterior.

Teorema 1.5. Sea γ un camino cerrado diferenciable por partes en una región R y encerrando la región A . Sea f analítica en R excepto posiblemente para un número finito de polos en A y suponga que $f(z) \neq 0$ a lo largo de γ . Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P)$$

donde N es la suma de los ordenes de los ceros de f en A y P es la suma de los ordenes de los polos de f en A .

Una de las muchas aplicaciones de la integración compleja es la existencia de series de potencias para funciones analíticas. Si una función g es analítica en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ entonces podemos representarla por una serie de potencias

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

la cual converge en algún disco con centro en z_0 . Esto conduce a una prueba del resultado básico subyacente a la continuación analítica.

Teorema 1.6. Sea f analítica en una región R con ceros en una sucesión infinita de puntos z_i que tiene límite $z^* \in R$. Entonces f es idénticamente cero en R .

Demostración. Como f es continua, $f(z^*) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(z_i) = 0$. Si f no es idénticamente cero entonces podemos expandir f a una serie de potencias en z^* ,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z^*)^n,$$

en la cual no todos los coeficientes a_n son cero. Si a_m es el primer coeficiente distinto de cero entonces

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z^*)^n = (z - z^*)^m g(z),$$

donde g es analítica en R y $g(z^*) = a_m \neq 0$.

Suponga que $|g(z^*)| = 2\varepsilon$. Entonces como g es continua existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z^*| < \delta$ entonces $|g(z) - g(z^*)| < \varepsilon$. Así en el disco $|z - z^*| < \delta$,

$$||g(z)| - 2\varepsilon| = ||g(z)| - |g(z^*)|| \leq |g(z) - g(z^*)| < \varepsilon,$$

y por tanto $|g(z)| > \varepsilon$ en este disco. Así $f(z) \neq 0$ en un disco con centro z^* lo cual contradice la hipótesis que z^* es el punto límite de ceros de f .

Por tanto f es idénticamente cero en R . □

Este teorema es usado para probar el siguiente resultado debido a Weierstrass.

Teorema 1.7. Una función analítica toma valores complejos arbitrariamente cercanos en cada vecindad de una singularidad esencial.

El próximo resultado es que las funciones analíticas no constantes son funciones abiertas, esto es, si $A \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y f es analítica en A entonces $f(A)$ es abierto. Señalamos primero que solo necesitamos probar este resultado localmente, esto es, cada $a \in A$ tiene una vecindad abierta $V_a \subseteq A$ tal que $f(V_a)$ es abierto; entonces podemos escribir que

$$A = \bigcup_{a \in A} V_a \text{ y}$$

$$f(A) = f\left(\bigcup_{a \in A} V_a\right) = \bigcup_{a \in A} f(V_a)$$

el cual es abierto.

La estrategia de la prueba es probar que, aparte de una constante aditiva, cada función analítica no constante puede escribirse localmente como una composición $p_m \circ \phi$ donde $p_m(z) = z^m$, y ϕ' no se anula. Probaremos que ϕ y p_m son funciones abiertas y el resultado se sigue de la observación que la composición de dos funciones abiertas es abierta.

El método de prueba también muestra que f es localmente m -uno a uno.

Teorema 1.8. (I) Sea $R \subseteq \mathbb{C}$ una región y sea f una función analítica no constante definida en R . Entonces $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ es una función abierta

(II) Si $z_0 \in R$ y si $f(z_0) = w_0$ con multiplicidad m entonces existe una vecindad N de z_0 tal que para cada $w \in f(N) \setminus \{w_0\}$, el conjunto $f^{-1}(w)$ contiene m puntos en N .

La prueba se divide en 3 Lemas.

Lema 1.9. Existe un disco $D \subseteq R$, con centro z_0 , tal que para todo $z \in D$, f puede ser escrita como

$$f(z) = w_0 + (\phi(z))^m,$$

donde ϕ es una función analítica cuya derivada no se anula en D .

Demostración. Por el Teorema 1.6 podemos encontrar un disco $D \subseteq R$ con centro en z_0 tal que $f(z) - w_0$ es distinto de cero para todo $z \in D \setminus \{z_0\}$. Así en D podemos escribir

$$\begin{aligned} f(z) - w_0 &= (z - z_0)^m (a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots) \\ &= a_0(z - z_0)^m g(z), \end{aligned}$$

donde $m > 0$, $a_0 \neq 0$, g es analítica en D , $g(z_0) = 1$, y $g(z) \neq 0$, para todo $z \in D$. Sea $F(z) = g'(z)/g(z)$ y para cada $z \in D$ definimos

$$h(z) = \int_{z_0}^z F(z) dz,$$

donde la integral es tomada sobre todo el camino de z_0 a z en D . (Por el Teorema de Cauchy esta integral es independiente del camino). Ahora h es analítica en D y $h'(z) = F(z) = g'(z)/g(z)$. Además

$$\frac{d}{dz}(g(z)e^{-h(z)}) = 0$$

y así $g(z) = ce^{h(z)}$, donde c es una constante. Como $g(z_0) = 1$ y $h(z_0) = 0$, $c = 1$ y así

$$g(z) = e^{h(z)}.$$

Elegimos el valor de $a_0^{1/m}$ y definimos

$$\phi(z) = a_0^{1/m}(z - z_0)e^{h(z)/m}.$$

Entonces

$$f(z) = w_0 + (\phi(z))^m.$$

□

Lema 1.10. Existe una vecindad V de z_0 tal que $\phi(V)$ es abierto y ϕ es uno a uno en V .

Demostración. Sabemos que $\phi(z) \neq 0$ para todo $z \in D \setminus \{z_0\}$. Sea D_1 un disco centrado en z_0 que está propiamente contenido en D . Entonces $\phi(z)$ no se anula en ∂D_1 , la frontera de D_1 , y como ∂D_1 es compacto el mínimo μ de $|\phi(z)|$ se alcanza en ∂D_1 y $\mu \neq 0$. Sea Δ un disco abierto centrado en $w_0 = \phi(z_0)$ de radio μ . Probaremos que si $w_1 \in \Delta$ entonces existe un único valor de $z \in D_1$ tal que $\phi(z) = w_1$. Sea $V := \phi^{-1}(\Delta) \cap D_1$ y entonces ϕ es uno a uno en V , $z_0 \in V$ y $\phi(V) = \Delta$ es abierto.

Para alcanzar este objetivo mostraremos que $\phi(z) - w_1$ tiene precisamente un cero en D_1 . Como $\phi(z) - w_0$ es analítica en D_1 , el Teorema 1.5 implica que el número de ceros de $\phi(z) - w_1$ en D_1 es $N(w_1)$, donde

$$N(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{(\phi(z) - w)'}{\phi(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{\phi'(z)}{\phi(z) - w} dz,$$

Note que si $w \in \Delta$ entonces $\phi(z) - w$ no puede anularse en ∂D_1 de lo contrario

$$\min_{x \in \partial D_1} |\phi(z)| \leq |w| < \mu,$$

lo cual contradice la definición de μ .

Como ϕ solo se anula en z_0 en D_1 y como $\phi'(z_0) \neq 0$, ϕ tiene un cero simple en z_0 y $N(0) = 1$. Probaremos ahora que $N(w)$ es una función continua de w , para $w \in \Delta$, y como $N(w)$ es un entero esto implica que $N(w) = 1$ para todo $w \in \Delta$. Ahora si $s, t \in \Delta$ entonces

$$\begin{aligned}
|N(s) - N(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \left(\frac{\phi'(z)}{\phi(z) - s} - \frac{\phi'(z)}{\phi(z) - t} \right) dz \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_1} \left| \frac{\phi'(z)|t - s|}{(\phi(z) - s)(\phi(z) - t)} \right| \\
&\leq \frac{2\pi r M |t - s|}{2\pi \delta^2}
\end{aligned}$$

donde r es el radio de D_1 , M es el máximo de $|\phi'(z)|$ en ∂D_1 y $\delta = \min\{|\phi(z) - s|, |\phi(z) - t| : z \in \partial D_1\}$. Como vimos antes $\phi(z) - w$ no se anula en ∂D_1 para $W \in \Delta$ y así por la compacidad de ∂D_1 , δ es distinto de cero. Por tanto $N(w)$ es una función continua de w . \square

Lema 1.11. Para cada entero positivo m , $p_m(z) = z^m$ es una función abierta.

Demostración. Sea A un conjunto abierto en \mathbb{C} . Solo necesitamos probar que cada z_0 existe una vecindad W tal que $p(W)$ es abierto. Si $z_0 \neq 0$ entonces $p'_m(z_0) \neq 0$ y la prueba se sigue directamente del Lema 1.10 poniendo $\phi = p_m$. Si $z_0 = 0$ entonces sea W el disco abierto, centro 0, radio 1 el cual esta contenido en A . Entonces $p_m(W)$ es una disco abierto, radio $r^m < r$, lo cual prueba el resultado. \square

Demostración. Teorema 1.8

- (I) se sigue del hecho de que p_m y ϕ son ambas funciones abiertas.
- (II) es claro que ϕ es localmente uno a uno y p_m es localmente m -uno a uno. Más precisamente, sea P un disco, con centro en w_0 , contenido en $f(V)$. Entonces $N = f^{-1}(P)$ tiene la propiedad requerida. \square

1.3. Homotopías

Si γ_0 y γ_1 son caminos de a a b en un espacio topológico X , entonces una *homotopía* de γ_0 a γ_1 en X es una función continua $\Gamma : I^2 \rightarrow X$ tal que $\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s)$, $\Gamma(s, 1) = \gamma_1(s)$, $\Gamma(0, t) = a$, $\Gamma(1, t) = b$, $\forall s, t \in I$. Esto es, para cada $t \in I$ tenemos un camino γ_t de a a b en X dado por $\gamma_t(s) = \Gamma(s, t)$; como t crece de 0 a 1, γ_t es continuamente deformada (dentro de X) de γ_0 a γ_1 , manteniendo los puntos inicial y final en a y b como se muestra en la Figura 1.1.

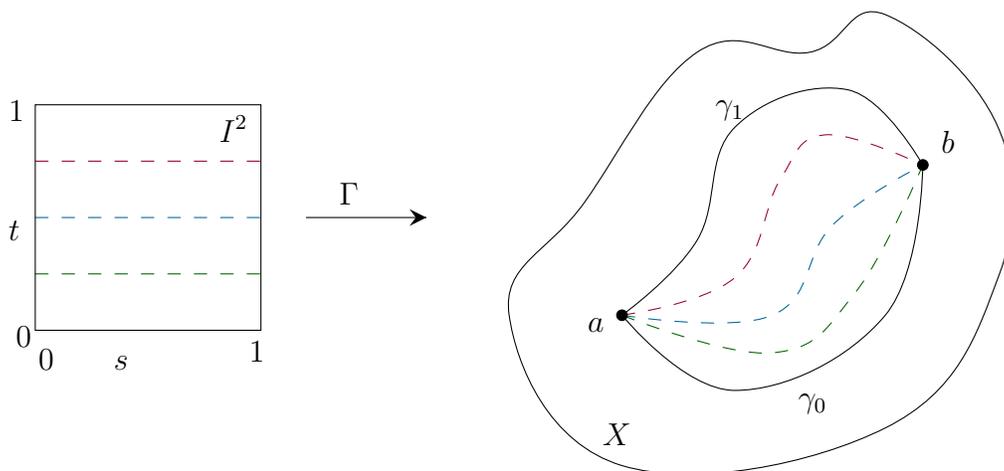


Figura 1.1.

Diremos que γ_0 y γ_1 son *homotópicos* en S , escribiendo $\gamma_0 \simeq \gamma_1$, si existe una homotopía de γ_0 a γ_1 en X ; \simeq es una relación de equivalencia, y las clases de equivalencia son llamadas *clases de homotopías*.

Por ejemplo, si γ_0 y γ_1 son los caminos de 1 a -1 en \mathbb{C} definidos por $\gamma_0(s) = e^{\pi is}$ y $\gamma_1(s) = e^{-\pi is}$ entonces $\Gamma(s, t) = e^{\pi is} - 2ti \sin(\pi s)$ da una homotopía de γ_0 a γ_1 en \mathbb{C} .

Como sea, es intuitivamente claro que γ_0 y γ_1 no son homotópicos en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; algún camino intermedio γ_t debe pasar por 0 o ∞ , imposible ya que $\Gamma(I^2) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Véase Figura 1.2). Como un segundo ejemplo, probaremos más adelante que cada camino cerrado δ de 1 a 1 en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es homotópico al camino $\gamma^n(s) = e^{2n\pi is}$ para algún único $n \in \mathbb{Z}$, llamado *winding number* de δ ya que representa el número de vueltas que da δ da alrededor de 0.

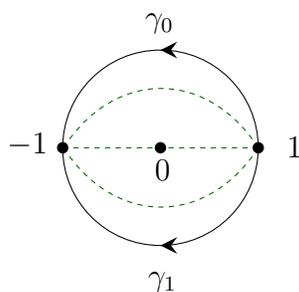


Figura 1.2.

Necesitamos una condición en X que garantice que cualesquiera dos caminos de a a b son homotópicos. Para cada a en X si $\gamma_{(a)}$ denota el camino constante $\gamma_{(a)}(s) = a, \forall s \in I$;

entonces un camino cerrado γ de a a a en X se dice *nulo-homotópico* si este es homotópico en X a $\gamma_{(a)}$, y X se dice simplemente conexo si cada camino es conexo y todos los caminos cerrados son nulo-homotópicos. Por ejemplo, \mathbb{C} es simplemente conexo ya que si γ es cualquier camino cerrado de a a a en \mathbb{C} entonces hay una homotopía $\Gamma : \gamma \simeq \gamma_{(a)}$ dado por $\Gamma(s, t) = \gamma(s) + t(a - \gamma(s))$; y por el otro lado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo ya que (como acabamos de ver) el círculo unidad $\gamma(s) = e^{2\pi is}$ no es nulo-homotópico en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Teorema 1.12. Un espacio topológico X es simplemente conexo si y sólo si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe una sola clase de homotopías de a a b .

Demostración. Suponga que para cada $a, b \in X$ existe una única clase homotopía de caminos de a a b en X . Entonces X es conexo por caminos, y tomando $a = b$ vemos que cualquier camino cerrado de a a a es homotópico a $\gamma_{(a)}$, esto es, X es simplemente conexo.

Para la otra implicación, suponga que X es simplemente conexo, así (por definición) X es conexo por caminos: Sea γ_0 y γ_1 dos caminos de a a b en X , y sea δ el camino cerrado de a a a dado por:

$$\delta(s) = \begin{cases} \gamma_0(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_1(2 - 2s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

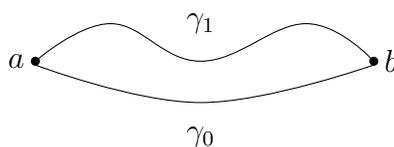


Figura 1.3.

Esto es, cuando s crece de 0 a $\frac{1}{2}$, $\delta(s)$ recorre a lo largo de γ_0 de a a b , mientras que cuando s crece de $\frac{1}{2}$ a 1, s viaja de regreso a lo largo de γ_1 , es decir de b a a .

Ya que X es simplemente conexo existe una homotopía Δ de δ a $\gamma_{(a)}$, y podemos usar Δ para construir una homotopía Γ de γ_0 a γ_1 . Después de definir Γ explícitamente, daremos una descripción informal de caminos intermedios $\gamma_t (t \in I)$, como se ilustra en la Figura 1.4

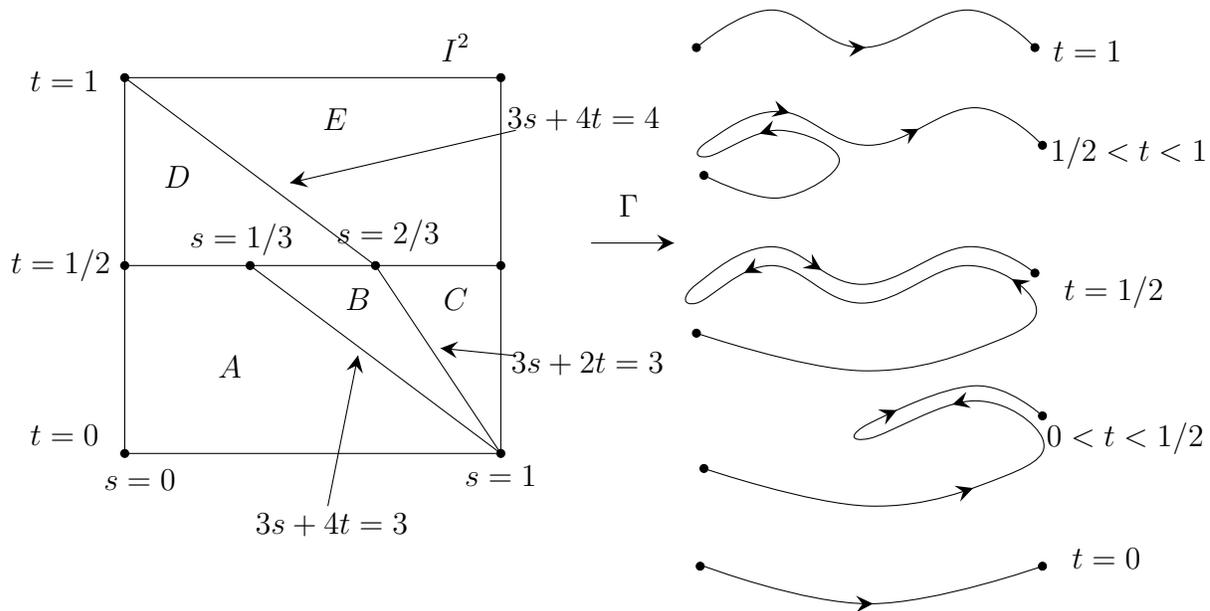


Figura 1.4.

Para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ formamos γ_t agregando al final de γ_0 un bucle que viaja hacia atrás a lo largo de γ_1 de b a $\gamma_1(1 - 2t)$ y viaja hacia adelante a lo largo de γ_1 de $\gamma_1(1 - 2t)$ a b . Así, γ_t es un camino en X de a a b , y como t aumenta de 0 a $\frac{1}{2}$, $1 - 2t$ decrece de 1 a 0 , por lo que el bucle se extiende gradualmente hacia afuera de b hasta que (cuando $t = \frac{1}{2}$) viaja dos veces a lo largo de toda la longitud de γ_1 (hacia atrás), y finalmente γ_1 (hacia adelante), o equivalentemente, γ_t sigue δ y luego γ_1 (ambos hacia adelante).

Para $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ usamos la homotopía $\Delta : \delta \simeq \gamma_{(a)}$ para tirar δ hacia a , dejando la sección final de γ_t a lo largo de γ_1 sin cambios, hasta que $t = 1$ tenemos $\gamma_t = \gamma_1$, como se quería.

Para ser más específicos, dividimos I^2 en 5 subconjuntos A, B, C, D, E como se muestra continuación y definimos $\Gamma(s, t)$ en estos subconjuntos por:

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} \gamma_0 \left(\frac{3s}{3-4t} \right) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq s \leq 1 - \frac{4t}{3} & (A); \\ \gamma_1(4-3s-4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{4t}{3} \leq s \leq 1 - \frac{2t}{3} & (B); \\ \gamma_1(3s-2) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{2t}{3} \leq s \leq 1 & (C); \\ \Delta \left(\frac{3s}{4-4t}, 2t-1 \right) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s \leq \frac{4}{3}(1-t) & (D); \\ \gamma_1 \left(\frac{4-3s-4t}{1-4t} \right) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \quad \frac{4}{3}(1-t) \leq s \leq 1 & (E). \end{cases}$$

Es sencillo verificar que $\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s)$, $\Gamma(s, 1) = \gamma_1(s)$, $\Gamma(0, t) = a$, y $\Gamma(1, t) = b \quad \forall s, t \in I$. La continuidad de Γ se sigue de la continuidad de γ_0, γ_1 y Δ y el hecho que varias definiciones de $\Gamma(s, t)$ coinciden cuando (s, t) está en la intersección de dos o más subconjuntos A, \dots, E . El único caso que necesita cualquier comentario es cuando $s = 0$ y $t = 1$: como $s \rightarrow 0$ y $t \rightarrow 1$ con $0 \leq s \leq \frac{4}{3}(1-t)$ (así que $(s, t) \in D$) tenemos que $\Gamma(s, t) = \Delta(\sigma, \tau)$ con $\tau = 2t - 1 \rightarrow 1$ pero con $\sigma = 3s/4 - 4t$ que no tiene limite; como sea, $\lim_{t \rightarrow 1} \Delta(\sigma, \tau) = a \quad \forall \sigma \in I$ (Ya que Δ es una homotopía de δ a $\gamma_{(a)}$), así $\Gamma(s, t) \rightarrow a$ como se quería. Esto es Γ es una homotopía de γ_0 a γ_1 en X , así X tiene una única clase de homotopías de caminos de a a b . □

La manera más simple de ver que la definición de Γ dada arriba concuerda con la descripción informal que le precede es considerar los caminos intermedios $\gamma_t(s) = \Gamma(s, t)$ para varios valor de $t \in I$, en cada caso consideramos como los punto $\gamma_t(s)$ se mueven en X cuando s incrementa de 0 a 1. Cinco caminos típicos γ_t están ilustrado arriba, correspondientes a los casos $t = 0, 0 > t > \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} > t > 1$, y $t = 1$.

1.4. Modelo planar de superficies

Como nuestro objetivo de estudio serán superficies, una forma de “visualizar” sus propiedades es recurriendo al modelo planar (Ver [4]).

Una superficie puede ser representada como un espacio cociente de un polígono, con relaciones en sus lados, veremos que esto equivale a “pegar” los lados del polígono a pares, estas relaciones o *identificaciones* en los lados son direcciones y etiquetas.

Por ejemplo, el toro puede representarse como un cuadrado $([0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ por ejemplo) con identificaciones en sus lados como lo muestra la Figura 1.5.

El diagrama de la figura representa una relación de equivalencia en el cuadrado. Cada punto del lado izquierdo se identifica con un punto del lado derecho y cada punto de lado inferior se identifica con un único punto del lado superior.

Observe que los cuatro puntos de esquina son entonces una sola clase de equivalencia.

Para ver que el espacio de cociente es una superficie homeomorfa a un toro, se pegan los bordes etiquetados por a para crear un cilindro (Figura 1.5). A continuación, pegamos los bordes etiquetados por b para obtener un toro, mostrado en la Figura 1.6. El cuadrado, con su relación de equivalencia (instrucción de pegado), se llama *modelo planar* de el toro. Muy a menudo, especialmente cuando añadimos varias estructuras a las superficies, es mucho más fácil trabajar en el modelo planar en lugar del modelo espacial que hemos dibujado.

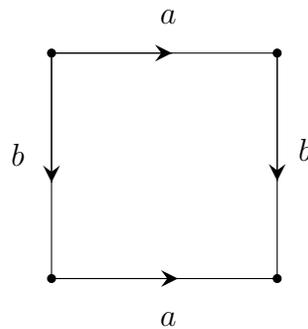


Figura 1.5.

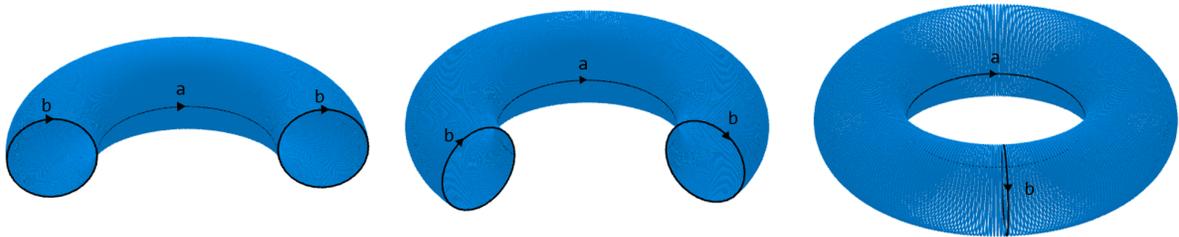


Figura 1.6.

Un modelo plano para la esfera es un disco con identificaciones como se muestra en la Figura 1.7. Basta con imaginar el cierre el polígono de dos lados a lo largo de los bordes etiquetados por a en la dirección indicada por las flechas, como se muestra en la Figura 1.8.

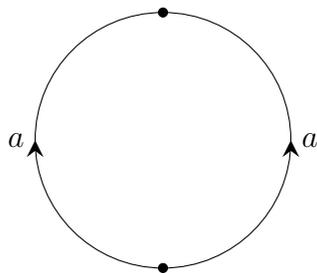


Figura 1.7.

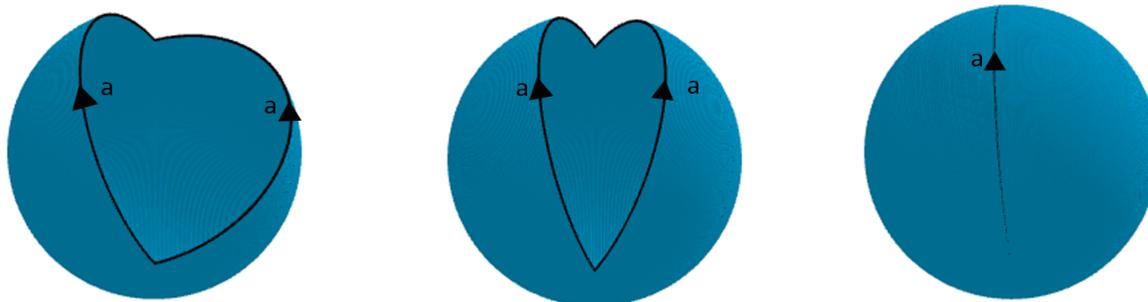


Figura 1.8.

1.5. Series de Puiseux

El campo de la series de Puiseux provee un ejemplo importante de un campo no arquimiliano (ver [1]).

La colección de series de Puiseux en ε con coeficientes en R es un campo cerrado conteniendo el campo $R(\varepsilon)$ de las funciones racionales en la variable ε . Para incluir en nuestro campo las raíces de las ecuaciones tales como $X^2 - \varepsilon = 0$, introducimos los exponentes racionales como $\varepsilon^{1/2}$.

Esto parcialmente motiva la siguiente definición de *Serie de Puiseux*

Definición 1.13. Sea K un campo y ε una variable.

1. El Anillo de series de potencias en ε con coeficientes en K , denotado por $K[[\varepsilon]]$ consiste en todas las series de la forma $\bar{a} = \sum_{i \geq 0} a_i \varepsilon^i$ con $i \in \mathbb{N}$, $a_i \in K$.
2. El campo de los cocientes, denotado por $K((\varepsilon))$, es el *campo de las series de Laurent en ε con coeficientes en K* y consiste en todas la series de la forma $\bar{a} = \sum_{i \geq k} a_i \varepsilon^i$ con $k \in \mathbb{Z}$ fijo, $i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in K$.

3. Una *Serie de Puiseux en ε con coeficientes en K* es una serie de la forma $\bar{a} = \sum_{i \geq k} a_i \varepsilon^{i/q}$ con $k \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in K$ y q es un entero positivo. El *campo de las series de Puiseux en ε con coeficientes en K* es denotado por $K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$.

Estas series son formales en el sentido que no existe seguridad de convergencia; ε es simplemente una indeterminada. Asumimos que los diferentes símbolos ε^r , $r \in \mathbb{Q}$, satisfacen

$$\begin{aligned}\varepsilon^{r_1} \varepsilon^{r_2} &= \varepsilon^{r_1+r_2}, \\ (\varepsilon^{r_1})^{r_2} &= \varepsilon^{r_1 r_2}, \\ \varepsilon^0 &= 1\end{aligned}$$

Aquí dos series de Puiseux, $\bar{a} = \sum_{i \geq k_1} a_i \varepsilon^{i/q_1}$, $\bar{b} = \sum_{j \geq k_2} b_j \varepsilon^{j/q_2}$ pueden escribirse como series

formales de Laurent en $\varepsilon^{1/q}$, donde q es mínimo común múltiplo de q_1 y q_2 . Así, es claro como sumar o multiplicar dos series de Puiseux. Además, cualquier número finito de series de Puiseux puede escribirse como serie formal de Laurent en $\varepsilon^{1/q}$ con q el mínimo común múltiplo.

Si $\bar{a} = a_1 \varepsilon^{r_1} + a_2 \varepsilon^{r_2} + \dots \in K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$, (con $a_1 \neq 0$ y $r_1 < r_2 < \dots$), entonces el *orden* de \bar{a} , denotado por $o(\bar{a})$, es r_1 y el *coeficiente inicial* de \bar{a} , denotado por $\text{In}(\bar{a})$ es a_1 .

Observación 1.14. $K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ es un campo

Cuando K es un campo ordenado, podemos hacer que $K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ sea un campo ordenado definiendo una serie de Puiseux \bar{a} para ser positiva si $\text{In}(\bar{a})$ es positivo. Es claro que el campo de las funciones racionales $K(\varepsilon)$ equipado con el orden 0_+ es un subcampo del campo ordenado de las series de Puiseux $K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$, usando las expansiones de Laurent alrededor de 0.

En el campo ordenado $K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$, ε es infinitesimal sobre K , (ya que es positivo y más pequeño que cualquier r positivo en K , ya que $r - \varepsilon > 0$). Así, el campo $K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ es no-arquimiliano. Esta es la razón porque hemos escogido el nombre de indeterminada ε en lugar de algo más neutral como X .

El resto de esta sección estará dedicado a probar el siguiente Teorema.

Teorema 1.15. Sea R un campo real cerrado. Entonces, el campo $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ es real y cerrado.

El primer paso de la prueba del Teorema 1.15 es mostrar que cualquier elemento positivo en $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ es un cuadrado en $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$.

Lema 1.16. Un elemento positivo de $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ es un cuadrado de un elemento en $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$.

Demostración. Suponga que $\bar{a} = \sum_{i \geq k} a_i \varepsilon^{i/q} \in R\langle\langle \varepsilon \rangle\rangle$ con $a_k > 0$. Definiendo $\bar{b} = \sum_{i \geq k+1} (a_i/a_k) \varepsilon^{(i-k)/q}$, tenemos que $\bar{a} = a_k \varepsilon^{k/q} (1 + \bar{b})$ y $o(\bar{b}) > 0$.

La raíz cuadrada de $1 + \bar{b}$ es obtenida tomando la expansión de series de Taylor de $(1 + \bar{b})^{1/2}$ la cual es

$$\bar{c} = 1 + \frac{1}{2}\bar{b} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right) \bar{b}^n + \dots$$

Sustituyendo puede comprobarse que $\bar{c}^2 = 1 + \bar{b}$. Ya que $a_k > 0$ y R es real cerrado, $\sqrt{a_k} \in R$. Así, $\sqrt{a_k} \varepsilon^{k/2q} \bar{c}$ es la raíz cuadrada de \bar{a} . \square

Para completar la prueba del Teorema 1.15, queda probar que un polinomio de grado impar en $R\langle\langle \varepsilon \rangle\rangle[X]$ tiene una raíz en $R\langle\langle \varepsilon \rangle\rangle$. Dado

$$P(X) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 X + \dots + \bar{a}_p X^p \in R\langle\langle \varepsilon \rangle\rangle[X]$$

con p impar, podemos construir un $\bar{x} \in R\langle\langle \varepsilon \rangle\rangle$ tal que $P(\bar{x}) = 0$. Podemos asumir que $\bar{a}_0 \neq 0$, ya que en otro caso 0 sería una raíz de P . Más aún, podemos asumir sin perder generalidad que

$$o(\bar{a}_i) = \frac{m_i}{m}$$

con el mismo m para cada $0 \leq i \leq p$. Nuestra estrategia es considerar un valor desconocido

$$\bar{x} = x_1 \varepsilon^{\xi_1} + x_2 \varepsilon^{\xi_1 + \xi_2} + \dots + x_i \varepsilon^{\xi_1 + \dots + \xi_i} + \dots$$

con $\xi_1 > 0, \dots, \xi_j > 0$ y determinar, uno después de otro, los coeficientes desconocidos x_i y los exponentes ξ_i así que $\bar{x} \in R\langle\langle \varepsilon \rangle\rangle$ y satisfaciendo que $P(\bar{x}) = 0$

Las elecciones naturales para ξ_1 y x_1 se siguen de la geometría de los exponentes de P , que estudiaremos ahora. El polinomio $P(X)$ puede considerarse como una suma formal de expresiones $X^i \varepsilon^r$ ($i \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Q}$) con coeficientes en R . Los puntos (i, r) para el cual $X^i \varepsilon^r$ aparece en $P(X)$ con coeficientes distintos de cero constituyen el *Diagrama de Newton* de P . Notar que los puntos de diagrama de Newton están ordenados en columnas y que los puntos, $M_i = (i, o(a_i))$, $i = 0, \dots, p$, para el cual $\bar{a}_i \neq 0$ son los puntos más cerca del eje X en cada columna.

Definición 1.17. El *polígono de Newton* de P es la secuencia de puntos

$$M_0 = M_{i_0}, \dots, M_i = M_p$$

Satisfaciendo:

- (I) Todos los puntos del diagrama de Newton de P están sobre o arriba de cada una de las líneas que unen a $M_{i_{j-1}}$ con M_{i_j} para $j = 1, \dots, l$

- (II) Los tres puntos ordenados $M_{i_{j-1}}, M_{i_j}, M_{i_{j+1}}$ están orientados en sentido contrario a las agujas del reloj, para $j = 1, \dots, l - 1$. Esto dice que los bordes que unen puntos adyacentes en la secuencia $M_{i_{j-1}}, M_{i_j}, M_{i_{j+1}}$ constituyen un *cadena convexa*.

En tal caso la *pendiente* de $[M_{i_{j-1}}, M_{i_j}]$ es $\frac{o(\bar{a}_{i_j}) - o(\bar{a}_{i_{j-1}})}{i_j - i_{j-1}}$ y su *proyección horizontal* es el intervalo $[i_{j-1}, i_j]$.

Note que el polígono de Newton de P es el menor polígono convexo que contiene al diagrama de Newton de P .

Al segmento $E = [M_{i_{j-1}}, M_{i_j}]$ con proyección horizontal $[i_{j-1}, i_j]$, le asociamos su *característica polinomial*

$$Q(P, E, X) = \sum a_h X^h \in R[X],$$

donde la suma es sobre todo h para el cual

$$M_h = (h, o(\bar{a}_h)) = \left(h, \frac{m_h}{m} \right) \in E \quad \text{y} \quad a_h = \text{In}(\bar{a}_h)$$

Note que si $-\xi$ es la pendiente de E , entonces $o(\bar{a}_h) + h\xi$ tiene un valor constante β para todo M_h en E .

Ejemplo 1.18. Sea

$$P(X) = \varepsilon - 2\varepsilon^2 X^2 - X^3 + \varepsilon X^4 + \varepsilon X^5.$$

El diagrama de Newton para P es

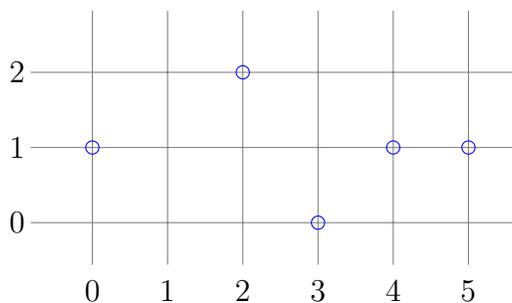


Figura 1.9. Diagrama de Newton

El polígono de Newton de P consiste de dos segmentos $E = [M_0, M_3]$ y $F = [M_3, M_5]$. El segmento E tiene una proyección horizontal de longitud 3 y el segmento F una proyección horizontal de longitud 2.

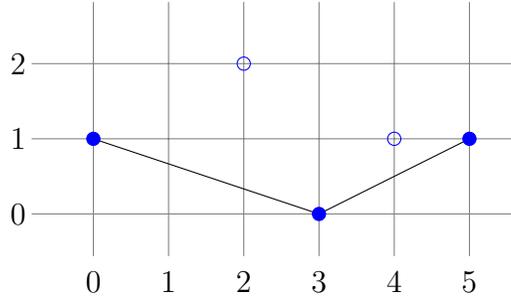


Figura 1.10. Polígono de Newton

tenemos que

$$\begin{aligned} Q(P, E, X) &= 1 - X^3 \\ Q(P, F, X) &= X^3(X^2 - 1). \end{aligned}$$

Las dos pendientes son $-1/3$ y $1/2$ y los valores correspondientes de ξ son $1/3$ y $-1/2$. El valor común β de $o(\bar{a}_h) + h\xi$ en los dos segmentos son 1 y $-3/2$.

Si x es una raíz distinta de cero de multiplicidad r del polinomio característico de un segmento E del polígono de Newton con pendiente $-\xi$, podemos construir un raíz de P la cual es una serie de Puiseux comenzando con $x\varepsilon^\xi$. En otras palabras encontramos

$$\bar{x} = x\varepsilon^\xi + x_2\varepsilon^{\xi+\xi_2} + \dots + x_i\varepsilon^{\xi+\xi_2+\dots+\xi_i} + \dots$$

con $\xi_2 > 0, \dots, \xi_j > 0$ tal que $P(\bar{x}) = 0$.

El siguiente lema es el paso clave en esta dirección. El resultado es el siguiente: si en P reemplazamos X por $\varepsilon^\xi(x + X)$ y dividimos el resultado por $\varepsilon^{-\beta}$, donde β es el valor común de $o(\bar{a}_h) + h\xi$ en E , obtenemos un nuevo polígono de Newton aparte conteniendo solamente pendientes negativas, cuya proyección horizontal es $[0, r]$. Un segmento de esta parte del polígono de Newton puede ser usada para encontrar el segundo término de la serie.

Lema 1.19. Sea

- (I) ξ el opuesto de la pendiente de un segmento E del polígono de Newton de P ,
- (II) β el valor común de $o(\bar{x}_h) + h\xi$ para todo q_h en E
- (III) $x \in R$ es una raíz distinta de cero el polinomio característica $Q(P, E, X)$ de multiplicidad r .

Entonces:

- (a) El polinomio

$$R(P, E, x, Y) = \varepsilon^{-\beta}P(\varepsilon^\xi(x + Y)) = \bar{b}_0 + \bar{b}_1Y + \dots + \bar{b}_pY^p$$

satisface

$$\begin{aligned} o(\bar{b}_i) &\geq 0, & i = 0, \dots, p, \\ o(\bar{b}_i) &> 0, & i = 0, \dots, r-1, \\ o(\bar{b}_r) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Para cada $\bar{x} \in R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ tal que $\bar{x} = \varepsilon^\xi(x + \bar{y})$ con $o(\bar{y}) > 0$, $o(P(\bar{x})) > \beta$.

Ilustramos la construcción en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.20. Continuando con el Ejemplo 1.18, elegimos el segmento E , con $\xi = 1/3$, elegir la raíz $x = 1$ de $X^3 - 1$, con multiplicidad 1, y reemplazamos X por $\varepsilon^{1/3}((1 + X))$ y obtenemos

$$\begin{aligned} P_1(X) &= \varepsilon^{-1}P(\varepsilon^{1/3}((1 + X))) \\ &= \varepsilon^{5/3}X^5 + (\varepsilon^{4/3} + 5\varepsilon^{5/3})X^4 \\ &\quad + (-1 + 4\varepsilon^{4/3} + 10\varepsilon^{5/3})X^3 \\ &\quad + (-3 + 8\varepsilon^{5/3} + 6\varepsilon^{4/3})X^2 \\ &\quad + (\varepsilon^{5/3} - 3 + 4\varepsilon^{4/3})X - \varepsilon^{5/3} + \varepsilon^{4/3} \end{aligned}$$

El polígono de Newton de P_1 es

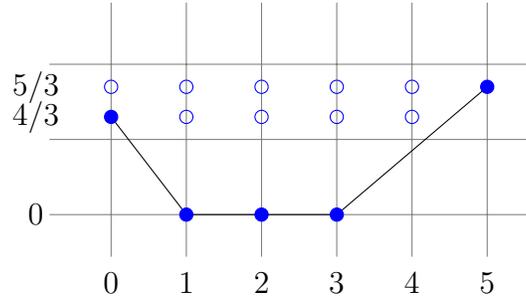


Figura 1.11. Polígono de Newton de P_1

Elegimos el negativo de la pendiente correspondiente de polígono característico $-3X + 1$ y hacemos el cambio de variable $X = \varepsilon^{4/3}(1/3 + Y)$.

Obteniendo de esta manera los dos primeros términos $\varepsilon^{1/3} + (1/3)\varepsilon^{1/3+4/3} + \dots$ de la serie de Puiseux \bar{x} satisfaciendo $P(\bar{x}) = 0$.

La prueba del Lema 1.19 usa el siguiente lema el cual describe una propiedad de los polinomios característicos asociados a los segmentos del polígono de Newton.

Lema 1.21. La pendiente $-\xi$ de E tiene la forma $\frac{-c}{mq}$ con $q > 0$ y $\text{mcd}(c, q) = 1$. Más aún, $Q(P, E, X) = X^j\phi(X^q)$, donde $\phi \in R[X]$, $\phi(0) \neq 0$, y $\deg \phi = (k - j)/q$.

Demostración. La pendiente de $E = [M_j, M_k]$ es

$$\frac{o(\bar{a}_k - o(\bar{a}_j))}{k - j} = \frac{m_k - m_j}{m(k - j)} = -\frac{c}{mq}$$

donde $q > 0$ y $\text{mcd}(c, q) = 1$. Si $(h, o(\bar{a}_h)) = \left(h, \frac{m_h}{m}\right)$ entonces

$$\frac{c}{mq} = \frac{o(\bar{a}_j - o(\bar{a}_h))}{h - j} = \frac{m_j - m_h}{m(h - j)}.$$

Por lo tanto, q divide a $h - j$, y existe un s no negativo tal que $h = j + sa$. La forma de $Q(P, E, X)$ queda demostrada. \square

Ahora procedemos con la demostración del Lema 1.19.

Demostración. Para (a) ya que x es raíz de $\phi(X^q)$ de multiplicidad r , tenemos

$$\phi(X^q) = (X - x)^r \psi(X), \quad \psi(x) \neq 0$$

Así,

$$\begin{aligned} R(P, E, x, Y) &= \varepsilon^{-\beta} P(\varepsilon^\xi(x + Y)) \\ &= \varepsilon^{-\beta} (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \varepsilon^\xi(x + Y) + \cdots + \bar{a}_p \varepsilon^{p\xi}(x + Y)^p) \\ &= A(Y) + B(Y), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A(Y) &= \varepsilon^{-\beta} \sum_{(h, q_h) \in E} a_h \varepsilon^{o(a_h) + h\xi} (x + Y)^h \\ B(Y) &= \varepsilon^{-\beta} \left(\sum_{(h, q_h) \in E} (\bar{a}_h - a_h \varepsilon^{o(a_h)}) \varepsilon^{h\xi} (x + Y)^h + \sum_{(l, q_l) \notin E} \bar{a}_l \varepsilon^{l\xi} (x + Y)^l \right) \end{aligned}$$

Ya que $o(\bar{a}_h) + h\xi = \beta$,

$$\begin{aligned} A(Y) &= Q(P, E, x + Y) \\ &= (x + Y)^j \phi((x + Y)^q) \\ &= Y^r (x + Y)^j \psi(x + Y) \\ &= c_r Y^r + c_{r+1} Y^{r+1} + \cdots + c_p Y^p, \end{aligned}$$

con $c_r = x^j \psi(x) \neq 0$ y $c_i \in R$

Ya que $o((\bar{a}_h - a_h \varepsilon^{o(a_h)}) \varepsilon^{h\xi}) > \beta$ y $o(\bar{a}_l \varepsilon^{l\xi}) > \beta$,

$$R(P, E, x, Y) = B(Y) + c_r Y^r + c_{r+1} Y^{r+1} + \cdots + c_p Y^p,$$

donde cada coeficiente de $B(Y) \in R\langle\langle \varepsilon \rangle\rangle[Y]$ tiene orden positivo. La conclusión se sigue.

Para (b), ya que $o(\bar{y}) > 0$, $o(R(P, E, x, \bar{y})) > 0$ es una consecuencia de (a).

La conclusión sigue señalando que $P(x) = \varepsilon^\beta R(P, E, x, y)$. \square

Ahora si es posible proceder con la demostración del Teorema 1.15.

Demostración. Considere P con grado impar. Así, podemos elegir un segmento E_1 del polígono de Newton de P el cual tiene un proyección horizontal de longitud impar. Sea $-\xi_1$ la pendiente de E_1 . Por Lema 1.21 tenemos que el polinomio característico $Q(P, E_1, X)$ tiene una raíz distinta de cero x_1 en R de multiplicidad impar r_1 , ya que R es real cerrado. Definimos $P_1(X) = R(P, E_1, x_1, X)$ usando este segmento y la raíz x_1 .

Note que $(r_1, 0)$ es el vértice del polígono de Newton de $R(P, E_1, x_1, X)$, y que todas las pendientes de los segmentos $[M_j, M_k]$ del polígono de $R(P, E_1, x_1, X)$ para $k \leq r_1$ son negativas: esto es una consecuencia inmediata del Lema 1.19.

Elegimos recursivamente un segmento E_{i+1} del polígono de Newton de P_i con pendiente negativa $-\xi_{i+1}$, y proyección horizontal de longitud impar, así que el correspondiente polinomio característico $Q(P_i, E_{i+1}, X)$ tiene una raíz distinta de cero x_{i+1} en R de multiplicidad impar r_{i+1} , y tomemos $P_{i+1}(X) = R(P_i, E_{i+1}, x_{i+1}, X)$. La única barrera para continuar este proceso es si no podemos elegir un segmento con pendiente negativa sobre el intervalo $[0, r_i]$ y este es el caso solamente si 0 es un raíz de $P_i(X)$. Pero en este caso excepcional $x_1\varepsilon^{\xi_1} + \dots + x_i\varepsilon^{\xi_1 + \dots + \xi_i}$ es claramente una raíz de P .

Supongamos que hemos construido x_i, ξ_i para $i \in \mathbb{N}$ y sea

$$\bar{x} = x_1\varepsilon^{\xi_1} + x_2\varepsilon^{\xi_1 + \xi_2}$$

Entonces de la definición de $P_i(X)$, tenemos por inducción que $o(P(X)) > \beta_1 + \dots + \beta_j$ para todo j . Para completar la prueba, necesitamos saber que $\bar{x} \in R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ y que las sumas $\beta_1 + \dots + \beta_j$ no son acotadas. Ambas se siguen si sabemos que q en el Lema 1.21 es eventualmente 1. Note que las multiplicidades de las raíces elegidas x_i son no-decrecientes y así son eventualmente constantes, en ese punto tienen el valor r . Esto significa que de este punto en adelante, el polígono de Newton tiene un solo segmento con pendiente negativa, y proyección horizontal de longitud r . Se sigue entonces (ya que $Q_j(X)$ tiene a lo sumo grado r) que $Q_j(X) = c(X - x_j)^r$ con $x_j \neq 0$, de donde se sigue que el correspondiente q es igual a 1, ya que el coeficiente de grado 1 de ϕ_j es $-rcx_j^{r-1}$, el cual no es cero. □

Construcción de series de Puiseux

Para explicar cómo se construyen los desarrollos de las raíces para un polinomio $p \in \mathbb{C}[w][z]$. Dado un polinomio $p(w, z)$, se puede resolver z en términos de w por medio de series de Puiseux (exponentes fraccionarios)

$$z = c_1w^{\gamma_1} + c_2w^{\gamma_1 + \gamma_2} + c_3w^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} + \dots$$

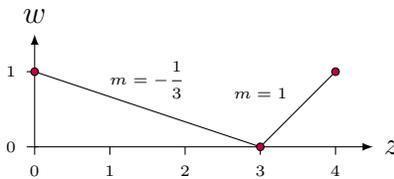
aplicando el siguiente algoritmo:

1. Dado un polinomio $p(w, z) = 0$ se dibuja el polígono de Newton de f . Se dibuja graficando en \mathbb{R}^2 los puntos (b, a) que se identifican con los términos $kw^a z^b$ del soporte de f . El polígono de Newton es el menor polígono convexo que contiene todos los puntos graficados.
2. Tomamos un lado del polígono de Newton perteneciente al conjunto de segmentos donde cada punto graficado está en, sobre o a la derecha de los segmentos.
3. El primer exponente γ_1 será el opuesto de la pendiente de ese segmento.
4. Encontrar $p(w, w^{\gamma_1}(c_1 + z_1))$.
5. Tomar los términos de menor grado en w . Como $p(w, z) = 0$, ellos deben cancelarse y entonces se resuelve para c_1 .
6. Con los valores γ_1 , c_1 y $\beta =$ “el w -intercepto del segmento escogido del polígono de Newton”, se define $p_1(w, z_1)$.
7. $p_1(w, z_1) := w^{-\beta}p(w, w^{\gamma_1}(c_1 + z_1))$
8. Se repite el proceso para $p_1(w, z_1)$ para encontrar γ_2 y c_2 .
9. Continuando este proceso para que uno de los dos casos siguientes suceda
 - $p_n(w, z_n)$ tiene un factor de z_n .
 - El polígono de Newton de $p_n(w, z_n)$ consiste de un solo segmento con solo dos vértices, uno en cada eje.

Ejemplo 1.22. Calcular el desarrollo en series de Puiseux para el siguiente polinomio

$$p(w, z) = wz^4 - z^3 + 27w,$$

el polígono de Newton es



De la figura anterior, para el segmento de pendiente $m = 1$ se tiene que $\gamma_1 = -(1) = -1$ y $\beta = -3$:

$$\begin{aligned} p_1(w, z_1) &= w^3 p(w, w^{-1}(c_1 + z_1)) \\ &= (4c_1 - 1)z_1^3 + (6c_1^2 - 3c_1)z_1^2 + (4c_1^3 - 3c_1^2)z_1 + c_1^4 - c_1^3 + 27w^4 + z_1^4 \end{aligned}$$

Al resolver $p_1(0, 0) = c_1^4 - c_1^3 = c_1^3(c_1 - 1) = 0$, de donde $c_1 = 0, 1$. La solución $c_1 = 0$ se descarta por ser trivial.

$$z = w^{-1} + c_2 w^{-1+\gamma_2} + c_3 w^{-1+\gamma_2+\gamma_3} + \dots = w^{-1}(1 + z_2) \quad (\text{I})$$

Para el otro segmento de pendiente $m = -\frac{1}{3}$, se tiene que $\gamma_1 = -(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ y $\beta = 1$:

$$\begin{aligned} p_1(w, z_1) &= w^{-1} p(w, w^{\frac{1}{3}}(c_1 + z_1)) \\ &= w^{4/3} (4c_1^3 z_1 + 6c_1^2 z_1^2 + 4c_1 z_1^3 + c_1^4 + z_1^4) - 3c_1 z_1^2 - 3c_1^2 z_1 - c_1^3 - z_1^3 + 27 \end{aligned}$$

Al resolver $p_1(0, 0) = -c_1^3 + 27 = 0$, de donde $c_1 = 3, -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$. Así se comienza a construir el desarrollo de las soluciones

$$z = 3w^{\frac{1}{3}} + c_2 w^{\frac{1}{3}+\gamma_2} + c_3 w^{\frac{1}{3}+\gamma_2+\gamma_3} + \dots = w^{\frac{1}{3}}(3 + z_2) \quad (\text{II})$$

$$z = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)w^{\frac{1}{3}} + c_2 w^{\frac{1}{3}+\gamma_2} + c_3 w^{\frac{1}{3}+\gamma_2+\gamma_3} + \dots = w^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i + z_2\right) \quad (\text{III})$$

$$z = \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)w^{\frac{1}{3}} + c_2 w^{\frac{1}{3}+\gamma_2} + c_3 w^{\frac{1}{3}+\gamma_2+\gamma_3} + \dots = w^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i + z_2\right) \quad (\text{IV})$$

■ Caso I: $c_1 = 1$

$$p_1(w, z_1) = 27w^4 + z_1^4 + 3z_1^3 + 3z_1^2 + z_1.$$

■ Caso II: $c_1 = 3$

$$p_1(w, z_1) = w^{4/3} z_1^4 + 12w^{4/3} z_1^3 + 54w^{4/3} z_1^2 + 108w^{4/3} z_1 + 81w^{4/3} - z_1^3 - 9z_1^2 - 27z_1.$$

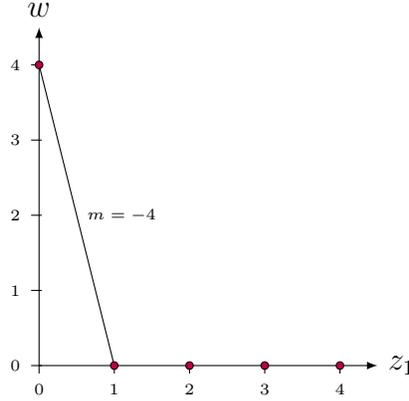
■ Caso III: $c_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{aligned} p_1(w, z_1) &= w^{4/3} z_1^4 + 6\sqrt{3}i w^{4/3} z_1^3 - 6w^{4/3} z_1^3 - 27i\sqrt{3} w^{4/3} z_1^2 - 27w^{4/3} z_1^2 + 108w^{4/3} z_1 + \\ &\frac{81}{2}\sqrt{3}i w^{4/3} - \frac{81w^{4/3}}{2} - z_1^3 - \frac{9}{2}i\sqrt{3} z_1^2 + \frac{9z_1^2}{2} + \frac{27}{2}\sqrt{3}i z_1 + \frac{27z_1}{2}. \end{aligned}$$

■ Caso IV: $c_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

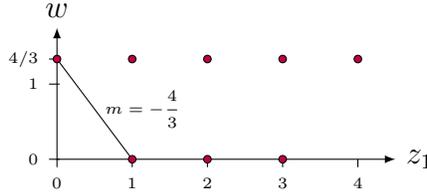
$$\begin{aligned} p_1(w, z_1) &= w^{4/3} z_1^4 - 6i\sqrt{3} w^{4/3} z_1^3 - 6w^{4/3} z_1^3 + 27\sqrt{3}i w^{4/3} z_1^2 - 27w^{4/3} z_1^2 + 108w^{4/3} z_1 - \\ &\frac{81}{2}i\sqrt{3} w^{4/3} - \frac{81w^{4/3}}{2} - z_1^3 + \frac{9}{2}\sqrt{3}i z_1^2 + \frac{9z_1^2}{2} - \frac{27}{2}i\sqrt{3} z_1 + \frac{27z_1}{2}. \end{aligned}$$

El polígono de Newton para el polinomio del caso I es:



de donde $\gamma_2 = 4$ y $\beta = 4$. Ahora se debe determinar c_2 de manera que los términos de menor grado en $p_2(w, z_2) = w^{-4}p_1(w, w^4(c_2 + z_2))$.

El polígono de Newton para los polinomios de los tres últimos casos es:



de donde $\gamma_2 = \frac{4}{3}$ y $\beta = \frac{4}{3}$. Ahora para cada uno de estos casos se debe determinar c_2 de manera que los términos de menor grado en $p_2(w, z_2) = w^{-\frac{4}{3}}p_1(w, w^{\frac{4}{3}}(c_2 + z_2))$ se cancelen:

- Caso I: $c_1 = 1$

$$p_2(w, z_2) = w^{12}(4c_2^3z_2 + 6c_2^2z_2^2 + 4c_2z_2^3 + c_2^4 + z_2^4) + w^8(9c_2^2z_2 + 9c_2z_2^2 + 3c_2^3 + 3z_2^3) + w^4(6c_2z_2 + 3c_2^2 + 3z_2^2) + c_2 + z_2 + 27$$

$$c_2 + 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -27$$

- Caso II: $c_1 = 3$

$$p_2(w, z_2) = w^{4/3}((108 - 18c_2)z_2 - 9c_2^2 + 108c_2 - 9z_2^2) + w^{8/3}((54 - 3c_2)z_2^2 + (108c_2 - 3c_2^2)z_2 - c_2^3 + 54c_2^2 - z_2^3) + w^{16/3}(4c_2^3z_2 + 6c_2^2z_2^2 + 4c_2z_2^3 + c_2^4 + z_2^4) + w^4(36c_2^2z_2 + 36c_2z_2^2 + 12c_2^3 + 12z_2^3) - 27c_2 - 27z_2 + 81$$

$$-27c_2 + 81 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 3$$

- Caso III: $c_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$$p_2(w, z_2) = w^{4/3}((-9i\sqrt{3}c_2 + 9c_2 + 108)z_2 - \frac{1}{2}9i\sqrt{3}c_2^2 + \frac{9c_2^2}{2} + 108c_2 + (\frac{9}{2} - \frac{9i\sqrt{3}}{2})z_2^2) + w^{8/3}((-3c_2 - 27 - 27i\sqrt{3})z_2^2 + (-3c_2^2 - 54i\sqrt{3}c_2 - 54c_2)z_2 - c_2^3 - 27i\sqrt{3}c_2^2 - 27c_2^2 - z_2^3) + w^{16/3}(4c_2^3z_2 + 6c_2^2z_2^2 + 4c_2z_2^3 + c_2^4 + z_2^4) + w^4((-18c_2 + 18i\sqrt{3}c_2)z_2^2 + (-18c_2^2 + 18i\sqrt{3}c_2^2)z_2 + 6\sqrt{3}ic_2^3 - 6c_2^3 + (-6 + 6i\sqrt{3})z_2^3) + \frac{27}{2}\sqrt{3}ic_2 + \frac{27c_2}{2} + (\frac{27}{2} + \frac{27i\sqrt{3}}{2})z_2 +$$

$$\frac{81\sqrt{3}i}{2} - \frac{81}{2} + \frac{27c_2}{2} + \frac{27}{2}\sqrt{3}ic_2 - \frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$$

■ Caso IV: $c_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$$p_2(w, z_2) = w^{4/3}((9\sqrt{3}ic_2 + 9c_2 + 108)z_2 + \frac{9}{2}\sqrt{3}ic_2^2 + \frac{9c_2^2}{2} + 108c_2 + (\frac{9}{2} + \frac{9i\sqrt{3}}{2})z_2^2) + w^{8/3}((-3c_2 - 27 + 27i\sqrt{3})z_2^2 + (-3c_2^2 + 54\sqrt{3}ic_2 - 54c_2)z_2 - c_2^3 + 27\sqrt{3}ic_2^2 - 27c_2^2 - z_2^3) + w^{16/3}(4c_2^3z_2 + 6c_2^2z_2^2 + 4c_2z_2^3 + c_2^4 + z_2^4) + w^4((-18c_2 - 18i\sqrt{3}c_2)z_2^2 + (-18c_2^2 - 18i\sqrt{3}c_2^2)z_2 - 6i\sqrt{3}c_2^3 - 6c_2^3 + (-6 - 6i\sqrt{3})z_2^3) - \frac{27}{2}i\sqrt{3}c_2 + \frac{27c_2}{2} + (\frac{27}{2} - \frac{27i\sqrt{3}}{2})z_2 -$$

$$\frac{81i\sqrt{3}}{2} - \frac{81}{2} + \frac{27c_2}{2} - \frac{27}{2}\sqrt{3}ic_2 - \frac{81}{2} - \frac{81\sqrt{3}}{2}i = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Así

$$z = w^{-1} + c_2w^{-1+4} + c_3w^{-1+4+\gamma_3} + \dots = w^{-1} - 27w^3 + c_3w^{3+\gamma_3} + \dots \quad (\text{I})$$

$$z = 3w^{\frac{1}{3}} + c_2w^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} + c_3w^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\gamma_3} + \dots = 3w^{\frac{1}{3}} + 3w^{\frac{5}{3}} + c_3w^{\frac{5}{3}+\gamma_3} + \dots \quad (\text{II})$$

$$z = (-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i)w^{\frac{1}{3}} + c_2w^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} + c_3w^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\gamma_3} + \dots = (-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i)w^{\frac{1}{3}} + (-\frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2})w^{\frac{5}{3}} + c_3w^{\frac{5}{3}+\gamma_3} + \dots \quad (\text{III})$$

$$z = (-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i)w^{\frac{1}{3}} + c_2w^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} + c_3w^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\gamma_3} + \dots = (-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i)w^{\frac{1}{3}} + (-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i)w^{\frac{5}{3}} + c_3w^{\frac{5}{3}+\gamma_3} + \dots \quad (\text{IV})$$

En un paso más se consiguen los siguientes desarrollos:

$$z_{(1)}(w) = w^{-1} - 27w^3 - 2187w^7 + \dots \quad (\text{I})$$

$$z_{(2)}(w) = 3w^{\frac{1}{3}} + 3w^{\frac{5}{3}} + 9w^3 + 35w^{13/3} + 154w^{17/3} + 729w^7 + \dots \quad (\text{II})$$

$$z_{(3)}(w) = (-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i)w^{\frac{1}{3}} + (-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i)w^{\frac{5}{3}} + 9w^3 + (-\frac{35}{2} + \frac{35\sqrt{3}}{2}i)w^{13/3} + (-77 - 77\sqrt{3}i)w^{17/3} + 729w^7 + \dots \quad (\text{III})$$

$$z_{(4)}(w) = (-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i)w^{\frac{1}{3}} + (-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i)w^{\frac{5}{3}} + 9w^3 + (-\frac{35}{2} - \frac{35\sqrt{3}}{2}i)w^{13/3} + (-77 + 77\sqrt{3}i)w^{17/3} + 729w^7 + \dots \quad (\text{IV})$$

CAPITULO 2

En este capítulo tomamos una función f y consideramos el problema de encontrar la superficie más natural a considerar como su dominio de definición.

Si f es meromorfa (o analítica) en alguna región de $D \subset \Sigma$, extendemos f a una función que es meromorfa o (analítica) en alguna región mas grande $E \supset D$ utilizando el Teorema de Monodromía. Para esto introducimos los conceptos de continuación analítica y meromorfa, y luego mostramos cómo esto conduce a la construcción de superficies de Riemann en el dominio adecuado. Luego consideramos las funciones multivaluadas $\log z$ y \sqrt{z} , para representarlas por una función univaluada para algún dominio adecuado y así construir la superficie de Riemann.

2.1. Continuación meromorfa y analítica

Recordemos que una *región* es un conjunto abierto no vacío de Σ que es conexo (o equivalentemente, conexo por caminos). Definimos una *función elemental* como el par (D, f) donde D es una región y $f : D \rightarrow \Sigma$ es una función (univaluada) meromorfa en D y si f es analítica decimos que (D, f) es una *función elemental analítica*.

Lema 2.23. Sean (D, f) y (D, g) funciones elementales definidas en la misma región D . Si $f \equiv g$ en algún subconjunto no vacío U de D , entonces $f \equiv g$ en D .

Demostración. La función $h = f - g$ es meromorfa en D , y sus polos forman un conjunto aislado h^{-1} , así el conjunto $D' = D \setminus h^{-1}$ es no vacío, abierto y conexo por caminos, esto es, D' es una región en la cual h es analítica. Tenemos que $h \equiv 0$ en un subconjunto no vacío $U' = U \cap D'$ de D' , así podemos elegir una secuencia de puntos $z_n \in U'$ convergiendo al límite $z^* \in U'$, y aplicando el Teorema 3.30 tenemos que $h \equiv 0$ en D' . Cada polo en h tiene límite en puntos de D' , así por continuidad (ya que h es meromorfa) tenemos que $h \equiv 0$ en D , y así $f \equiv g$ en D . \square

Así una función elemental (D, f) está determinada por el comportamiento de f cercano a cualquier punto dado $a \in D$, ya que podemos tomar U como un entorno de $a \in D$.

Corolario 2.24. Si (D_1, f_1) es una función elemental y D_2 es una región con $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, entonces existe a lo sumo una función meromorfa f_2 en D_2 tal que $f_1 \equiv f_2$ en $D_1 \cap D_2$ (Como lo ilustra la Figura 2.12)

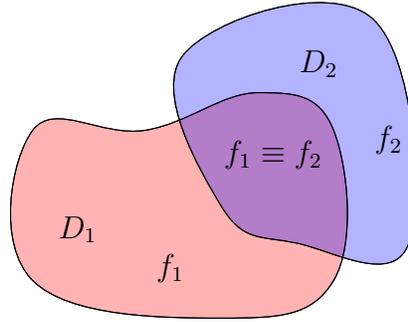


Figura 2.12.

Demostración. Suponga que f_2 y g_2 son meromorfas en D_2 y son idénticamente iguales a f_1 en $U = D_1 \cap D_2$. Entonces $f_2 \equiv g_2$ en U , y U es abierto ya que D_1 y D_2 lo son, así $f_2 \equiv g_2$ en D_2 por Lema 2.23 \square

Cuando tal función f_2 existe, llamamos a la función elemental (D_2, f_2) una *continuación meromorfa directa* de (D_1, f_1) , o una *continuación analítica directa* si f_2 es analítica; en cualquiera de los casos escribimos $(D_1, f_1) \sim (D_2, f_2)$, significando que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ y $f_1 \equiv f_2$ en $D_1 \cap D_2$.

La relación \sim entre funciones elementales es reflexiva y simétrica, pero no transitiva. Pues, si $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset \neq D_2 \cap D_3$, no se sigue que $D_1 \cap D_3 \neq \emptyset$, e incluso si $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ no se sigue de $(D_1, f_1) \sim (D_2, f_2) \sim (D_3, f_3)$ que $f_1 \equiv f_3$ en $D_1 \cap D_3$.

El ejemplo más familiar de este comportamiento lo observamos en la función logaritmo: Si D_1 , D_2 y D_3 son regiones en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ rodeando el origen como se ilustra en la Figura 2.13, y si f_1 es una rama analítica univaluada de la función multivaluada $\log(z)$ en D_1 , entonces tenemos una continuación analítica directa $(D_1, f_1) \sim (D_2, f_2) \sim (D_3, f_3)$ pero encontraremos que $f_3 \equiv f_1 + 2\pi i$ en $D_1 \cap D_3$, así que (D_3, f_3) no es una continuación analítica directa de (D_1, f_1) .

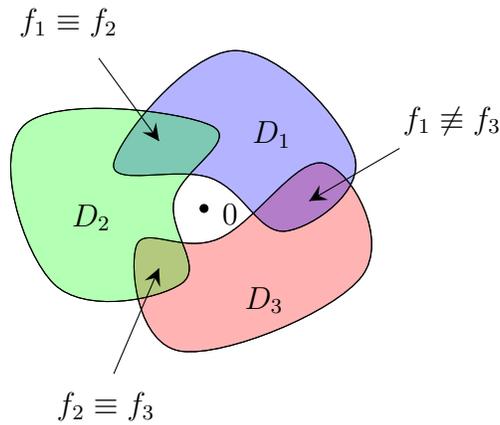


Figura 2.13.

Así una función elemental (tal como (D_1, f_1)) puede algunas veces dar lugar a dos funciones distintas (aquí f_1 y f_3) en la misma región; esto ilustra como continuaciones repetidas de una función elemental univaluada puede producir lo que llamamos una *función multivaluada*. Sin embargo, a menudo es posible construir una secuencia de continuaciones meromorfas directa.

$$(D_1, f_1) \sim (D_2, f_2) \sim (D_3, f_3) \sim \dots$$

De tal manera que den una función univaluada en $\cup_n D_n$; llamamos a este proceso *continuación meromorfa* (o *continuación analítica* si cada f_n es analítica).

Retomamos ahora la función logaritmo para hacer un examinación más detallada de algunas de las dificultades que involucra la continuación meromorfa.

Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, los valores w de $\log(z)$ son las soluciones de $\exp(w) = z$. Haciendo $z = re^{i\theta}$, con $r, \theta \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, podemos ver que $w = \ln(r) + i\theta$; observamos que hay infinitas opciones para θ , todas difiriendo por múltiplos enteros de 2π , y podemos elegir nuestras funciones elementales tal que θ sea un función univaluada en las regiones elegidas. La dificultad es que si la región $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ rodea el origen, entonces no podemos hacer una elección univaluada y continua para $\theta = \arg(z)$ en D . Por ejemplo, suponga que D contiene la circunferencia unidad $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y que $\theta(z)$ es una elección continua de $\arg(z)$ en C ; entonces la función $\phi(z) = \theta(z) + \theta(\bar{z})$ es continua en C , y ya que $\theta(\bar{z}) = -\theta(z) + 2n\pi$, ($n \in \mathbb{Z}$) observamos que $\phi(C) \subseteq 2\pi\mathbb{Z}$. Ahora como ϕ es continua y C es conexo, tenemos que $\phi(C)$ es un subconjunto conexo de $2\pi\mathbb{Z}$ y por tanto es un punto $2\pi N$, esto es, ϕ es constante en C . Entonces

$$\theta(1) = \frac{1}{2}\phi(1) = \pi N = \frac{1}{2}\phi(-1) = \theta(-1)$$

lo cual es claramente contradictorio ya que $\theta(1) \in 2\pi\mathbb{Z}$ y $\theta(-1) \in 2\pi\mathbb{Z} + \pi$.

Para evitar esta dificultad, usaremos una clase particular de regiones que no rodeen el origen. Sea J cualquier intervalo abierto

$$J = (\alpha, \beta) = \{\theta \in \mathbb{R} : \alpha < \theta < \beta\}$$

donde $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$, sea D_J la región

$$D_J = \{z = re^{i\theta} : r > 0 \text{ y } \theta \in J\}$$

y para cada $z \in D_J$ sea

$$f_J(z) = \ln(z) + i\theta.$$

Ya que J tiene longitud a lo sumo 2π , cada $z \in D_J$ determina un único valor $\theta = \arg(z) \in J$, así f_J es univaluada en D_J . Escribiendo $z = x + iy$ es fácil verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f_J :

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln(r) = \frac{\partial \theta}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial}{\partial y} \ln(r) = -\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Así, f_J es analítica en D_J , tenemos entonces una función analítica elemental $L_J = (D_J, f_J)$, representando una rama de $\log(z)$ en D_J .

Por ejemplo, tomando J lo más grande posible podemos tener $J = (-\pi, \pi)$ así que $D_J = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$. Sin embargo, hay un inconveniente para nuestro propósito ya que no hay una continuación analítica de L_J más allá de D_J : por ejemplo, si (D, f) es una continuación analítica con $-1 \in D$ entonces cada entorno U de -1 en D contiene elementos z', z'' con $\text{Im}(z'') < 0 < \text{Im}(z')$, como se muestra en la Figura 2.14; tenemos que $f(z') = f_J(z') \rightarrow i\pi$ cuando $z' \rightarrow -1$, y $f(z'') = f_J(z'') \rightarrow -i\pi$ cuando $z'' \rightarrow -1$, así f no es analítica (o incluso meromorfa) en -1 .

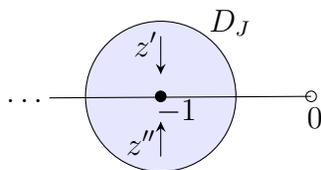


Figura 2.14.

Problemas similares ocurren en todos los puntos $z < 0$. Sin embargo, podemos continuar f_J afuera de D_J restringiendo primero f_J a un región más pequeña de D_J .

Sea K el intervalo $(0, \pi)$, así $K \subset J$ y $D_K \subset D_J$ y $f_K \equiv f_J$ en D_K , dando un continuación analítica directa $L_J \sim L_K$.

Ya que D_K es el semiplano superior, no hay punto $z'' \in D_K$ cercanos al rayo $z \leq 0$ satisfaciendo que $\text{Im}(z'') < 0$, y no hay dificultad en continuar L_K cruzando el eje real

negativo.

Esto sugiere que es más conveniente utilizar intervalos J de longitud estrictamente menor que 2π . Sean D_A, D_B y D_C los semiplanos abiertos correspondientes a los intervalos

$$A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad B = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right), \quad C = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right),$$

como se muestra en la Figura 2.15, y sean L_A, L_B y L_C las correspondientes ramas de $\log(z)$.

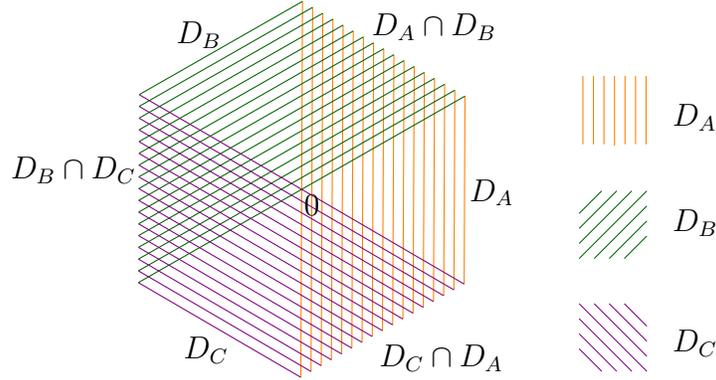


Figura 2.15.

Ahora $D_A \cap D_B \neq \emptyset$, y para $z = re^{i\theta} \in D_A \cap D_B$ tenemos $\theta \in A \cap B = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, así $f_A(z) = \ln(r) + i\theta = f_B(z)$ y por tanto $L_A \sim L_B$. Un argumento similar muestra que $L_B \sim L_C$. Como sea, aunque $D_A \cap D_C \neq \emptyset$ no tenemos que $L_A \sim L_C$: los elementos de $D_A \cap D_C$ son de la forma $z = re^{i\theta}$ con $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right) \subset A$ dando $f_A = \ln(r) + i\theta$, y también de la forma $z = re^{i(\theta+2\pi)}$ con $\theta + 2\pi \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right) \subset C$, así $f_C = \ln(r) + i(\theta + 2\pi) = f_A(z) + 2\pi i$. La continuación analítica de L_C en D_A produce la función elemental $(D_A, f_A + 2\pi i) = L_{(A+2\pi)}$, donde $A + 2\pi = \{\theta + 2\pi : \theta \in A\} = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$. Si iteramos este proceso n veces en la dirección *positiva*, usando la secuencia de intervalos

$$A, B, C, A + 2\pi, B + 2\pi, \dots, C + 2(n-1)\pi, A + 2n\pi,$$

entonces obtenemos la función elemental $L_{(A+2n\pi)}$, dado por el valor $f_{(A+2n\pi)}(z) = f_A(z) + 2n\pi i$; y si continuamos n veces en la dirección *negativa*, usando la secuencia de intervalos

$$A, C - 2\pi, B - 2\pi, A - 2\pi, C - 4\pi, \dots, B - 2n\pi, A - 2n\pi$$

entonces obtenemos la función elemental ($L_{(A-2n\pi)}$), dado por el valor $f_{(A-2n\pi)} = f_A(z) + 2n\pi i$. De esta manera, comenzando de cualquier $z \neq 0$ y continuando alrededor el origen un número apropiado de veces, en la dirección positiva o negativa, podemos regresar a z y obtener uno de los infinitos valores de $\log(z)$.

Este ejemplo ilustra algunas dificultades asociadas con la continuación meromorfa:

- (I) si una región D inadecuada es elegida (como $D = D_J$ con $J = (-\pi, \pi)$) entonces la función elemental (D, f) puede no admitir una continuación meromorfa directa fuera de D ;
- (II) la relación \sim de continuaciones meromorfas directas no es transitiva, ya que podemos tener que $L_A \sim L_B \sim L_C$ y esto no implica que $L_A \sim L_C$ incluso si $D_A \cap D_C \neq \emptyset$;
- (III) si la continuación meromorfa comienza de D , y eventualmente regresa a una región particular de D , entonces la función final definida en D puede que sea un poco diferente de la función original; por ejemplo f_A puede continuarse meromórficamente hasta $f_A + 2n\pi i$ en $D = D_A$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$;
- (IV) si (E, g) es una continuación meromorfa de (D, f) , entonces los valores de la función g en E pueden depender de la secuencia de continuaciones meromorfas elegidas de D a E ; por ejemplo, tomando $(D, f) = L_A$ con $A = (-\pi/2, \pi/2)$ como antes, y tomando E con el disco más pequeño que contiene a -1 , entonces la continuación vía D_B da $f_B(-1) = i\pi$ para $\log(-1)$, como sea la continuación vía D_C da $f_C(-1) = -i\pi$, así obtenemos dos continuaciones distintas de g en E .
- (V) si (D, f) y (E, g) son funciones elementales y $f \equiv g$ en un subconjunto U de $D \cap E$, no se sigue que $f \equiv g$ en $D \cap E$, así que no tenemos que $(D, f) \sim (E, g)$; el punto es que $D \cup E$, sigue siendo abierto, pero no necesariamente conexo por caminos y así puede que no tengamos una región, así el Lema 2.23 no aplica. Por ejemplo, tomando $(D, f) = L_{(A \cup B)}$ y $(E, g) = L_C$ como antes, donde $A \cup B = (-\pi/2, 7\pi/6)$ y $C = (5\pi/6, 11\pi/6)$ así $D \cap E$ es una unión disjunta de dos regiones $D_B \cap D_C$ y $D_C \cap D_A$ como se muestra en la Figura 2.16. En $D_B \cap D_C$ tenemos que $g \equiv f_C \equiv f_B \equiv f_{(A \cup B)} \equiv f$, pero en $D_C \cup D_A$ tenemos que $g \equiv f_C \equiv f_A + 2\pi i \equiv f_{(A \cup B)} + 2\pi i \equiv f + 2\pi i$.

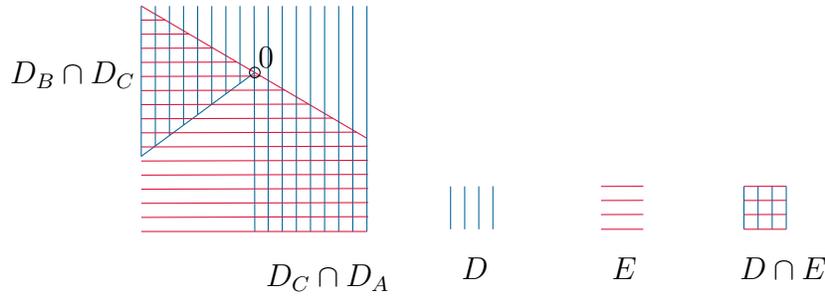


Figura 2.16.

Podemos evitar esta última dificultad usando solamente regiones *convexas*, como discos (en el ejemplo de antes D es no convexo): la intersección de dos conjuntos convexos es convexo y por tanto conexo por caminos.

2.2. Continuación meromorfa a lo largo de un camino

Para lidiar con problemas de no unicidad de la continuación meromorfa como los que se presentaron en la §2.1 en relación con $\log(z)$, introducimos el concepto de continuación meromorfa a lo largo de un camino. Probaremos que la continuación meromorfa de un camino es única, y entonces consideraremos la relación entre continuaciones meromorfas a lo largo de dos caminos diferentes entre dos puntos dados.

Un *camino* γ es una función continua $\gamma : I \rightarrow \Sigma$, donde I es el intervalo cerrado $[0, 1] = \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s \leq 1\}$. Ya que γ es continua y I es compacto y conexo, la imagen $\gamma(I)$ es compacto y conexo.

Haciendo abuso del lenguaje, a menudo no referiremos a $\gamma(I)$ como “el camino γ ”. Si $a = \gamma(0)$ y $b = \gamma(1)$ entonces diremos que γ es un camino “de a a b ”; γ es un camino *cerrado* si $a = b$, y γ es *simple* si $\gamma(s) = \gamma(s')$ implica que $s = s'$ o sino $s = 0$ y $s' = 1$ (esto es, γ no tiene auto intersecciones excepto posiblemente donde $a = b$).

Sea (D, f) una función elemental, sea $a \in D$ y sea γ un camino en Σ de a a algún punto $b \in \Sigma$. Entonces una *continuación meromorfa de (D, f) a lo largo de γ* es una secuencia finita de continuaciones meromorfas directas $(D, f) \sim (D_1, f_1) \sim (D_2, f_2) \sim \dots \sim (D_m, f_m)$ tal que

- (I) cada región D_i es un disco abierto en Σ , con $a \in D_1 \subseteq D$;
- (II) hay una partición $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ de I tal que $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subseteq D_i$ para $i = 1, 2, \dots, m$ (y así $b \in D_m$) (Véase Figura 2.17)

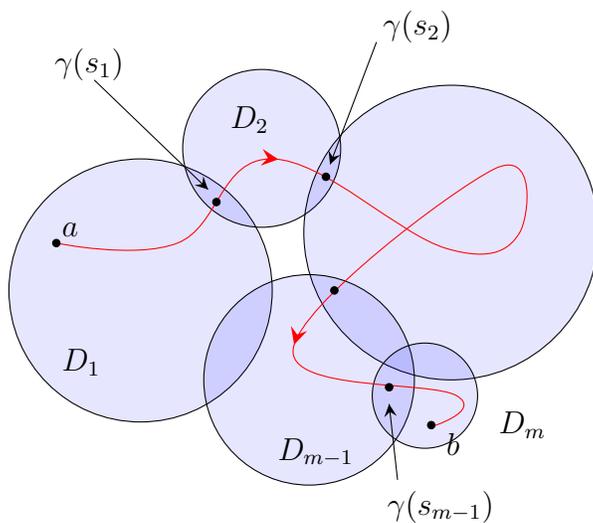


Figura 2.17.

Si todas las funciones elementales (D_i, f_i) son analíticas, la llamaremos *continuación analítica a lo largo de γ* .

Podemos preguntarnos por qué necesitamos que las regiones D_i sean discos, y por qué solo necesitamos un número finito de ellos. No hay pérdida de generalidad en usar discos, ya que cualquier región en Σ es unión de discos abiertos. Más aún, es fácil verificar que si dos discos abiertos de S^2 tienen intersección no vacía, entonces tal intersección es conexa por caminos y por tanto una región; usando el homeomorfismo $\pi : S^2 \rightarrow \Sigma$ observamos que los discos en Σ tienen también esta útil propiedad. Ya que γ es compacto podemos reducir cualquier cobertura de Σ por regiones a una subcobertura finita, así no hay pérdida de generalidad en restringir a secuencias finitas de continuaciones meromorfas.

Como ejemplo de continuación analítica a lo largo de un camino, sea γ el círculo unidad parametrizado por $\gamma(s) = e^{2\pi is}$ ($s \in I$), así $a = b = 1$. Podemos continuar $\log(z)$ analíticamente alrededor de 0 usando la secuencia de continuaciones meromorfas $L_A \sim L_B \sim L_C \sim L_{A+2\pi}$ como lo hicimos en §2.1.

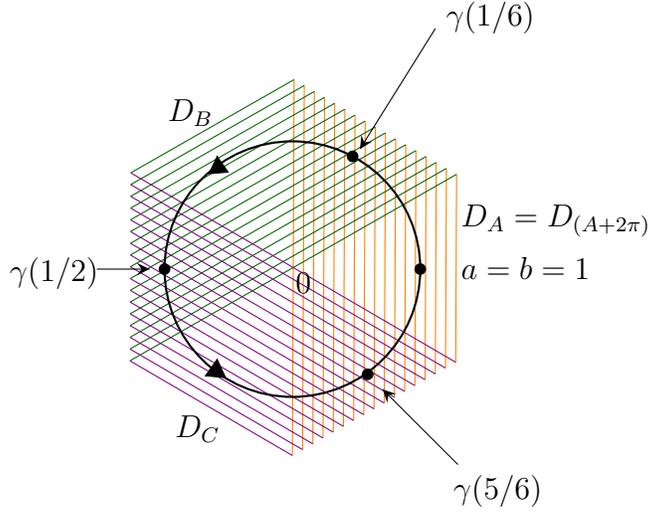


Figura 2.18.

Esto se ilustra en la Figura 2.18. En este ejemplo, podemos tomar la partición de I en la condición (II) con $m = 4$ para ser $0 < \frac{1}{6} < \frac{1}{2} < \frac{5}{6} < 1$. Así empezamos con $f_1(a) = f_A(1) = 0$ en $a = 1$ y terminamos con $f_4(b) = f_{(A+2\pi)}(1) = 2\pi i$ en $b = 1$. Similarmemente, si $n \in \mathbb{Z}$ y tomamos $\gamma^n(s) = e^{2n\pi is}$, entonces el camino γ^n da n vueltas alrededor de 0, y podemos continuar a lo largo de γ^n desde $f_A(1) = 0$ a $f_{(A+2n\pi)}(1) = 2n\pi i$, como se vió en §2.1.

El objetivo de la continuación meromorfa a lo largo de un camino γ es comenzar con una función meromorfa $f = f_1$ en $a = \gamma(0)$ y permitir que esta función varíe meromórficamente a lo largo de γ hasta que llegamos a función meromorfa f_m en $b = \gamma(1)$. El siguiente resultado muestra que el valor resultante $f_m(b)$ depende solamente de la función inicial f y del camino γ de a a b , y no de la elección de los discos D_i que cubren γ , denotaremos este valor por $f_\gamma(b)$.

Teorema 2.25. Sean $(D, f) \sim (D_1, f_1) \sim \dots \sim (D_m, f_m)$ y $(D, f) \sim (E_1, g_1) \sim \dots \sim (E_n, g_n)$ continuaciones meromorfas de (D, f) a lo largo del camino γ de a a b , y sea $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ las particiones correspondientes de I . Entonces $(D_i, f_i) \sim (E_j, g_j)$, cuando $[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j] \neq \emptyset$, y en particular $f_m(b) = g_n(b)$.

Demostración. Suponga que $[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j] \neq \emptyset$, así que $D_i \cap E_j \neq \emptyset$, y supongamos (una contradicción eventual) que $f_i \neq g_j$ en $D_i \cap E_j$.

Podemos asumir que i y j han sido elegidos de manera que $i + j$ es mínimo con respecto a esta propiedad (intercambiando las dos continuaciones meromorfas de ser necesario) tenemos que $t_{j-1} \leq s_{i-1}$, como en la Figura 2.19. Ya que $(D_1, f_1) \sim (E_1, g_1)$ se sigue

que $i > 1$. Ya que $[s_{i-1}, s_i]$ y $[t_{j-1}, t_j]$ se intersectan tenemos que $s_{i-1} \in [t_{j-1}, t_j]$, así $\gamma(s_{i-1}) \in E_j$. Así, $\gamma(s_{i-1}) \in D_i \cap D_{i-1} \cap E_j \neq \emptyset$.

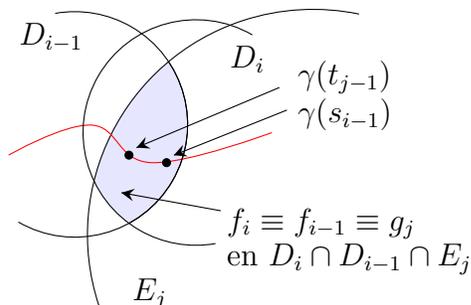


Figura 2.19.

Ahora $s_{i-1} \in [s_{i-2}, s_{i-1}] \cap [t_{j-1}, t_j]$, así por la minimalidad de $i+j$ tenemos que $f_{i-1} \equiv g_j$ en $D_{i-1} \cap E_j$. Ya que $(D_{i-1}, f_{i-1}) \sim (D_i, f_i)$ tenemos que $f_{i-1} \equiv f_i$ en $D_{i-1} \cap D_i$, y entonces $f_i \equiv g_j$ en $D_i \cap D_{i-1} \cap E_j$ el cual es una región no vacía de $D_i \cap E_j$. Así $f_i \equiv g_j$ en $D_i \cap E_j$ por Lema 2.23 contradiciendo la elección de i y j .

Entonces $(D_i, f_i) \sim (E_j, g_j)$ cuando $[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_i] \neq \emptyset$, y tomando $i = m$ y $j = n$ (ya que $1 \in [s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_i]$) tenemos $(D_m, f_m) \sim (E_n, g_n)$ y entonces $f_m(b) = g_n(b)$ ya que $b \in D_m \cap E_n$. \square

2.3. El teorema de Monodromía

Si una función elemental (D, f) puede ser continuada meromórficamente a lo largo de un camino γ de a a b , por el Teorema 2.25 el valor $f_\gamma(b)$ resultado de la continuación en b es independiente del método de continuación a lo largo de γ . Como sea, diferentes caminos γ_0 y γ_1 de a a b pueden dar diferentes valores en b , como vimos en §2.2 para $\log(z)$; consideraremos ahora condiciones suficientes para que $f_{\gamma_0}(b) = f_{\gamma_1}(b)$.

El siguiente resultado muestra que caminos homotópicos resultan a la misma continuación meromorfa.

Teorema 2.26. Sea $X \subseteq \Sigma$, sea $a, b \in X$, y sea Γ una homotopía en X entre dos caminos γ_0 y γ_1 de a a b en X ; si (D, f) es una función elemental que puede ser continuada meromórficamente a lo largo de cada camino $\gamma_t : s \mapsto \Gamma(s, t) (s, t \in I)$, entonces las funciones meromorfas en b , resultando de la continuación a lo largo de γ_0 y γ_1 , son idénticamente iguales en alguna vecindad de b , y en particular, $f_{\gamma_0}(b) = f_{\gamma_1}(b)$.

Demostración. Para todo $t, t' \in I$, escribiremos $t \sim t'$ si las continuaciones meromorfas de (D, f) a lo largo de γ_t y $\gamma_{t'}$ producen funciones que son idénticamente iguales en alguna vecindad de b ; por el Teorema 2.25, esto es independiente de la continuación

particular a lo largo de estos caminos. Claramente \sim es una relación de equivalencia en I , y queremos probar que $0 \sim 1$. Para hacer esto, es suficiente probar que cada clase de equivalencia es abierta en I , y entonces cada clase de equivalencia también es cerrada (su complemento, siendo una unión de clases de equivalencia, es abierta), así la conexidad de I implica que solo hay una clase de equivalencia y así $0 \sim 1$ como se quiere.

Para mostrar que cada clase de equivalencia es abierta, mostraremos que para cada $t \in I$ existe algún $\delta > 0$ tal que $t' \sim t$ para todo $t' \in I$ satisfaciendo $|t' - t| < \delta$. Por hipótesis, hay una secuencia de continuaciones meromorfas directa $(D_1, f_1) \sim \cdots \sim (D_m, f_m)$ y una partición $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$ de I tal que $\gamma_t(I_i) \subseteq D_i$ para $1 \leq i \leq m$, donde I_i denota el subintervalo cerrado $[s_{i-1}, s_i]$ de I . Ya que Γ es continua y cada D_i es abierto, para cada $s \in I_i$ existe un entorno abierto

$$U(s) = \{(s', t') \in I_i \times I : |s' - s| < \delta(s), |t' - t| < \delta(s)\}$$

de (s, t) en $I_i \times I$, con $\delta(s) > 0$, tal que si $(s', t') \in U(s)$ implica que $\Gamma(s', t') \in D_i$, esto es $\gamma_{t'}(s') \in D_i$ (Véase Figura 2.20).

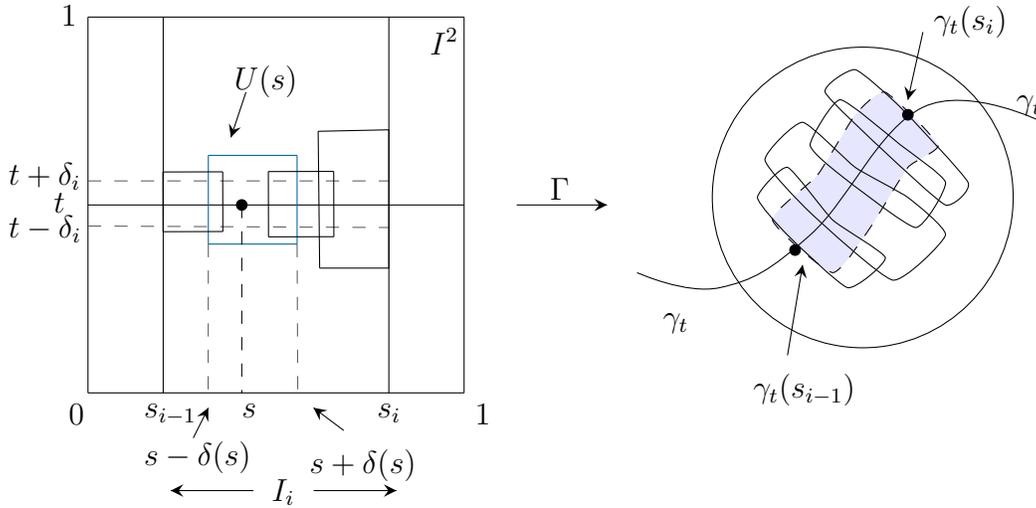


Figura 2.20.

Siendo compacto, I_i es cubierto por finitos de los intervalos $(s - \delta(s), s + \delta(s))$, así sea δ_i , así sea δ_i el menor de los finitos valores correspondientes a $\delta(s)$. Entonces tenemos $\delta_i > 0$, y si $t' \in I$ entonces $|t' - t| < \delta_i$ implica que $\gamma_{t'}(I_i) \subseteq D_i$. Definimos δ para ser el más pequeño de δ_i con $1 \leq i \leq m$, tenemos que $\delta > 0$, y si $t' \in I$ entonces $|t' - t| < \delta$ implica que $\gamma_{t'}(I_i) \subseteq D_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Para tales valores de t' obtenemos por tanto un continuación meromorfa de (D, f) a lo largo de $\gamma_{t'}$ dado por $(D, f) \sim (D_1, f_1) \sim \cdots \sim (D_m, f_m)$, con la misma partición $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$ y las mismas funciones elementales (D_i, f_i) que usamos para la continuación a lo largo de γ_t , como en la Figura 2.21.

Estas continuaciones a lo largo de γ_t y $\gamma_{t'}$ ambas dan la misma función meromorfa en f_m al rededor de b , así $t' \sim t$ como se quería demostrar.

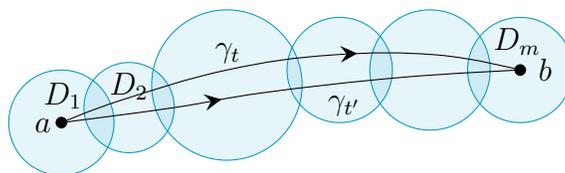


Figura 2.21.

□

Podemos probar ahora que los caminos $\gamma_0(s) = e^{\pi is}$ y $\gamma_1(s) = e^{-\pi is}$ de 1 a -1 no son homotópicos en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si tomamos (D, f) para ser la función elemental L_A , la rama de $\log(z)$ definida en §2.1, entonces no es difícil mostrar que (D, f) puede ser continuada analíticamente a lo largo de cualquier camino de 1 a -1 en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. (usando la función elemental L_J , por ejemplo); ya que $f_{\gamma_0}(-1) = \pi i$ y $f_{\gamma_1}(-1) = -\pi i$, por el Teorema 2.26 que γ_0 y γ_1 no son homotópicos en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Combinando los Teoremas 2.26 y 1.12 vemos que la continuación de una función elemental en una región E simplemente conexa es independiente del camino de continuación; así tenemos una función meromorfa univaluada. El *Teorema de monodromía* más precisamente establece:

Teorema 2.27. El teorema de Monodromía.

Sea E una región simplemente conexa en Σ y sea (D, f) una función elemental con $D \subseteq E$. Si (D, f) puede ser continuada meromorficamente a lo largo de todos los caminos en E que inician en algún punto $a \in D$, entonces existe una continuación directa $(E, g) \sim (D, f)$.

Demostración. Ya que E es simplemente conexo, E es conexo por caminos, así para cada $b \in E$ hay un camino γ en E de a a b . Por hipótesis, podemos continuar (D, f) a lo largo de γ ; podemos denotar el valor de esta continuación en b por $f_\gamma(b)$. Ya que E es simplemente conexo, cualesquiera dos caminos en E son homotópicos, por el Teorema 1.12 y así por el Teorema 2.26 todos ellos inducen el mismo valor de $f_\gamma(b)$. Así $f_\gamma(b)$ es independiente del camino γ de a a b , así tenemos una función univaluada $g : E \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(b) = f_\gamma(b)$.

Ahora suponga que el valor $g(b)$ es producido por la continuación meromorfa $(D, f) \sim (D_1, f_1) \sim \dots \sim (D_m, f_m)$ a largo de γ , así que $g(b) = f_m(b)$; entonces no hay pérdida de generalidad en asumir que el disco D_m esta contenido en E .

Para cada $c \in D_m$ hay un camino δ en D_m de b a c , y así hay un camino ε en E de a a c , siguiendo γ y δ , dado por

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

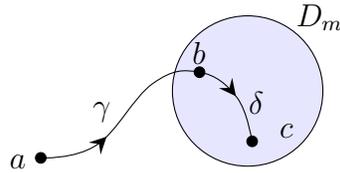


Figura 2.22.

(Véase Figura 2.22). Ya que $\delta \subseteq D_m$, la secuencia $(D, f) \sim (D_1, f_1) \sim \dots \sim (D_m, f_m)$ es una continuación meromorfa a lo largo de ε , así $g(c) = f_\varepsilon(c) = f_m(c)$. Así $g \equiv f_m$ en D_m , así g es meromorfa en b , ya que f_m lo es, y así (E, g) es una función elemental. Ya que todas las continuaciones meromorfas de (D, f) a lo largo de caminos contenidos en D dan $g(b) = f(b)$, tenemos que $(E, g) \sim (D, f)$ como se quería.

□

Como vimos en §2.1 podemos continuar una rama de $\log(z)$ de una vecindad D de 1 a una región $E = D_J$, donde J es un intervalo abierto $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ con $\beta - \alpha \leq 2\pi$, ya que tal región es simplemente conexa. Tomando $J = ((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi)$ con $n \in \mathbb{Z}$ podemos cortar Σ a lo largo del eje negativo real de 0 a ∞ , como se muestra en la Figura 2.23, y la región resultante $E = D_J = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ es simplemente conexa, y también la rama f_J de $\log(z)$, definida en E . Esta rama, que denotaremos por f_n , esta determinada por el valor $f_n(1) = 2n\pi i$; el corte de 0 a ∞ evita que cualquier camino en E rodee el 0 (o equivalentemente, rodee ∞), así la continuación analítica a lo largo de caminos en E es univaluada. Cuando consideramos otra función multivaluada podemos usar una técnica similar, cortando Σ a lo largo de líneas adecuadas para producir una región simplemente conexa en la cual podamos definir ramas univaluadas de la función.

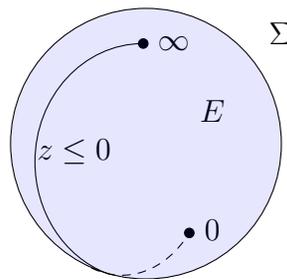


Figura 2.23.

2.4. Superficie de Riemann de $\log(z)$

Hemos visto, en relación con $\log(z)$, cómo la continuación meromorfa de una función elemental puede dar lugar a una función multivaluada (o más precisamente a muchas funciones diferentes definidas sobre la misma región). Esto es insatisfactorio, ya que significa que tenemos que tener gran cuidado con la propiedad $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, porque si nos restringimos a una rama de $\log(z)$, denotada por $\text{Log}(z)$, esta no es continua en $z < 0$, y así no se cumple que $\text{Log}(ab) = \text{Log}(a) + \text{Log}(b) \quad \forall a, b \neq 0$.

Una solución que aplica a las funciones multivaluadas en general, es debido a *Riemann*: restringiendo los valores de la función, extendemos su dominio. Específicamente, construiremos una superficie S , como una función recubridora $\psi : S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y una función $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ los elementos $\psi^{-1}(z)$ son mapeados biyectivamente por ϕ a diferentes valores de $\log(z)$, así que $\exp \circ \phi = \psi : S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Véase Figura 2.24). Para cada hoja de S (tomándolo como espacio recubridor de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) corresponde a una rama particular de $\log(z)$ representada por la restricción de ϕ a una hoja, y podemos imaginar a ϕ como la composición de todas las ramas de $\log(z)$.

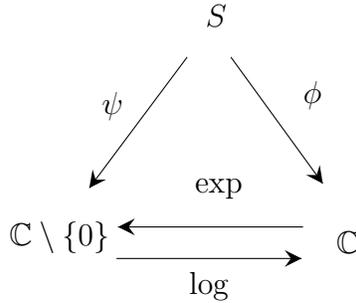


Figura 2.24.

La superficie S es conocida como *superficie de Riemann* para $\log(z)$, puede ser construida de la secuencia de continuaciones analíticas directas

$$\dots \sim L_{C-2\pi} \sim L_A \sim L_B \sim L_C \sim L_{(A+2\pi)} \sim \dots$$

consideradas en §2.1. La idea general es considerar que las regiones subyacentes de las funciones elementales son disjuntas, e identificarlas dondequiera que den valores iguales de $\log(z)$; La superficie resultante S es el dominio de una función univaluada ϕ , que es localmente igual a una rama de $\log(z)$

Sea Δ_A la superficie horizontal por arriba de la región D_A en el plano \mathbb{C} ; cada $z' \in \Delta_A$ está encima de un único $z \in D_A$, y definimos la función $\phi : \Delta_A \rightarrow \mathbb{C}$ por $\phi(z') = f_A(z)$.

Ahora sea Δ_B la superficie horizontal sobre D_B , a un nivel diferente de Δ_A ; definimos $\phi(z'') = f_B(z)$ cuando $z'' \in \Delta_B$ esté encima de $z \in D_B$. Si $z' \in \Delta_A$ y $z'' \in \Delta_B$

están arriba del mismo punto $z \in D_A \cap D_B$, entonces ya que $L_A \sim L_B$ tenemos que $\phi(z') = f_A(z) = f_B(z) = \phi(z'')$; por tanto podemos identificar tales parejas z', z'' de puntos que se traslapan uno con el otro, y tenemos una función ϕ bien definida en la superficie resultante $\Delta_A \cup \Delta_B$.

Ahora introducimos una tercera superficie Δ_C sobre D_C y disjunta de $\Delta_A \cup \Delta_B$, y definimos $\phi(z''') = f_C(z)$ cuando $z''' \in \Delta_C$ y esté encima de $z \in D_C$, ya que $L_B \sim L_C$ tenemos que $\phi(z'') = \phi(z''')$ cuando z'' y z''' estén encima del mismo punto $z \in D_B \cap D_C$, así identificamos z'' con z''' entonces ϕ es una función bien definida en $D_A \cup D_B \cup D_C$. Este proceso se ilustra en la Figura 2.25.

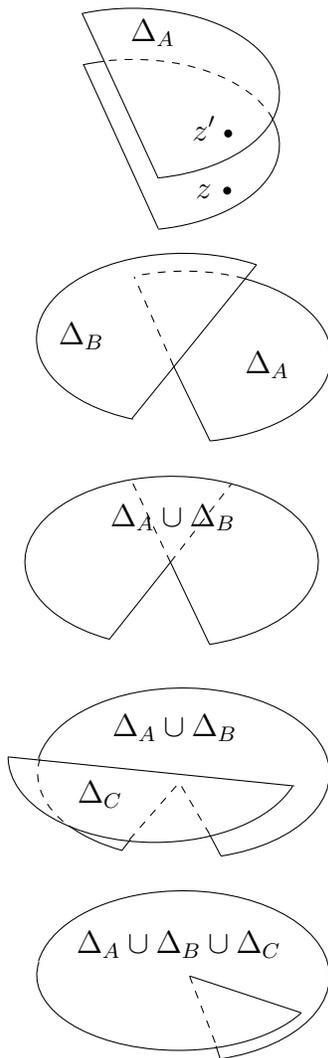


Figura 2.25.

Note que si $z' \in \Delta_A$ y $z''' \in \Delta_C$ están sobre el mismo punto $z \in D_A \cup D_B$, entonces $\phi(z''') = f_C(z) = f_A(z) + 2\pi i = \phi(z) + 2\pi i \neq \phi(z)$, así que en vez de identificar z' con

z''' ubicamos Δ_A y Δ_C a diferentes niveles sobre \mathbb{C}

Continuamos este proceso, siguiendo la secuencia

$$\cdots \sim L_{C-2\pi} \sim L_A \sim L_B \sim L_C \sim L_{(A+2\pi)} \sim \cdots$$

en ambas direcciones. Por ejemplo, cuando introducimos $\Delta_{(A+2\pi)}$ sobre $D_{(A+2\pi)} = D_A$, identificamos los puntos que se traslapan de Δ_C y $\Delta_{(A+2\pi)}$ ya que $L_C \sim L_{A+2\pi}$, pero mantenemos $\Delta_{(A+2\pi)}$ separado de Δ_A , dejando que esté encima uno del otro pero en diferentes niveles, ya que llevan a diferentes ramas de $\log(z)$ (Véase Figura 2.26).

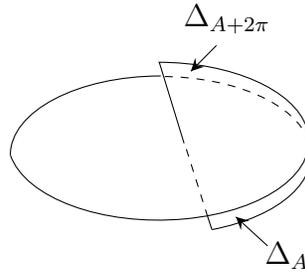


Figura 2.26.

Cada punto s de la superficie resultante $S = \cdots \cup \Delta_{(C-2\pi)} \cup \Delta_A \cup \Delta_B \cup \Delta_C \cup \Delta_{(A+2\pi)} \cup \cdots$ está arriba de un único punto $z \in \psi(s)$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y la función $\psi : S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es fácil de ver que es una función recubridora, cada punto $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ está cubierto por infinitos puntos $s \in S$. Como se ilustra en la Figura 2.27.

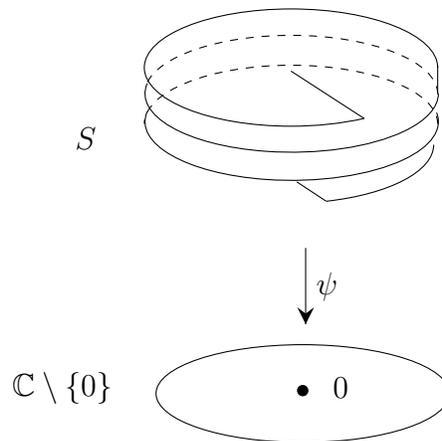


Figura 2.27.

Podemos visualizar S como una espiral con infinitas vueltas extendiéndose hacia arriba y hacia abajo, con ψ correspondiendo a la proyección en la superficie horizontal $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tenemos una función $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$, el valor de $\phi(s)$ para $s \in S$ da uno de los valores

de $\log(\psi(s))$, dependiendo de la hoja de S que contiene s , por otro lado, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y para cada valor w de $\log(z)$ existe un punto $s \in \psi^{-1}(z) \subset S$ con $\phi(s) = w$.

El comentario al final de §2.3 nos da una segunda, manera equivalente de construir S que puede ser aplicada a otras funciones. Si cortamos Σ a lo largo de la línea $z \leq 0$ de 0 a ∞ , entonces la región resultante $E = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ es simplemente conexa y es el dominio de las ramas f_n de $\log(z)$ satisfaciendo que $f_n(1) = 2n\pi i$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Podemos tomar copias disjuntas E_n de E , que será el dominio de cada f_n ; podemos pensar estas superficies E_n una sobre otra sobre $E \subset \mathbb{C}$, como páginas de un libro, como en la Figura 2.28 o envueltas alrededor de la esfera Σ como capas de una cebolla, como en la Figura 2.29

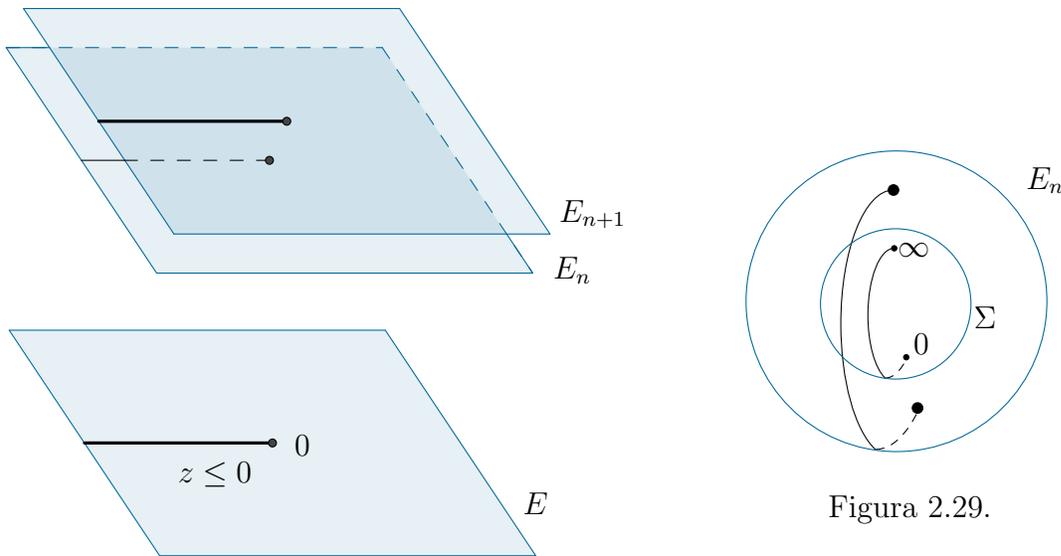


Figura 2.29.

Figura 2.28.

Ahora sea (D, f) una función elemental representando una rama de $\log(z)$ en algún disco D conteniendo el punto $a \in \mathbb{R}, a < 0$, véase Figura 2.30. En la región $D_+ = \{z \in D : \text{Im}(z) > 0\}$ tenemos que $f \equiv f_n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, y en la región $D_- = \{z \in D : \text{Im}(z) < 0\}$ tenemos que $f \equiv f_m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Como $z \rightarrow a$ con $z \in D_+$ tenemos

$$f(z) = f_n(z) \rightarrow \ln(|a|) + (2n + 1)\pi i,$$

mientras que $z \rightarrow a$ con $z \in D_-$ tenemos

$$f(z) = f_m(z) \rightarrow \ln(|a|) + (2m - 1)\pi i.$$

ya que f es analítica en a , $f(z)$ tiene límite único cuando $z \rightarrow a$, así $m = n + 1$.

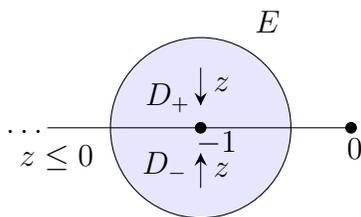


Figura 2.30.

Esto es cuando cruzamos el corte $z \leq 0$ en cualquier punto $a < 0$, pasando de D_+ a D_- , la continuación analítica pasa de f_n en D_+ a $f_m = f_{n+1}$ en D_- . Podemos por tanto unir el borde $\text{Im}(z) < 0$ de E_{n+1} a lo largo de la línea L_n de 0 a ∞ (pero sin incluir 0 o ∞); haciendo esta operación en los pares sucesivos E_n y E_{n+1} es como abotonarse la camisa y la chaqueta, y luego la chaqueta y el sobretodo, etc. Definimos ahora la superficie S como la unión de todas estas hojas E_n y líneas L_n , para $N \in \mathbb{Z}$, como se ilustra en la Figura 2.31

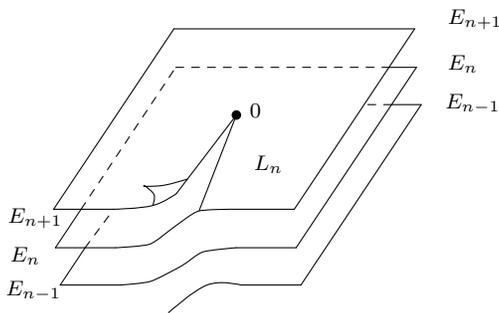


Figura 2.31.

Definimos $\phi(s) = f_n(s)$ si $s \in E_n$, y $\phi(s) = \ln(|a|) + (2n+1)\pi i$ si $s \in L_n$, que esta arriba de $a < 0$. Para cada $s \in S$, definimos la función recubridora $\psi(s)$ como el único elemento de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abajo de s , construyendo así una función recubridora $\psi : S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es fácil ver que S, ψ y ϕ , contruidos aquí, son en esencia los mismos que en la construcción original.

Este método de construcción muestra que S es homeomorfo a \mathbb{C} . Ya que $f_n(re^{i\theta}) = \ln(|r|) + i\theta$, donde $(2n-1)\pi < \theta < (2n+1)\pi$, ϕ mapea E_n de manera homeomorfa sobre la banda dada por $(2n-1)\pi < \text{Im}(w) < (2n+1)\pi$; similarmente, L_n es mapeada de manera homeomorfa en la línea $\text{Im}(w) = (2n+1)\pi$.

Ahora estos conjuntos $\phi(E_n)$ y $\phi(L_n)$ forman una partición de \mathbb{C} , así ϕ es una biyección de S a \mathbb{C} , y es fácil ver de nuestra construcción que ambas ϕ y ϕ^{-1} son continuas, así que $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$ es un homeomorfismo. Podemos considerar \mathbb{C} particionado de esta manera, como representación de la espiral infinita S enderezada por ϕ , cada banda paralela

en \mathbb{C} correspondiente a una hoja de S (Véase Figura 2.32). Si dejamos que un punto $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ siga un camino rodeando el origen, entonces cualquier punto $s \in \psi^{-1}(z)$ se moverá continuamente en una espiral arriba de z en S , pasando sucesivamente por las hojas $\dots E_{-1}, E_0, E_1, \dots$ de S , mientras el punto correspondiente $\phi(s) = \log(z)$ pasa sobre las bandas $\dots \phi(E_{-1}), \phi(E_0), \phi(E_1), \dots$ asociado con la ramas $\dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots$ de $\log(z)$.

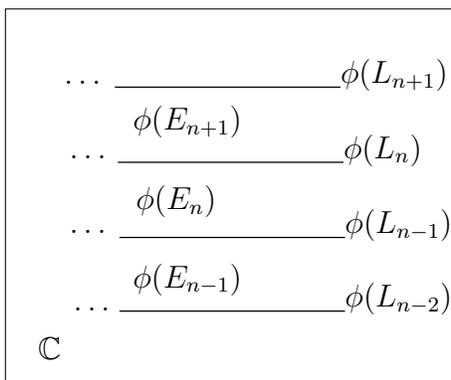


Figura 2.32.

2.5. Superficie de Riemann de $z^{1/q}$

Consideramos la función multivaluada $z^{1/q}$, donde q es un entero, $q \geq 2$. Para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hay q valores de $w = z^{1/q}$, tales que $w^q = z$; esta ecuación la podemos expresar como $w = \exp(q^{-1} \log(z))$, diferentes valores de $z^{1/q}$ corresponden a diferentes valores de $\log(z)$. Más precisamente, si (D, f) es una función elemental representando una rama de $\log(z)$, se tiene que $\exp(f(z)) \equiv z$ en D , entonces la función $g(z) = \exp(q^{-1} f(z))$ es analítica (ya que la composición de funciones analíticas es analítica) y satisface $g(z)^q \equiv z$ en D , así la función elemental (D, g) representa una rama de $z^{1/q}$ en D . Si γ es cualquier camino en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces podemos encontrar una continuación analítica de $z^{1/q}$ a lo largo de γ considerando la continuación de $\log(z)$. Con la misma notación que en la sección anterior tenemos que, si $(D, f) = L_A = (D_A, f_A)$, nos da la rama $g_A = \exp(q^{-1} f_A)$ de $z^{1/q}$ en D_A satisfaciendo $g_A(1) = \exp(0) = 1$, entonces continuando de 1 a 1 a lo largo del camino $\gamma^n(s) = e^{2n\pi i s}$ tenemos

$$g_{(A+2n\pi)} \equiv \exp\left(\frac{1}{q} f_{(A+2n\pi)}\right) \equiv \left(\frac{1}{q} (f_A + 2n\pi i)\right) \equiv \varepsilon^n g_A, \quad \text{donde } \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{q}\right);$$

esto da una rama de $z^{1/q}$ tomando el valor de ε^n en 1. Ya que ε tiene orden q bajo la multiplicación tenemos $g_{(A+2q\pi)} \equiv g_A$. Así las q ramas de $z^{1/q}$ en D_A son

$$g_A, \quad g_{(A+2\pi)} = \varepsilon g_A, \quad \dots, \quad g_{(A+2(q-1)\pi)} = \varepsilon^{q-1} g_A,$$

tomando los valores $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{q-1}$ en 1. Similarmente, si comenzamos con un valor particular w de $z^{1/q}$ en cualquier punto $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces continuando alrededor de 0

repetidas veces obtenemos los valores $w, \varepsilon w, \dots, \varepsilon^{q-1}w$ de $z^{1/q}$ en orden.

Esto muestra que no podemos encontrar una continuación analítica (o incluso meromorfa) de $z^{1/q}$ en 0: Si tuviésemos una función elemental (D, g) representando una rama de $z^{1/q}$ en una región D conteniendo el 0, entonces g no podría ser univaluada en D ; como sea, continuando g analíticamente a lo largo de un camino cerrado que rodee una vez al 0 en D , podemos reemplazar g por $\varepsilon g \neq g$, obteniendo una contradicción.

Un argumento similar muestra que no existe continuación en ∞ , así 0 e ∞ son puntos singulares de $z^{1/q}$.

Podemos adaptar el método de construcción de la superficie de Riemann de $\log(z)$ para obtener la superficie de Riemann de $z^{1/q}$.

Como en §2.4, sea $E = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$. Esta región simplemente conexa es el dominio de las ramas $g_n = \exp(q^{-1}f_n)$ de $z^{1/q}$ satisfaciendo $g_n(1) = \varepsilon^n$, donde $\varepsilon = \exp(2\pi i/q)$ y $q \in \mathbb{Z}$; tenemos que $g_m = g_n$ si y sólo si $m \equiv n \pmod{q}$, así hay q ramas distintas g_0, g_1, \dots, g_{q-1} y por tanto podemos tomar q copias disjuntas E_0, E_1, \dots, E_{q-1} de E a diferentes niveles arriba de E , con cada E_n como el dominio de g_n . Esto se ilustra en la Figura 2.34.

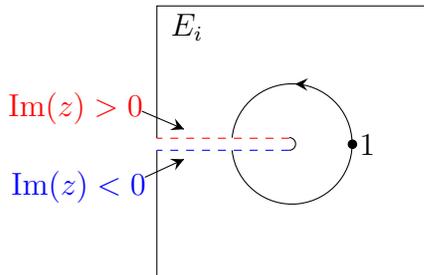


Figura 2.33.

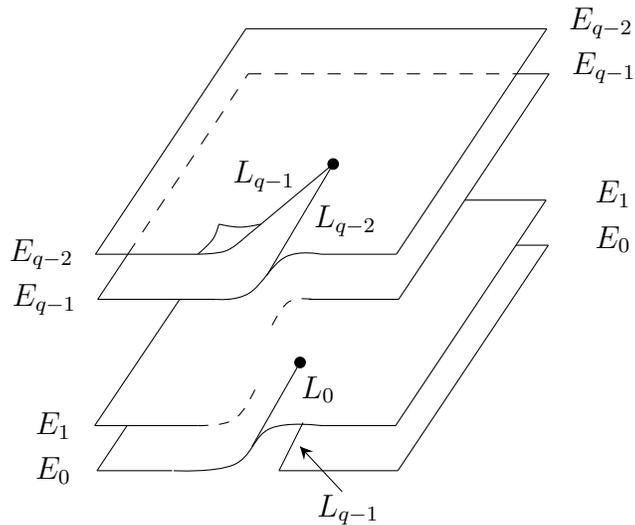


Figura 2.34.

Como continuamos analíticamente cruzando el rayo $z \leq 0$, $\text{Im}(z)$ va decreciendo, pasamos de g_0 a g_1 , así que unimos el borde $\text{Im}(z) > 0$ de E_0 con el borde $\text{Im}(z) < 0$ de E_1 a lo largo de línea L_0 de 0 a ∞ . Similarmente, pegamos E_1 con E_2 a lo largo de L_1 , y así sucesivamente hasta que E_{q-2} es pegado con E_{q-1} a lo largo de L_{q-2} . El proceso hasta ahora, resulta en una superficie en forma de espiral con q hojas, es fácilmente visualizado, pero el siguiente paso no; ya que la continuación a través de $z \leq 0$ toma g_{q-1} a $g_q \equiv g_0$, necesitamos entonces pegar el borde $\text{Im}(z) > 0$ de E_{q-1} con el borde

$\text{Im}(z) < 0$ de E_0 a lo largo de la línea L_{q-1} . Debemos hacer esto sin que la superficie resultante T se corte a sí misma, y esto es imposible en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , sin embargo, la única razón para considerar las hojas E_n como subespacios de \mathbb{R}^3 es para facilitar la visualización e ilustración, y no hay problema si lo consideramos como superficie abstracta. La Figura 2.35 muestra aparentes autointersecciones, como sea en realidad la superficie no se autointersecta.

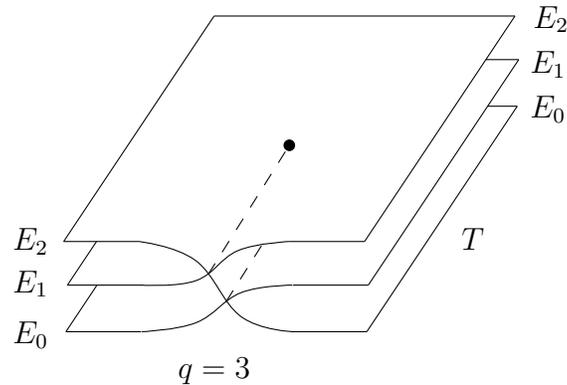


Figura 2.35.

La superficie

$$T = \left(\bigcup_{n=0}^{q-1} E_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{q-1} L_n \right)$$

es una superficie de recubrimiento no ramificada de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con q hojas; cada punto $s \in T$ cae sobre un único punto $z = \psi(s) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y cada $z \in \mathbb{C}$ está por debajo de q puntos $s \in T$, uno en cada hoja. Definimos la función $\phi : T \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ por $\phi(s) = g_n(s)$ para todo $s \in E_n$, y extendiendo ϕ a cada línea L_n por continuidad; así ϕ es localmente igual a una rama de $z^{1/q}$, y tenemos que $\phi(s)^q = \psi(s)$ para todo $s \in T$ (Véase Figura 2.36).

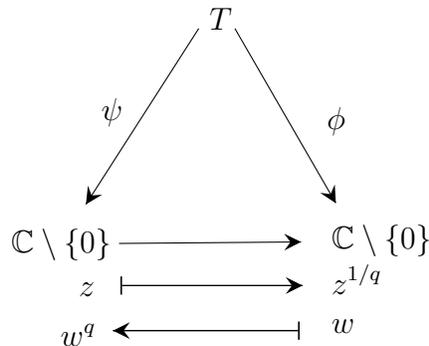


Figura 2.36.

Cada hoja E_n de T es mapeada de manera homeomorfa por ϕ a la región $\frac{(2n-1)\pi}{q} < \arg(z) < \frac{(2n+1)\pi}{q}$ de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y L_n es mapeada de manera homeomorfa a la línea $\arg(w) = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, así ϕ es un homeomorfismo entre T y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, en la Figura 2.37 se presenta el caso particular para $q = 3$.

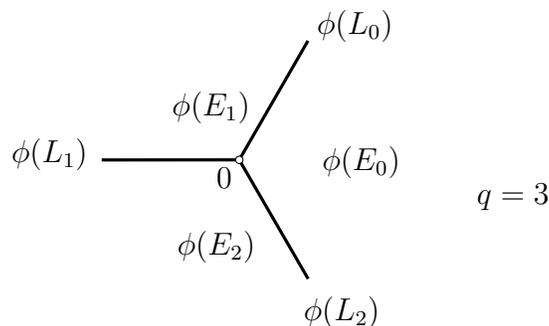


Figura 2.37.

No hay continuación analítica (o incluso meromorfa) de $z^{1/q}$ en $z = 0$: en cualquier vecindad de 0, si continuamos a lo largo de un camino cerrado rodeando el 0 en la dirección positiva, entonces cualquier rama de $z^{1/q}$ se multiplica por $\varepsilon = \exp(2\pi i/q)$, así no podemos elegir una rama univaluada de $z^{1/q}$ en cualquier región que contenga al 0. Sin embargo, para cada rama g_n de $z^{1/q}$ tenemos que $\lim_{z \rightarrow 0} g_n(z) = 0$, así podemos agregar un punto s_0 a T , por arriba de 0 y consideramos s_0 como el origen de cada corte de los planos E_n ; podemos extender la función $\phi : T \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiendo $\phi(s_0) = 0 \in \mathbb{C}$, así que $\phi : T \cup \{s_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en s_0 . Similarmente, podemos extender ϕ por continuidad (aunque no meromorfa) en ∞ , agregando un punto s_∞ a T , por encima de ∞ y poniendo $\phi(s_\infty) = \infty$. Llamaremos a $S := T \cup \{s_0, s_\infty\}$ la *superficie de Riemann* de $z^{1/q}$; por construcción, ϕ es un homeomorfismo de S a Σ . Podemos extender la función recubridora no ramificada $\psi : T \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a una función recubridora ramificada $\psi : S \rightarrow \Sigma$ definiendo $\psi(s_0) = 0$ y $\psi(s_\infty) = \infty$.

Hemos visto que S es homeomorfa (bajo ϕ) a la esfera Σ . Podemos por tanto considerar S como una esfera, dividida en regiones E_0, E_1, \dots, E_{q-1} por líneas L_0, L_1, \dots, L_{q-1} de s_0 a s_∞ . La proyección $\psi : S \rightarrow \Sigma$ envuelve S q veces sobre Σ , la región E de Σ es recubierta de manera homeomorfa por cada región E_n . Cuando un punto $z \in \Sigma$ sigue un camino que rodea a 0 (o a ∞), el punto $s \in \psi^{-1}(z)$ se mueve continuamente arriba de z , pasando sobre las hojas $\dots, E_0, E_1, E_2, \dots$ de S , correspondiendo a la manera (para el caso $q = 3$) en la cual $\phi(s)$ para sobre la ramas $\dots, g_0, g_1, g_2, \dots$ de $z^{1/q}$. Véase Figura 2.38

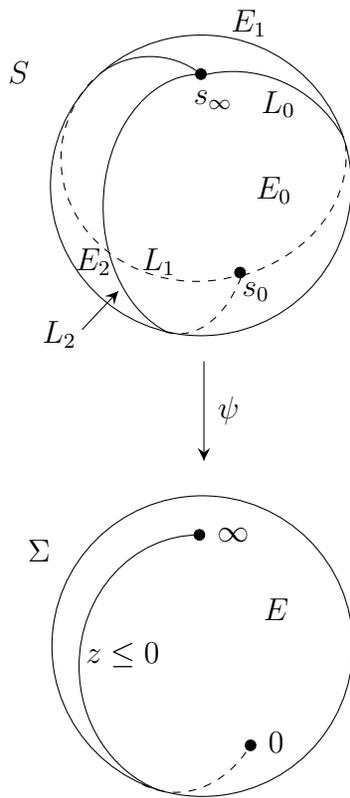


Figura 2.38.

CAPITULO 3

En este capítulo definimos las superficies de Riemann de manera abstracta, luego demostramos que el plano complejo extendido que conoceremos como esfera de Riemann cumple justamente con dicha definición, estudiamos las propiedades topológicas de esta y terminamos el capítulo estudiando el recubrimiento de la esfera por una función racional.

3.1. Superficies abstractas de Riemann

Hemos visto que ciertas funciones multivaluadas f pueden ser representadas por una función univaluada $\phi : S \rightarrow \Sigma$ la cual es meromorfa en su dominio S (la superficie de Riemann de f).

Presentaremos teoría de superficies de Riemann y sus funciones meromorfas, considerando específicamente el caso especial de la esfera de Riemann, esto permitirá definir un dominio más general donde una función meromorfa puede ser definida.

Comenzaremos con el concepto de superficies. Una *superficie* es un espacio topológico Hausdorff tal que cada punto $s \in S$ tiene una vecindad abierta U homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{C} (o equivalentemente \mathbb{R}^2); así S tiene localmente las mismas propiedades topológicas que el plano. Más generalmente, una n -*variedad* es un espacio Hausdorff en el cual cada punto tiene un vecindad homeomorfa a un subconjunto de \mathbb{R}^n , así una superficie es una 2-variedad.

Cualquier superficie S es cubierta por una familia de conjuntos abiertos U_i , tales que para U_i hay un homeomorfismo $\phi_i : U_i \rightarrow W_i$, donde W_i es un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Llamaremos al conjunto de parejas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ un *atlas* para S ; si $s \in U_i$ llamamos a (U_i, ϕ_i) una *carta* en s y $z_i = \phi_i(s)$ *coordenadas locales* para s .

Si (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) son cartas en $s \in S$ dando coordenadas locales z_i y z_j para s , entonces $z_i = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})(z_j)$ expresa el cambio de coordenadas locales para s correspondientes a dos cartas diferentes. Esto se ilustra en la Figura 3.39.

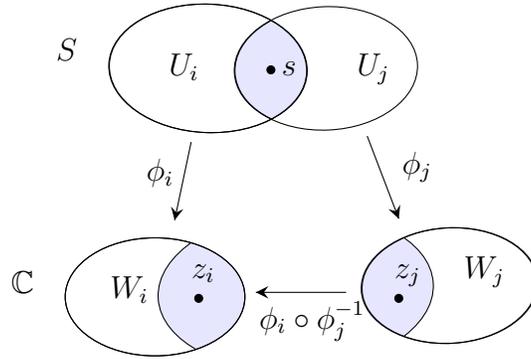


Figura 3.39.

Las funciones

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j),$$

son llamadas *funciones de transición de coordenadas*. Un atlas \mathcal{A} es llamado *analítico* si todas las funciones de transición de coordenadas son analíticas.

Diremos que dos atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ y $\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j)\}$ son *compatibles* si para cualesquiera $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}$ y $(V_j, \psi_j) \in \mathcal{B}$ satisfaciendo $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, se tiene que

$$\phi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap V_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap V_j)$$

es analítico; o equivalentemente, el atlas $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es analítico.

La compatibilidad de atlas es una relación de equivalencia, y una clase de equivalencia de atlas es llamado una *estructura compleja* en S . Finalmente, una superficie con una estructura compleja es llamado *Superficie de Riemann*.

Daremos unos ejemplos simples, en cada caso es suficiente especificar un atlas en S , ya que puede tomarse como representante de su clase de equivalencia, definiendo así una estructura compleja en S .

Ejemplos 3.28. (I) Sea $S = \mathbb{C}$ y sea $\mathcal{A} = \{\mathbb{C}, \text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$, un atlas para \mathbb{C} consistiendo de una única carta; claramente \mathcal{A} es analítico. Hay muchos atlas compatibles, por ejemplo $\mathcal{B} = \{(U_i, \text{id} : U_i \rightarrow U_i)\}$, donde U_i recorre todos los disco abiertos en \mathbb{C} de radio 1; cada función de transición de coordenadas es la identidad y por tanto analítica, así \mathbb{C} es una superficie de Riemann.

(II) Cualquier subconjunto T de una superficie de Riemann es por si mismo una superficie de Riemann.

Si $\{U_i, \phi_i\}$ es un atlas analítico en S , y si ψ_i es la restricción de ϕ a $U_i \cap T$ (donde esta intersección sea no vacía), entonces $\{(U_i \cap T, \psi_i)\}$ es un atlas analítico en T . Es fácil ver que atlas compatibles en S inducen atlas compatibles en T , así cada estructura compleja en S induce una única estructura compleja en T .

3.2. La esfera de Riemann

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de la esfera de Riemann, para lograr demostrar que en efecto esta superficie cumple con la definición dada en la sección anterior.

Hay muchas ventajas en usar el conjunto \mathbb{C} de los números complejos como dominio de definición de funciones. Los números complejos forman un campo algebraicamente cerrado, esto es, los polinomios de grado n tienen n raíces en \mathbb{C} , contando multiplicidades. Geométricamente, \mathbb{C} puede visualizarse como el plano Euclídeo \mathbb{R}^2 .

Como dominio de definición de funciones, \mathbb{C} tiene la siguiente propiedad: Si f es una función de variable compleja y es diferenciable en una región $R \subset \mathbb{C}$, llamemos región a un conjunto abierto no vacío y conexo por caminos, entonces f es infinitamente diferenciable en R , y para cada $a \in R$ podemos expandir f como una serie de potencias convergente en un disco suficientemente pequeño que contenga a a . (En contraste, hay funciones de variable real tal que son una vez diferenciable pero no dos veces, o hay infinitamente diferenciable pero no pueden ser representadas como series de potencias). Cuando f es diferenciable en una región R , diremos que f es analítica en R .

Hay, como sea, desventajas en usar \mathbb{C} , por ejemplo la división por 0 es imposible, y algunas funciones no están definidas donde sea, por ejemplo, z^{-1} esta indefinida en $z = 0$. Otras de las desventajas obvias es que \mathbb{C} no es compacto, así ciertas sucesiones $(1, 2, 3, \dots$ por ejemplo) no tienen subsucesiones convergentes. Cuando estudiemos la conexión entre funciones y superficies, veremos que esa condición de compacidad de una superficie es una propiedad importante para probar teoremas acerca de funciones definidas sobre una superficie.

Podemos solventar estas desventajas, usando el plano complejo extendido $\Sigma := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un punto extra llamado punto del infinito. Geométricamente, Σ está bien definido, y como veremos Σ puede ser considerado como una esfera.

Considere la 2 – esfera

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

en \mathbb{R}^3 , e identificamos el plano complejo \mathbb{C} con el plano $x_3 = 0$ bajo la identificación $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) con $(x, y, 0)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Si $N = (0, 0, 1)$ es el polo norte, entonces la proyección estereográfica es una función biyección $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}, Q \rightarrow P$, donde $P \in \mathbb{C}, Q \in S^2 \setminus \{N\}$, y P, Q y N son colineales (Véase Figura 3.40)

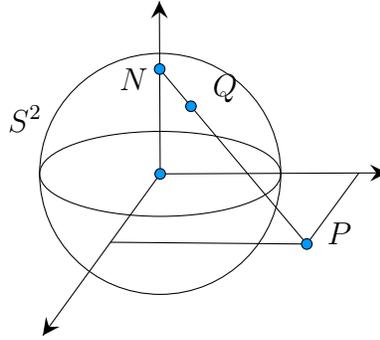


Figura 3.40.

El siguiente argumento muestra que π es un homeomorfismo entre $S^2 - \{N\}$ y \mathbb{C} . Sea $P = (x, y, 0)$ donde $z = x + iy \in \mathbb{C}$, y sea $Q = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{N\}$. Como P, Q y N son colineales tenemos

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_2} = \frac{1}{1 - x_3}$$

Por lo que $x = x_1/(1 - x_3)$ e $y = x_2/(1 - x_3)$, y así $\pi : Q \rightarrow P$ es dada por

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \quad (1)$$

Usando $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, tenemos

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{2 - 2x_3}{(1 - x_3)^2} = \frac{2}{1 - x_3},$$

así que $\pi^{-1} : P \rightarrow Q$ viene dada por

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \quad (2)$$

Estas expresiones muestran que ambas π y π^{-1} son continuas, de donde se demuestra que π es un homeomorfismo.

Ahora denotemos por Σ el *plano complejo extendido* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde ∞ (llamado punto del infinito) es un símbolo que no representa un elemento de \mathbb{C} ; podemos extender $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ a una biyección $\pi : S^2 \rightarrow \Sigma$ definiendo $\pi(N) = \infty$.

Podemos usar la biyección $\pi : S^2 \rightarrow \Sigma$ para transferir propiedades algebraicas y topológicas de Σ a S^2 y viceversa. Por ejemplo, ya que Σ tiene las mismas propiedades topológicas que la esfera S^2 , Σ es a veces llamado la *esfera de Riemann*. Así que consideraremos conveniente (aunque impreciso) referirnos a S^2 y Σ como conjuntos idénticos, haciendo la identificación en cada punto $Q \in S^2$ con $P = \pi(Q) \in \Sigma$.

3.2.1. Comportamiento de funciones en el infinito

Si un subconjunto D de Σ no contiene ∞ , entonces tenemos que $D \subset \mathbb{C}$ podemos referirnos a estas funciones en D como analíticas, meromorfas, expansiones de Taylor, etc. Nuestro objetivo es definir conceptos similares en ∞ , para que todos los puntos de Σ tengan las mismas propiedades. Esto se hace usando la transformación $J(z) = z^{-1}$ de Σ ; está bien definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y usaremos como convención que $J(0) = \infty$. Así $J : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es una biyección y J^2 es la identidad.

Ahora sea P el punto $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, y sea P^* el punto $J(z) = z^{-1} = (x - iy)/z\bar{z}$. Entonces el punto $Q = \pi^{-1}(P)$ de S^2 correspondiente a P tiene coordenadas

$$x_1 = \frac{2x}{z\bar{z} + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{z\bar{z} + 1}, \quad x_3 = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}$$

en \mathbb{R}^3 , y las coordenadas de $Q^* = \pi^{-1}(P^*)$ son

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{2x(z\bar{z})^{-1}}{(z\bar{z})^{-1} + 1} = \frac{2x}{1 + z\bar{z}} = x_1 \\ x_2^* &= \frac{-2y(z\bar{z})^{-1}}{(z\bar{z})^{-1} + 1} = \frac{-2y}{1 + z\bar{z}} = -x_2 \\ x_3^* &= \frac{(z\bar{z})^{-1} - 1}{(z\bar{z})^{-1} + 1} = \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} = -x_3 \end{aligned}$$

Así J induce la transformación $\pi^{-1} \circ J \circ \pi : Q = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow Q^* = (x_1, -x_2, -x_3)$ de S^2 (Un argumento simple pero separado es necesario para $Q = N$ o S , correspondiente a $z = \infty$ o 0), y esto es una rotación de S^2 por un ángulo π alrededor del eje x_1 .

De ahora en adelante, nos referiremos a $\pi^{-1} \circ J \circ \pi$ simplemente como J siempre y cuando no haya peligro a confusión; de manera equivalente, estamos identificando S^2 y Σ por medio de π , y con respecto a J como una transformación de cada uno de estos dos espacios. (Ver Figura 3.41)

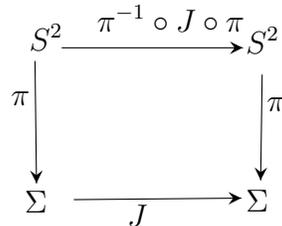


Figura 3.41.

Suponga que una función $f(z)$ está definida en $D \setminus \{\infty\}$, donde D es una región de ∞ en Σ ; equivalentemente, $f(z)$ está definida para $|z|$ suficientemente grande. Podemos

extender el dominio de f para que incluya ∞ definiendo $f(\infty)$ como $\lim_{z \rightarrow 0} f(z^{-1})$, teniendo en cuenta que este límite exista. Entonces f es continua en ∞ , y $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z^{-1}) = \lim_{z \rightarrow 0} (f \circ J)(z)$. Diremos que f es analítica, meroforma, etc, en ∞ cuando $f \circ J$ tenga la misma propiedad en 0. Por ejemplo:

(I) $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)}$ es analítica en ∞ con un cero de orden 2 allí, ya que $(f \circ J)(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}$ es analítica con un cero de orden 2 en 0;

(II) $f(z) = z^3$ es meromorfa en ∞ , con un polo de orden 3;

(III) $\sin(x)$ tiene un singularidad esencial en ∞ y por tanto no es analítica en ∞

Teorema 3.29. $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una superficie de Riemann

Demostración. Sea $S = \Sigma := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ya vimos que S es homeomorfa a la 2-esfera S^2 , así al tomar la topología de la esfera como subespacio de \mathbb{R}^3 podemos inducir una topología para Σ utilizando la función proyección π . Hay un atlas \mathcal{A} en S consistiendo en dos cartas $(U_i, \phi_i)(i = 1, 2)$; dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1 = \text{id} : U_1 = \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \phi_1(z) = z \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \phi_2 : U_2 = \Sigma \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{si } z = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Claramente $\Sigma = U_1 \cup U_2$, y ϕ_1 y ϕ_2 son homeomorfismos (ϕ_2 induce una rotación en S^2). Tenemos que $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$, la cual es analítica en $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, similarmente $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = \frac{1}{z}$ es analítica en $\phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, así \mathcal{A} es un atlas analítico, dando una estructura compleja en Σ . La superficie resultante es llamada *esfera de Riemann*. \square

Terminaremos este capítulo estudiando el recubrimiento de la esfera de Riemann mediante una función racional, para ello estudiaremos el campo de funciones meromorfas y propiedades topológicas de esta.

Definimos una región de Σ como un conjunto abierto no vacío y conexo por caminos. Usando estas definiciones, podemos extender ciertos teoremas acerca de funciones definidas en \mathbb{C} para funciones definidas en Σ . Por ejemplo:

Teorema 3.30. Sea f una función analítica en una región R de Σ . Si f tiene ceros en una sucesión infinita de puntos z_n en R con límite $z^* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ en R , entonces f es idénticamente cero en R .

Demostración. Si $z^* \neq \infty$ para todo n suficientemente grande, así omitiendo finitos términos podemos asumir que $z_n \in \mathbb{C}$ para todo n . Ahora $R' = R \setminus \{\infty\}$ es una región en \mathbb{C} , y f es analítica en R' con ceros en una sucesión infinita de puntos $z_n \in R'$ con límite $z^* \in R'$, así por el Teorema 1.6, f es idénticamente cero en R' . Si $\infty \notin R$ entonces $R = R'$ y el resultado está probado. Si $\infty \in R$, entonces como f es analítica en ∞ y se anula en un entorno de ∞ , tenemos que $f(\infty) = 0$ como queríamos, por la continuidad.

Ahora suponga que $z^* = \infty$. Omitiendo finitos términos, podemos asumir que $z_n \neq 0$ para todo n . Así f es analítica en una región $\bar{R} = R \setminus \{0\}$, $f \circ J$ es analítica en la región $R^* = \{z^{-1} : z \in \bar{R}\}$. Ahora $f \circ J$ tiene ceros en los puntos $z_n^{-1} \in R^*$, y ésta tiene límite $J(z^*) = 0$ en R^* , así $f \circ J$ es idénticamente cero en R^* y así f es idénticamente cero en \bar{R} . Si $0 \notin R$ entonces $R = \bar{R}$ y el resultado está probado. Si $0 \in R$ entonces $f(0) = 0$ por la continuidad, así f es idénticamente cero en R . \square

Hemos visto cómo extender el dominio de una función f para que incluya al ∞ . Similarmente, podemos incluir ∞ en la imagen de f : Si f es meromorfa en el punto $a \in \Sigma$, con un polo en a , esto es, $(z - a)^k f(z)$ es analítica para algún $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, entonces escribimos $f(a) = \infty$. Así los polos de f corresponden a los ceros de $J \circ f$. Definimos $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ para ser meromorfa en Σ si es meromorfa en cada $a \in \Sigma$. Así tenemos inmediatamente:

- (I) Si f es meromorfa en Σ entonces f es continua en Σ ;
- (II) cada función constante $f(z) = c \in \mathbb{C}$ es meromorfa en Σ , la función constante $f(z) = \infty$ no es meromorfa en Σ ;
- (III) las funciones meromorfas en Σ forman un campo, esto es, si f y g son meromorfas en Σ entonces también lo son $f \pm g$, fg y f/g con $g \neq 0$

Suponga que f es analítica en $a \in \mathbb{C}$, con $f(a) = c \in \mathbb{C}$; si f no es constante entonces $f^{(k)}(a) \neq 0$ para algún $k \geq 1$, y llamemos a este último k *multiplicidad* de la solución de $f(z) = c$ en $z = a$.

Similarmente, si $a = \infty$ entonces podemos decir que $f(\infty) = c$ con multiplicidad k si $(f \circ J)(0) = c$ con multiplicidad k . Diremos que a es un *punto simple* de f si tiene multiplicidad $k = 1$, y *punto múltiple* si $k > 1$.

Corolario 3.31. Una función meromorfa no constante $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ toma cualquier valor $c \in \Sigma$ solamente una cantidad finita de veces, contando multiplicidades (esto es, la suma de las multiplicidades de las soluciones de $f(z) = c$ es finito).

Demostración. Si $z \in \Sigma$ y $f(z) = c$, entonces existe un entorno N_z de z tal que f no toma el valor c en $N_z \setminus \{z\}$; para $c = \infty$ entonces los polos de f son los ceros de $f \circ J$; y así $f \circ J$ es meromorfa y no constante en esas singularidades, por teorema 3.30; si $c \neq \infty$ podemos usar el hecho que los ceros de $f - c$ son aislados. Por la compacidad, Σ es cubierta por finitos entornos N_{z_1}, \dots, N_{z_k} , así $f^{-1}(c) = \{z_1, \dots, z_k\}$, un conjunto finito. Como f es meromorfa, cada solución de $f(z) = c$ tiene multiplicidad finita, así f toma el valor c solamente una cantidad finita de veces. \square

3.2.2. Funciones racionales

Una *función racional* es una función de la forma $f(z) = p(z)/q(z)$, donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios con coeficientes constantes y $q(z)$ no es idénticamente cero. Cuando $z \in \mathbb{C}$ y $q(z) \neq 0$, $f(z)$ es un elemento bien definido de \mathbb{C} ; cuando $q(z) = 0$ o $z = \infty$, definimos $f(z) = \lim_{z' \rightarrow z} f(z')$ como en §3.2.1. Así f es una función de $\Sigma \rightarrow \Sigma$.

Las funciones racionales forman un campo que se denota por $\mathbb{C}(z)$. Para cada valor fijo $a \in \mathbb{C}$ la función constante $f_a : z \mapsto a$ es una función racional, y estas funciones forman un campo isomorfo a \mathbb{C} bajo el isomorfismo $f_a \rightarrow a$. Así $\mathbb{C}(z)$ contiene un subcampo isomorfo a \mathbb{C} , así $\mathbb{C}(z)$ puede ser considerado como una extensión de campo de \mathbb{C} .

Dos polinomios p y q son coprimos si no existe polinomio no constante r que divida a tanto a p como a q . Si $f = p/q$ es una función racional entonces podemos cancelar cualquier factor común y así asumir que p y q son coprimos. Por el teorema Fundamental del Álgebra podemos expresar cada polinomio como producto de factores lineales. Así podemos escribir

$$f(z) = c(z - \alpha_1)^{m_1} \cdots (z - \alpha_r)^{m_r} (z - \beta_1)^{-n_1} \cdots (z - \beta_s)^{-n_s},$$

donde $c \in \mathbb{C}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son los ceros de p de multiplicidad m_1, \dots, m_r y β_1, \dots, β_s son los ceros de q de multiplicidad n_1, \dots, n_s . Como p y q son coprimos, los ceros de p son distintos de los de q . Así $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son los ceros de f de ordenes m_1, \dots, m_r y β_1, \dots, β_s son los polos de ordenes n_1, \dots, n_s . Esos son los únicos ceros y polos de f en \mathbb{C} , e ∞ es un cero o polo cuando $(m_1 + \cdots + m_r) - (n_1 + \cdots + n_s)$ es negativo o positivo. Por ejemplo, $f(z) = (z-1)/(z^2+4)$ tiene ceros de orden uno en 1 e ∞ y polos de orden 1 en $\pm 2i$.

El próximo resultado muestra que la definición *algebraica* de una función racional es equivalente a la condición *analítica*:

Teorema 3.32. Una función $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es racional si y sólo si f meromorfa en Σ .

Demostración. Si descomponemos una función racional f como antes, entonces f es diferenciable en cada $z \neq \infty$, β_j ($1 \leq j \leq s$), así f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. En cada punto β_j , f tiene un polo de orden n_j , mientras en ∞ , f es analítica si $\deg(p) \leq \deg(q)$

y f tiene un polo de orden $\deg(p) - \deg(q)$ si $\deg(p) > \deg(q)$. Así f es meromorfa en Σ .

Para la otra implicación, suponga que f es meromorfa en Σ . Por Colorario 3.31, f tiene una cantidad finita de polos en \mathbb{C} , digamos β_1, \dots, β_s con ordenes n_1, \dots, n_s . Entonces tenemos que la función

$$g(z) = (z - \beta_1)^{n_1} (z - \beta_2)^{n_2} \dots (z - \beta_s)^{n_s} f(z)$$

es analítica en \mathbb{C} , así g tiene una expansión de Taylor

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$, Ahora g es meromorfa en ∞ (ya que f es lo es), así

$$(g \circ J)(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$$

es meromorfa en 0, y así $a_j = 0$ para j suficientemente grande. Así g es un polinomio. Por tanto

$$f(z) = (z - \beta_1)^{-n_1} (z - \beta_2)^{-n_2} \dots (z - \beta_s)^{-n_s}$$

es una función racional. □

Si $f = p/q$ es una función racional, con p y q polinomios coprimos, entonces el *grado* (o *orden*) de f denotado por $\deg(f)$ es el máximo de los grados de p y q , es decir, $\deg(f) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$. Así f es constante si y sólo si $\deg(f) = 0$.

Teorema 3.33. Si $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es una función racional de grado $d > 0$, entonces f toma cada valor $x \in \Sigma$ exactamente d veces, contando multiplicidades.

Demostración. Sea $f = p/q$, donde p y q son polinomios coprimos. Primero suponga que $c = \infty$. Para $z \in \mathbb{C}$ tenemos que $f(z) = \infty$ si y sólo si $q(z) = 0$, y por el teorema fundamental del álgebra esta ecuación tiene $\deg(q)$ soluciones, contando multiplicidades. Si $\deg(p) \leq \deg(q)$ entonces esos son los únicos polos de f ; Si $\deg(p) > \deg(q)$ entonces f tiene un polo adicional de orden $\deg(p) - \deg(q)$ en ∞ . En otro caso, el número de soluciones (contando multiplicidades) de $f(z) = \infty$ es $\max(\deg(p), \deg(q))$, que es el grado de f .

Ahora suponga que $c \neq \infty$. Ya que $\deg(f) > 0$, f no es idénticamente igual a c , así existe una función racional

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c} = \frac{q(z)}{p(z) - cq(z)};$$

tal que las soluciones de $f(z) = c$ son los polos de g , y por el argumento previo hay $\deg(g)$ contando multiplicidades. Ahora q y $p - cq$ son coprimos (ya que p y q lo son), así $\deg(g) = \max(\deg(q), \deg(p - cq)) = \max(\deg(p), \deg(q)) = \deg(f)$ como se quería. □

Corolario 3.34. Sea $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ una función racional de grado $d > 0$. Entonces

- (I) f tiene solamente un número finito de puntos múltiples en Σ .
- (II) $|f^{-1}(c)| = d$ para todos excepto para un número finito puntos, y $1 \leq |f^{-1}(c)| < d$ para los puntos restantes c .

Demostración. (I) Como la derivada f' es una función racional y no es idénticamente cero, f' tiene solamente una cantidad finita de ceros en Σ ; así f tiene solamente una cantidad finita de polos, así (I) queda demostrado.

- (II) Por el Teorema 3.33, si $c \in \Sigma$ entonces hay r soluciones $z = a_1, \dots, a_r$ de $f(z) = c$ con multiplicidades k_1, \dots, k_r satisfaciendo $k_1 + \dots + k_r = d$. Así $|f^{-1}(c)| = r$ así que $1 \leq |f^{-1}(c)| \leq d$, y tenemos que $|f^{-1}(c)| = d$ a menos que $k_j \geq 2$. Ya que f tiene solamente finitos puntos múltiples, por (I) el resultado queda probado. □

Notar que esto caracteriza a $d = \deg(f)$ teóricamente como el máximo que valor que puede tomar $|f^{-1}(c)|$ cuando c toma valores en Σ .

3.2.3. Propiedades topológicas

Ahora estudiaremos las propiedades topológicas de una función meromorfa (o equivalentemente racional) como función de la esfera sobre si misma; la principal dificultad técnica surge al tratar con puntos múltiples.

Suponga que $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es meromorfa y no constante. Si $f(a) = c$ con multiplicidad k , donde $a, c \in \Sigma$, entonces decimos que f es una función k -uno-a-uno alrededor de a , si U es un abierto suficientemente pequeño de a entonces existe un abierto V de c tal que para cada $c' \in V \setminus \{c\}$ la ecuación $f(z) = c'$ tiene exactamente k soluciones en U , todas simples (Véase Figura 3.42)

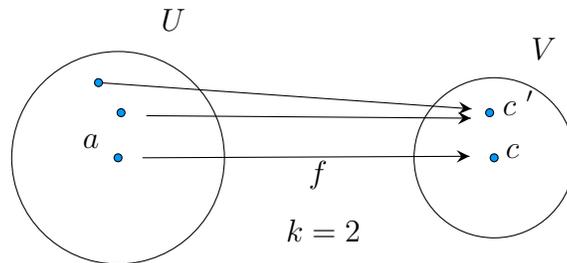


Figura 3.42.

Esto nos hace pensar que una solución de multiplicidad k en a tiene lugar cuando cerca de a hay k soluciones simples cercanas a a . Considerando las funciones $f \circ J$, $J \circ f$ y

$J \circ f \circ J$, es fácil ver que tenemos el mismo comportamiento cerca de a, c o ambas son igual a ∞ . (Para funciones de variable real, la situación es menos satisfactoria, por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ tiene una raíz triple en $x = 0$, pero es localmente uno a uno; la función $f(x) = x^2$ tiene una raíz doble en $x = 0$, pero las ecuaciones $f(x) = c'$ tiene dos soluciones cuando $c' > 0$, y ninguna cuando $c' < 0$.)

Un mapeo entre dos espacios topológicos es llamado *abierto* si la imagen de cada conjunto abierto es abierto; podemos demostrar que las funciones meromorfas no constantes son abiertas.

Si $f(a) = c$ con multiplicidad $k = 1$, entonces f mapea una vecindad $W = U \cap f^{-1}(V)$ biyectivamente a una vecindad V de c , así podemos definir la función inversa $f^{-1} : V \rightarrow W$, ya que f es abierta, f^{-1} es continua, así f siendo ella misma continua, induce un homeomorfismo de W en V . Así, en los puntos simples, f es localmente un homeomorfismo.

Un punto de multiplicidad $k > 1$ es llamado *punto de ramificación de orden $k - 1$* . Por el Corolario 3.34, el conjunto B de los puntos de ramificación de f es finito, y por cada $c \in \Sigma \setminus f(B)$ la ecuación $f(z) = c$ tiene solamente soluciones simples, así que si f tiene grado d entonces hay exactamente d puntos $a_1, \dots, a_d \in f^{-1}(\Sigma \setminus f(B)) = \Sigma \setminus f^{-1}(f(B))$ tal que $f(a_i) = c$. Cada a_j tiene una vecindad W_j que mapea de manera homeomorfa a una vecindad V_j de c , y podemos elegir estas vecindades W_j de tal manera que sean mutuamente disjuntas, así que c tiene una vecindad $V = V_1 \cap \dots \cap V_d$ tal que $f^{-1}(V)$ consiste en d conjuntos abiertos disjuntos $\tilde{W}_j = W_j \cap f^{-1}(V)$, cada uno es mapeado de manera homeomorfa en V por f (Véase Figura 3.43 para el caso de $d = 2$).

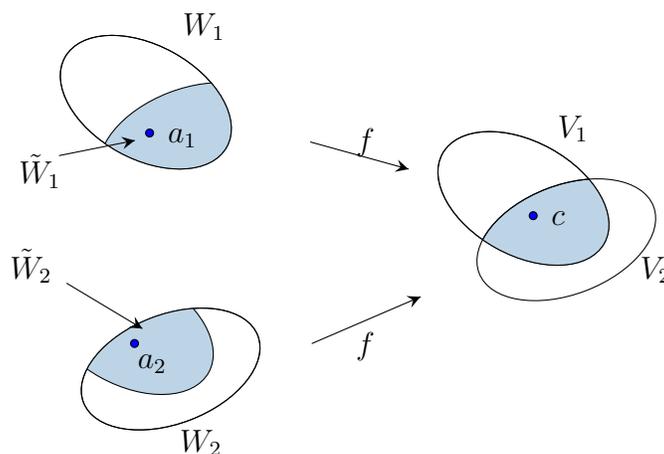


Figura 3.43.

Esto muestra que $f : \Sigma \setminus f^{-1}(f(B)) \rightarrow \Sigma \setminus f(B)$ es un ejemplo de una *función recubridora*: un mapeo continuo $f : X \rightarrow Y$ es una función recubridora si cada $y \in Y$ tiene una vecindad V tal que $f^{-1}(V)$ consiste de conjuntos abiertos disjuntos mapeados de manera

homeomorfa en V por f , en cada caso X es un *espacio recubridor* de Y . Si incluimos los puntos de ramificación, tenemos un recubrimiento ramificado $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Es útil imaginar las vecindades $\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_d$ formando capas paralelas situadas por encima de V , así que f proyecta cada \tilde{W}_j de manera homeomorfa hacia abajo en V , como en la Figura 3.44. Como c se mueve alrededor de $\Sigma \setminus f(B)$, estas vecindades \tilde{W}_j forman d hojas de la superficie $\Sigma \setminus f^{-1}(f(B))$ que se envuelve alrededor de la imagen de la esfera Σ , con d puntos a_1, \dots, a_d por encima de cada $c \in \Sigma \setminus f(B)$. En los puntos de ramificación de orden $k - 1$, tenemos k hojas que se juntan y forman un solo punto del dominio de la esfera Σ (Véase la Figura 3.45 para un ejemplo con $d = 2$).

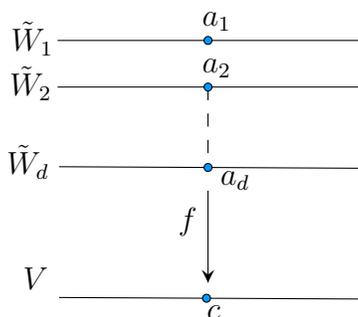
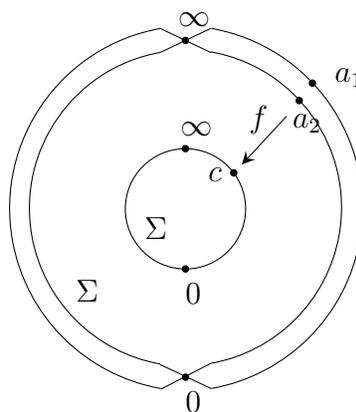


Figura 3.44.



$$f(z) = z^2, \quad B = \{0, \infty\}$$

Figura 3.45.

Ejemplos 3.35. (1) Sea $f(z) = z^n$. Tenemos que $f(0) = 0$ con multiplicidad n , y como $f'(z) \neq 0$ para $z \neq 0$, no hay otros puntos de ramificación en \mathbb{C} . Para ver si ∞ es un punto de ramificación consideremos $(J \circ f \circ J)(z) = z^n$ tiene un cero de orden n en $z = 0$, así $f(\infty) = \infty$ con multiplicidad n . Así la superficie recubridora tiene n hojas que se juntan en los puntos de ramificación de orden $n - 1$ en 0 y ∞ . (Ver figura 3.45 para $n = 2$).

(2) Sea $f(z) = z/(z^3 + 2)$, una función racional de grado 3. Como $f'(z) = (2 - 2z^3)/(z^3 + 2)^2$, hay puntos de ramificación en las raíces cúbicas de la unidad $z = 1, \omega, \omega^2$ ($\omega = e^{2\pi i/3}$). Estos puntos de ramificación están sobre los puntos $1/3, \omega/3, \omega^2/3$ en la imagen de la esfera. Podemos ver que estos puntos de ramificación tienen orden 1 probando que $f''(z) \neq 0$, o alternativamente resolviendo las ecuaciones $f(z) = 1/3, f(z) = \omega/3$ y $f(z) = \omega^2/3$. Por ejemplo la primera de las ecuaciones es equivalente a $(z - 1)^2(z + 2) = 0$, mostrando que sobre el punto $1/3$ se juntan dos de las tres hojas para dar una solución doble en $z = 1$ (esto es, un punto de ramificación de orden $2 - 1 = 1$), mientras que hay una solución simple en $z = -2$ en la tercera hoja (Véase Figura 3.46). Similarmente, sobre el punto $\omega/3$ hay una

solución doble en $z = \omega$ y una solución simple en $z = -2\omega$, mientras que sobre $\omega^2/3$ hay una solución doble en $z = w^2$ y una solución simple en $z = -2w^2$.

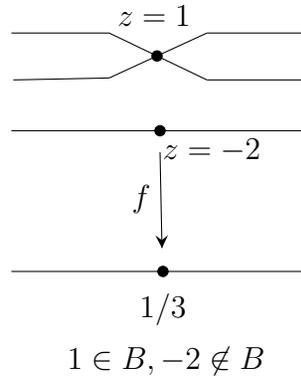


Figura 3.46.

Ahora tenemos que examinar los casos $z = \infty$ y los polos de f separadamente. La función $(f \circ J)(z) = z^2/(1 + 2z^3)$ tiene un cero doble en $z = 0$, así f tiene un punto de ramificación de orden $2 - 1 = 1$ en $z = \infty$, la otra solución de $f(z) = 0$ es simple en $z = 0$. Finalmente, los polos de f son todos simples (en las raíces cúbicas de -2), así que no hay puntos de ramificación de f .

Ejemplo 3.36. Estudiar el recubrimiento de la esfera dado por la función racional:

$$z \rightarrow f(z) = \frac{z^3}{z^2 - 1}$$

Número de hojas n (= grado), puntos singulares, explicar como esta aplicación da un modo de cortar la esfera tal que con n copias cortadas e identificadas por los cortes se obtiene otra vez la esfera.

Solución.

Los polos de f son simples, por lo que ellos no dan puntos de ramificación. También $f(1/z) = 0$ tiene un punto simple en $z = 0$, por lo que ∞ tampoco es un punto de ramificación.

Observamos los ceros de $f'(z) = \frac{z^2(-3 + z^2)}{(-1 + z)^2(1 + z)^2}$, cuyas raíces son $0, \pm\sqrt{3}$.

Examinamos la ramificación en estos puntos por separado. Notemos que

$$f''(z) = \frac{2z(3 + z^2)}{(-1 + z)^3(1 + z)^3}$$

$$f'''(z) = -\frac{6(1 + 6z^2 + z^4)}{(-1 + z)^4(1 + z)^4}$$

Observamos que $f''(0) = 0$ y $f'''(0) \neq 0$, por lo que $z = 0$ es un punto de ramificación de orden 2, es decir, tres hojas se cortan en $z = 0$.

Para los otros puntos críticos la segunda derivada no se anula, por lo que cada uno de ellos es un punto de ramificación de orden 1, es decir en cada uno de esos puntos se cortan dos hojas, como se muestra en la siguiente figura:

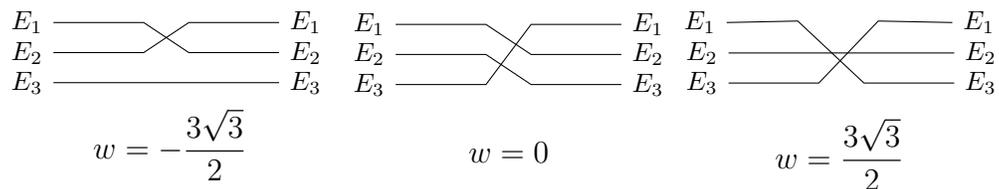


Figura 3.47.

CAPITULO 4

Al final del capítulo anterior estudiamos el recubrimiento de la esfera de Riemann mediante una función racional, se calcularon los puntos de ramificación y por tanto se determinó cuantas hojas coinciden en cada uno de estos puntos, en ese ejemplo no se dió mayor explicación sobre como determinar cuales son las hojas que coinciden en cada punto de ramificación. Este capítulo se toma como referencia a [2, §2.7] para explicar la construcción de superficies compactas de Riemann i.e. las definidas por una curva algebraica plana. La construcción se hace mediante un algoritmo que calcula el grupo de monodromía de superficie que define la curva.

4.1. Relación entre curvas algebraicas y superficies de Riemann

Consideremos una curva algebraica plana definida sobre los números complejos \mathbb{C} , es decir, consideramos el subconjunto de \mathbb{C}^2 cuyos elementos son todos los puntos (z, w) que satisfacen el polinomio bivariado en z e w :

$$f(z, w) = a_n(z)w^n + a_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + a_1(z)w + a_0(z) \quad (3)$$

donde $a_j(z), j = 0, \dots, n$ son polinomios en z . Escribimos $a_j(z) = \sum_i a_{ij}z^i$, donde los coeficientes a_{ij} son números complejos fijos. Asumiendo que $a_n(z)$ no es idénticamente cero, el grado en w de $f(z, w)$ es n . Para tener solo una cantidad finita de puntos puntos singulares asumiremos que la curva algebraica es irreducible, por lo que $f(z, w)$ no puede escribirse como producto de dos polinomios no constantes con coeficientes complejos.

Sea d el grado de $f(z, w)$ como polinomio en z y w , es decir, d es el valor más grande $i + j$ para el cual el coeficiente a_{ij} de $z^i w^j$ en $f(z, w)$ es no nulo. El comportamiento en el infinito para ambas variables z y w se estudia homogenizando $f(z, w) = 0$ tomando

$$z = \frac{Z}{U}, \quad w = \frac{W}{U},$$

y escribiendo

$$F(Z, W, U) = U^d f\left(\frac{Z}{U}, \frac{W}{U}\right) = 0.$$

Aquí $F(Z, W, U)$ es un polinomio homogéneo de grado d . Los puntos afines de la curva algebraica se consiguen haciendo $U = 1$, los puntos afines corresponde a las ternas

$(Z : W : U) = (Z/U : W/U : 1)$. Un punto en el infinito, al menos una de las dos coordenadas z o w es infinita. Como $F(Z, W, 0)$ es un polinomio homogéneo de grado d , hay lo más d puntos en el infinito.

Con el fin de construir la superficie de Riemann asociada a una curva algebraica se hace necesario tratar los puntos de ramificación de manera especial (en caso que hayan). Los finitos puntos singulares de la curva definida por $f(z, w) = 0$ satisfacen el sistema $f(z, w) = \partial_z f(z, w) = \partial_w f(z, w) = 0$. Los puntos del infinito también pueden ser singulares, tales puntos satisfacen el sistema de ecuaciones $\partial_Z F(Z, W, U) = \partial_W F(Z, W, U) = \partial_U F(Z, W, U) = 0$ (y también $F(Z, W, U) = 0$, por el teorema de Euler para funciones homogéneas).

Desingularizar la curva algebraica da como resultado una superficie de Riemann, es decir, una superficie unidimensional compleja (bidimensional sobre \mathbb{R}). Hay varias formas de desingularizar una curva, aquí usaremos parametrizaciones locales en los puntos singulares dadas por series Puiseux. Cada punto no singular en la curva algebraica corresponde a un lugar¹ en la superficie de Riemann, mientras que un punto singular en la curva algebraica puede corresponder a múltiples lugares en la superficie de Riemann. En lo que sigue, Γ se utiliza para denotar la superficie de Riemann obtenida al desingularizar y compactificar (agregando los lugares en el infinito) la curva algebraica definida por $f(z, w) = 0$. Todas las superficies de Riemann obtenidas de esta manera son conexas (ya que $f(z, w)$ es irreducible) y compactas (porque puntos en el infinito se incluyen), por lo que de ahora en adelante, las superficies de Riemann que estudiamos serán consideradas conexas y compactas.

4.2. Construcción de superficie de Riemann asociada a una curva

Consideramos una superficie X de Riemann definida por un polinomio $f(z, w) = 0$ de grado d . Definimos una *fibra* en el punto $w_0 \in \mathbb{C}$ como el conjunto $\mathbf{z}(w_0) = \{z \in \mathbb{C} : f(z, w_0) = 0\}$, sabemos que si $|z(w_0)| = d$ entonces el punto es *regular*, y si $|z(w_0)| < d$ entonces el punto es de *ramificación* o punto *múltiple*. Denotamos a los puntos de ramificación por $\{b_1, \dots, b_n\}$.

Para cada punto de ramificación b_i existen d series llamadas *Series de Puiseux*

$$Z_i(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_i (w - b_i)^{k/e_i}$$

tal que $f(z_i(w), w) = 0$, para todo $i = 1, \dots, d$ y el entero e_i es el orden de ramificación.

Para un punto regular el Teorema de la función implícita garantiza que, para cada $z_i \in \mathbf{z}(w_0)$ existe una función analítica $Z_i(w)$ tal que $f(Z_i(w), w) = 0$ para todo w en

¹Usamos el término *punto* para denotar un valor en el plano z complejo, se usará *lugar* para denotar una ubicación en la superficie de Riemann Γ , o, sin ambigüedad, un punto en la curva algebraica plana desingularizada.

una vecindad de w_0 y $Z_i(w_0) = z_i$.

Sea

- a un punto regular, $z(a)$ la fibra en a
- $Z_1(w), \dots, Z_d(w)$ las series en $w = a$.
- $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino que inicia y termina en a y encierra solamente a un punto de ramificación b_i

Continuamos analíticamente $Z_k(w)$ a lo largo de γ_i . Cuando $t \rightarrow 1$, $\gamma_i(t) \rightarrow a$ y los valores de las continuaciones $\{Z_1(\gamma_i(t)), \dots, Z_d(\gamma_i(t))\}$ se aproximan a la fibra en a , definiendo una permutación σ_i de $\{1, \dots, d\}$, así

$$Z_k(\gamma_i(t)) \rightarrow z_{\sigma_i(k)} = Z_{\sigma_i(k)}(a)$$

Entonces definimos el *grupo de monodromía* del recubrimiento como el grupo generado por σ_i y nuestro objetivo es encontrar dichos generadores.

Hacemos uso de coordenadas locales en una curva algebraica, este comportamiento local lo entendemos utilizando expansiones de Puiseux.

Las *expansiones de Puiseux* caracterizan la topología de una curva algebraica cerca de puntos de ramificación, es decir que la serie de Puiseux es nuestra forma de entender el comportamiento en los puntos singulares.

Sobre las vecindades de un punto regular $w = \alpha$, la función de coordenadas z se da localmente como una serie en orden ascendente potencias de $w - \alpha$. Cerca de un punto de ramificación, sin embargo, z es dada necesariamente por una serie con potencias fraccionarias ascendentes en $w - \alpha$. Tales series se conocen como *Series de Puiseux* (Véase §1.5). Es común elegir un parámetro local, digamos t , tal que x y y se escriben como la serie de Laurent en ese parámetro local. Es decir, si α es un punto de ramificación de orden r , entonces $t^r = x - \alpha$, e y se escribe como una serie de Laurent en t . El par $(x(t), y(t))$ se denomina una expansión de Puiseux ya que es equivalente a una serie de Puiseux.

El algoritmo para calcular la expansión de Puiseux implementado en Maple dentro del paquete `algecurves` es esencialmente el descrito por Newton en cartas para Oldenburg y Leibniz. El algoritmo se encuentra con más detalle en el Capítulo 1.

4.3. Monodromía de una curva algebraica plana

En esta sección estudiaremos un algoritmo para calcular la monodromía de una curva algebraica plana.

Una curva algebraica da lugar a un recubrimiento de la esfera. La monodromía de una curva algebraica plana no dice como las diferentes hojas del recubrimientos se pegan para formar una superficie suave.

El calculo del grupo de monodromía de un recubrimiento algebraico $z(w)$ requiere algunos ingredientes. Primero, seleccionaremos un *punto base* $w = a$ en el plano complejo w . Este punto base es un punto regular finito el recubrimiento algebraico $z(w)$, es decir, para $w = a$, existen n valores finitos de z distintos. Estos n z -valores pueden ser asignados en un orden, $\mathbf{z}(a) := (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Este ordenamiento de los n z -valores etiquetan las hojas del recubrimiento algebraico $z(w)$. Para cada punto de ramificación b elegimos un camino γ_b en el plano complejo w que inicie y termine en $w = a$ y rodee solamente el punto de ramificación $w = b$, en sentido antihorario. Después, la n -tupla (z_1, z_2, \dots, z_n) es continuada analíticamente alrededor del camino γ_b . Cuando retorna a $w = a$, una nueva n -tupla es encontrada, la cual tiene las mismas entradas que (z_1, z_2, \dots, z_n) pero reordenadas: $(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \dots, z_{\sigma(n)})$. La permutación σ_b se obtiene de este vector reordenado. La colección de las permutaciones de todos los puntos de ramificación (incluyendo cualquier punto de ramificación singular y puntos en el infinito) determinan el grupo de monodromía de la curva algebraica.

Ahora expondremos los pasos para el cálculo del grupo de monodromía de manera detallada.

Paso 1. *Puntos problemáticos de la continuación analítica.*

La curva algebraica en la ecuación (3) define un recubrimiento $z(w)$ de n hojas en el plano complejo extendido w . Para todos excepto para algunos valores finitos de w en el plano complejo extendido $\Sigma := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Un punto w corresponde a una singularidad o a *punto de ramificación* si y sólo si hay menos valores que n para $z(w)$. Un punto de ramificación de este recubrimiento de n hojas es definido como un w -valor $w = b$ donde el vector de raíces $\mathbf{z}(w)$ no retorna a su valor original cuando se continúa analíticamente $\mathbf{z}(w)$ una vez en un círculo pequeño alrededor de $w = b$.

La noción de puntos problemáticos $P = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ se introduce con el propósito de distinguir los w -valores finitos correspondientes a aquellos lugares en la curva algebraica que requieren un tratamiento especial a los fines de la continuación analítica numérica. Los puntos problemáticos contienen los w -valores que dan lugar a puntos singulares, puntos de ramificación y puntos para los cuales $z = \infty$. En resumen, los puntos problemáticos son todos los w -valores finitos para los cuales la ecuación $f(z, w) = 0$ da lugar a menos de n raíces distintas z .

El conjunto de puntos problemáticos se encuentran calculando

a) las raíces de $\Delta(w) = 0$, donde $\Delta(w)$ es el discriminante de $f(z, w)$, es

decir, la resultante de $f(z, w)$ y $f_z(z, w)/a_n(w)$, y

- b) las raíces de $a_n(w) = 0$. Si w es una raíz de la última ecuación, entonces la ecuación $f(z, w) = 0$ efectivamente decrece en grado, resultando en algunas raíces z siendo infinitas. Obsérvese que la adición de las raíces de $a_n(w) = 0$ es necesaria debido a la definición del discriminante. Puesto que los discriminantes $\Delta(w)$ y $a_n(w)$ son polinomios en w , el número de puntos problemáticos es finito. Los puntos discriminantes son puntos de ramificación o puntos singulares. Los puntos singulares pueden tener una monodromía no trivial, en cuyo caso también son puntos de ramificación. En los algoritmos, los puntos problemáticos son la unión de raíces de $a_n(w) = 0$ o $\Delta(w) = 0$

Paso 2. Rodeando los puntos problemáticos.

Con el fin de calcular las monodromías del recubrimiento $z(w)$, el vector $z(w)$ se continúa analíticamente a lo largo de caminos que rodean los puntos problemáticos. Aunque la monodromía de las raíces de $a(w)$ y ciertos puntos singulares es trivial, los caminos para la continuación analítica de $z(w)$ también se mantienen lejos de estos puntos para evitar problemas numéricos. Para simplificar el control de la aproximación numérica, la trayectoria se mantiene a una distancia (finita) $r(b_i)$ de cada punto de problemático b_j . Así, a cada punto de problemático b_j , asociamos un radio $r(b_i)$ como sigue:

$$r(b_i) = \frac{2}{5} \rho(b_i, \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \setminus \{b_i\}), \quad (4)$$

donde ρ denota distancia. En otras palabras, $r(b_i)$ es hasta dos quintos de la distancia de b_i al próximo punto problemático más cercano. La relación $2/5$ es algo arbitraria; pueden usarse otros números entre 0 y $1/2$. Importante es que los círculos $C(b_i, r(b_i))$ no se cortan entre sí.

Paso 3. La elección del punto base.

Se elige un punto base a tal que $w = a$ está a una distancia $r(b_s)$ alejada del punto problemático más cercano b_s , y tal que la parte real de a sea menor que las partes reales de cualquiera de los b_i .

Por la última opción, los argumentos de $b_i - a$ están entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Para las curvas algebraicas planas definidas por la ecuación (3) con coeficientes reales, el punto base se elige para ser real.

Paso 4. Etiquetando las hojas.

En el punto base $w = a$ hay n valores de z finitos distintos. Estos se determinan numéricamente como las soluciones de $f(z, a) = 0$. Estos n valores de z son asignados en un orden (z_1, z_2, \dots, z_n) , que se denomina $\mathbf{z}(a)$. Asignando tal orden a estos z -valores, etiquetamos las hojas del recubrimiento $z(w)$: la

hoja uno es la hoja conteniendo z_1 , hoja 2 es la hoja que contiene z_2 , y así sucesivamente. Obsérvese que, debido a que $w = a$ está a una distancia $r(b_s)$ alejada de los puntos de problemáticos b_s , los valores (z_1, z_2, \dots, z_n) son todos diferentes.

Paso 5. *Ordenando los puntos problemáticos de la continuación analítica.*

Debemos establecer un orden en los puntos problemáticos. Optamos por ordenar estos puntos de acuerdo con su argumento con respecto al punto base: si $\arg(b_i - a) < \arg(b_j - a)$, entonces b_i precede b_j en el ordenamiento, donde $\arg(\cdot)$ denota la función argumento. Si $\arg(b_i - a) = \arg(b_j - a)$, el b_i precede b_j en el ordenamiento si $|b_i - a| < |b_j - a|$. Este ordenamiento resulta en una m -tupla ordenada de puntos problemáticos: (b_1, b_2, \dots, b_m) . La misma notación se utiliza para los puntos problemáticos ordenados como para los elementos del conjunto no ordenado.

Paso 6. *Elección de los caminos.*

A continuación, elegimos caminos para la continuación analítica. Estos caminos se componen de segmentos de línea y semicírculos. El camino más simple $L(b_i)$ alrededor de b_i consiste en un segmento de línea de a a $b_i - r(b_i)$. Esto es seguido por el círculo $C(b_i, r(b_i))$, comenzando en $b_i - r(b_i)$. Sucesivamente, un segmento de línea se sigue de $b_i - r(b_i)$, de nuevo a a . Sin embargo, si el camino intersecta a uno de los círculos $C(b_j, r(b_j))$, $j \neq i$, modificamos la trayectoria a otro que es homotópico a él. Si un camino intersecta uno de los círculos $C(b_j, r(b_j))$, $j \neq i$, esto indica que se acerca al problema punto b_j . Como consecuencia, las hojas del recubrimiento no serían bien separados a lo largo del camino, lo que complica la continuación analítica numérica. Por lo tanto, deseamos evitar esto. La situación puede ser resuelta como se indica en la Figura 4.48 el recorrido toma un desvío a lo largo de un semicírculo alrededor de b_j . Si este semicírculo va por encima o por debajo de b_j depende de las posiciones relativas de a , b_i y b_j . El semicírculo se elige de modo que la nueva trayectoria es deformable a $L(b_i)$, sin cruzar ningún punto problemático de la continuación analítica.

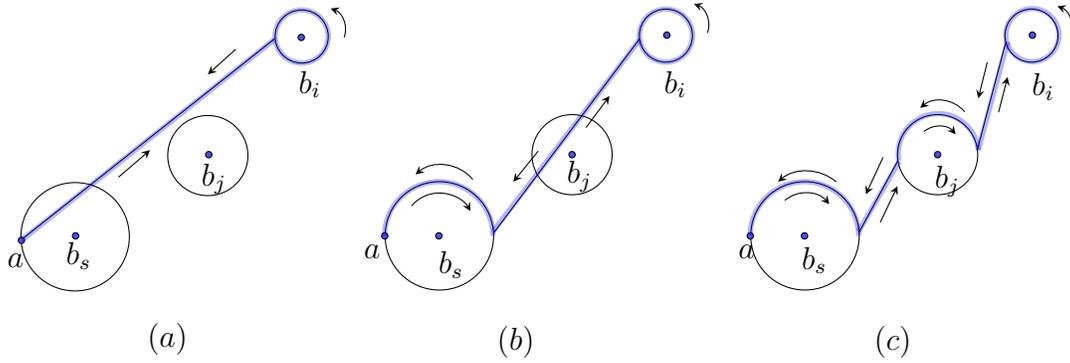


Figura 4.48. Elegir la trayectoria de $w = a$ a $w = b_i$. La trayectoria alrededor de b_i se indica en la línea azul. (a) El camino más simple intersecta $C(b_s, r(b_s))$. (b) Esto se remedia por un nuevo camino homotópico al anterior. El nuevo camino se cruza $C(b_j, r(b_j))$. (c) Esto es remediado por otro camino, que es homotópico a ambos caminos anteriores

Este proceso se itera, hasta que se obtiene una trayectoria que permanece al menos $r(b_j)$ fuera de b_j , para $j = 1, 2, \dots, m$. La iteración de este proceso no es suficiente para asegurar que el camino elegido es homotópico a la recta desde el punto base a a $b_i - r(b_i)$. Para asegurarse de que una ruta correcta es elegida, la implementación explícitamente comprueba la presencia de los puntos problemáticos entre el camino elegido y el camino recto. Si tales puntos están presentes, el camino se modifica para ir alrededor de ellos, después de lo cual el procedimiento se vuelve a iterar.

Paso 7. *Continuación analítica numérica.*

Considere dos puntos no problemáticos $w = w_1$ y $w = w_2$. A w_1 le corresponde una n -tupla ordenada $\mathbf{z}(w_1)$. Cuando se sigue un camino en el plano complejo w de w_1 a w_2 , las entradas de $\mathbf{z}(w_1)$ sigue caminos en el cubrimiento de las raíces de $f(z, w_2) = 0$, lo que da lugar a una n -tupla $\mathbf{z}(w_2)$, cuyo orden es inducido por el ordenamiento de $\mathbf{z}(w_1)$. Si w_1 y w_2 están relativamente cerca uno de otro de modo que el camino entre ellos se desvía poco de un segmento de línea recta y siempre y cuando no pasa por o cerca de cualquier punto de problemático, entonces

$$\mathbf{z}(w_2) = \mathbf{z}(w_1) + \mathbf{z}'(w_1)(w_2 - w_1) + \vartheta(|w_2 - w_1|^2), \quad (5)$$

y el último término es pequeño cuando w_2 y w_1 están lo suficientemente cerca (para hacer este preciso debe unirse a la segunda derivada de $\mathbf{z}(w)$ para encontrar una cota para $\vartheta(|w_2 - w_1|^2)$). Aquí $\mathbf{z}(w_1)$ es la n -tupla de derivadas de $\mathbf{z}(w)$ en w_1 . Usando la diferenciación implícita tenemos

$$\mathbf{z}'(w_1) = \left(\frac{f_w(z_1(w), w_1)}{f_z(z_1(w), w_1)}, \frac{f_w(z_2(w), w_1)}{f_z(z_2(w), w_1)}, \dots, \frac{f_w(z_n(w), w_1)}{f_z(z_n(w), w_1)} \right) \quad (6)$$

donde un subíndice w o z denota una diferenciación parcial y $z_i(w_1)$, $i = 1, \dots, n$ denota la i -ésima componente de $\mathbf{z}(w_1)$. Bajo las condiciones anteriores, los dos primeros términos de (5) da una buena aproximación a $z(w_2)$. Tener las entradas desordenadas de $\mathbf{z}(w_2)$ a nuestra disposición y compararlas con la aproximación ordenada $\mathbf{z}(w_1) + \mathbf{z}'(w_1)(w_2 - w_1)$ nos permite determinar el ordenamiento de estas entradas, dando como resultado la n -tupla ordenada $z(w_2)$.

Claramente, para evitar hacer coincidir las entradas de $\mathbf{z}(w_2)$ con las entradas incorrectas de la aproximación ordenada, el tamaño numéricamente aceptable de $|w_2 - w_1|$ depende de las diferencias absolutas entre los componentes de $\mathbf{z}(w_2)$.

Si $|w_2 - w_1|$ no es pequeña, o si el camino que los conecta se desvía significativamente a partir de un segmento de línea recta, entonces una continuación analítica de $\mathbf{z}(w_1)$ a $\mathbf{z}(w_2)$ se obtiene iterando el proceso anterior a lo largo de segmentos suficientemente pequeños de la trayectoria, de manera que satisfagan las condiciones necesarias. Tenga en cuenta que $\mathbf{z}(w_2)$ depende de la trayectoria elegida de w_1 a w_2 .

Para simplificar la notación, esta dependencia no se hace explícita.

Paso 8. *El grupo de monodromía.*

Para el conjunto $\{b_1, \dots, b_m\}$ de puntos de ramificación, considere las trayectorias γ_k que generan el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{b_1, \dots, b_m\})$ que satisfacen la relación $\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_m = \text{id}$. Después de la continuación analítica de $\mathbf{z}(a)$ a lo largo de la trayectoria γ_k alrededor de b_k , las entradas de $z(a)$ se recuperan, pero son reordenados por la permutación σ_{b_k} :

$$\begin{aligned} \Pi(b_k)\mathbf{z}(a) &= \Pi(b_k)(z_1(a), z_2(a), \dots, z_n(a)) \\ &= (z_{\sigma_k(1)}, z_{\sigma_k(2)}, \dots, z_{\sigma_k(n)}) \end{aligned} \tag{7}$$

Donde $\Pi(b_k)$ denota la acción de la continuación analítica a lo largo de γ_k . La colección de todos los σ_{b_k} genera el grupo de monodromía del recubrimiento, el cual es representado por un subgrupo de S_n , el grupo de permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$. Note que esta representación depende de la elección de la etiquetas de los z -valores en $w = a$, así esto es único solamente bajo la conjugación.

A pesar de la naturaleza numérica de la continuación analítica de $\mathbf{z}(w)$, es posible identificar $\mathbf{z}(w)$ únicamente después de un ciclo completo alrededor de un punto, ya que sólo hay un número finito de componentes de $\mathbf{z}(w)$. Así, la monodromía se obtiene exactamente.

Paso 9. *Infinito.*

El punto $w = \infty$ también podría ser un punto de ramificación. La correspondiente permutación σ_∞ se calcula rodeando todos los puntos problemáticos en

sentido horario. En la base del recubrimiento, esto equivale a rodear el punto en el infinito en sentido contrario a las agujas del reloj. Si esta permutación no es la identidad, entonces el punto $w = \infty$ es un punto de ramificación. De lo contrario no lo es.

Una vez encontrada esta permutación, el programa realiza una de muchas comprobaciones para verificar que

$$\sigma_\infty \circ \sigma_{b_m} \circ \sigma_{b_{m-1}} \circ \cdots \circ \sigma_{b_2} \circ \sigma_{b_1} = 1. \quad (8)$$

Dado que un camino cerrado en el plano w complejo extendido que rodea a todos los puntos de ramificación es homotópico a un punto, la continuación analítica a lo largo del camino no permuta las entradas de $\mathbf{z}(a)$. Alternativamente, podríamos usar (8) para calcular σ_∞ , pero esto elimina una posible comprobación. En lo que sigue, siempre se supone que la lista b_1, b_2, \dots, b_m incluye $w = \infty$ si este es un punto de ramificación. En este caso, σ_∞ también se supone que se incluyen en la lista de permutaciones $\sigma_{b_1}, \dots, \sigma_{b_n}$.

4.4. Superficie de Riemann de $f(z) = \frac{z^3}{z^2 - 1}$

Ahora retomamos el Ejemplo 3.36 para encontrar su grupo de monodromía.

Ejemplo 4.37. Para construir la Superficie de Riemann se hace necesario conocer cuáles de las hojas coinciden en cada punto de ramificación, para representar cada una de las hojas ocupamos series de Puiseux y las ordenamos según el punto base elegido $a = -3.63730669589$, luego utilizamos aproximación numérica para continuar analíticamente caminos alrededor de los puntos de ramificación y así calcular el grupo de monodromía (ver [2, §2.7]).

Analizamos el punto $w = 0$, calculamos la series de Puiseux alrededor de dicho punto obteniendo:

$$\begin{aligned} z_{(1)}(w) = & \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w^{1/3} + \frac{w}{3} + \left(\frac{1}{18} - \frac{i}{6\sqrt{3}}\right)w^{5/3} + \left(-\frac{1}{81} - \frac{i}{27\sqrt{3}}\right)w^{7/3} + \left(\frac{1}{729} - \frac{i}{243\sqrt{3}}\right)w^{11/3} \\ & + \left(-\frac{7}{13122} - \frac{7i}{4374\sqrt{3}}\right)w^{13/3} + \left(\frac{11}{118098} - \frac{11i}{39366\sqrt{3}}\right)w^{17/3} + \dots \end{aligned} \quad (I)$$

$$z_{(2)}(w) = w^{1/3} + \frac{w}{3} - \frac{w^{5/3}}{9} + \frac{2w^{7/3}}{81} - \frac{2w^{11/3}}{729} + \frac{7w^{13/3}}{6561} - \frac{11w^{17/3}}{59049} + \frac{130w^{19/3}}{1594323} + \dots \quad (II)$$

$$\begin{aligned} z_{(3)}(w) = & \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w^{1/3} + \frac{w}{3} + \left(\frac{1}{18} + \frac{i}{6\sqrt{3}}\right)w^{5/3} + \left(-\frac{1}{81} + \frac{i}{27\sqrt{3}}\right)w^{7/3} + \left(\frac{1}{729} + \frac{i}{243\sqrt{3}}\right)w^{11/3} \\ & + \left(-\frac{7}{13122} + \frac{7i}{4374\sqrt{3}}\right)w^{13/3} + \left(\frac{11}{118098} + \frac{11i}{39366\sqrt{3}}\right)w^{17/3} + \dots \end{aligned} \quad (III)$$

donde el subíndice se elige de acuerdo al punto base (como se explica en el paso 4), estos subíndices etiquetan cada copia de \mathbb{C} para calcular la permutación.

Con estas series y el camino $w_0 : [-0.4999, 0.4999] \rightarrow \mathbb{C} : \theta \mapsto 1.039230485e^{2\pi\theta i}$ que recorre a $w = f(0) = 0$ usamos aproximación numérica para evaluar el vector $\mathbf{z}(w) = (z_{(1)}(w), z_{(2)}(w), z_{(3)}(w))$:

$$\begin{pmatrix} 0.759985 + 0.0000832066i & -0.899639 + 0.746728i & -0.899576 - 0.747464i \\ -0.899315 + 0.750415i & -0.899885 - 0.74379i & 0.759986 - 0.00074886i \end{pmatrix}$$

La primera fila es $(a_1, a_2, a_3) := \mathbf{z}(w_0(-0.4999))$ y la segunda fila es $(b_1, b_2, b_3) := \mathbf{z}(w_0(0.4999))$

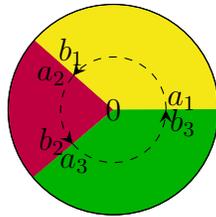
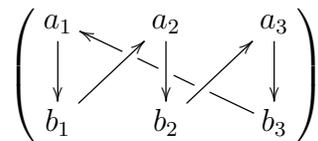


Figura 4.49.

La figura anterior ilustra la continuación del w_0 alrededor de $z = 0$, se observa que

$$a_1 \longrightarrow b_1 \approx a_2 \longrightarrow b_2 \approx a_3 \longrightarrow b_3 \approx a_1,$$

que da la permutación (123), donde la aproximación es hasta las milésimas.



Para calcular la permutación en el punto $w = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ procedemos de manera similar, solamente que la serie se calcula con un traslación al rededor del punto $w = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ y etiquetamos las hojas con respecto al punto base -3.63730669589 , obteniendo las series.

$$z_{(1)}(w) = \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w}}{3^{3/4}} + \frac{14}{27}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w\right) + \frac{47\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w\right)^{3/2}}{243 \times 3^{1/4}} - \frac{20\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w\right)^2}{2187\sqrt{3}} + \dots \quad (\text{I})$$

$$z_{(2)}(w) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{27}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - w\right) + \frac{40\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w\right)^2}{2187\sqrt{3}} - \frac{1648\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w\right)^3}{531441} + \dots \quad (\text{II})$$

$$z_{(3)}(w) = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w}}{3^{3/4}} + \frac{14}{27}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w\right) - \frac{47\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w\right)^{3/2}}{243 \times 3^{1/4}} - \frac{20\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + w\right)^2}{2187\sqrt{3}} + \dots \quad (\text{III})$$

Con estas series y el camino $w_1 : [-0.4999, 0.4999] \rightarrow \mathbb{C} : \theta \mapsto \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1.039230485e^{2\pi\theta i}$

que rodea a $w = f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ usamos aproximación numérica para evaluar el vector $\mathbf{z}(w) = (z_{(1)}(w), z_{(2)}(w), z_{(3)}(w))$:

$$\begin{pmatrix} 1.18513 - 0.720378i & -0.811207 + 0.0000489231i & 1.18492 + 0.719676i \\ 1.18595 + 0.72319i & -0.81121 - 0.000440297i & 1.18412 - 0.716873i \end{pmatrix}$$

La primera fila es $(a_1, a_2, a_3) := \mathbf{z}(w_1(-0.4999))$ y la segunda fila es $(b_1, b_2, b_3) := \mathbf{z}(w_1(0.4999))$

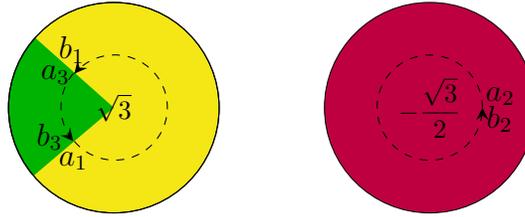


Figura 4.50.

La figura anterior ilustra la continuación del w_1 alrededor de $z = \sqrt{3}$, se observa que

$$a_1 \longrightarrow b_1 \approx a_3 \longrightarrow b_3 \approx a_1$$

que da la permutación (13), donde la aproximación es hasta las milésimas.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & a_2 & & a_3 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ b_1 & & b_2 & & b_3 \end{pmatrix}$$

Por último encontramos la permutación en el punto $w = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

calculamos las series trasladadas y etiquetamos las hojas con respecto al punto base, así obtenemos las series

$$z_{(1)}(w) = -\sqrt{3} + \frac{2i\sqrt{(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})}}{3^{3/4}} + \frac{14(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})}{27} - \frac{47i(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})^{3/2}}{243 \times 3^{1/4}} + \frac{20(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})^2}{2187\sqrt{3}} + \dots \quad (\text{I})$$

$$z_{(2)}(w) = -\sqrt{3} - \frac{2i\sqrt{(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})}}{3^{3/4}} + \frac{14(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})}{27} + \frac{47i(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})^{3/2}}{243 \times 3^{1/4}} + \frac{20(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})^2}{2187\sqrt{3}} + \dots \quad (\text{II})$$

$$z_{(3)}(w) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})}{27} - \frac{40(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})^2}{2187\sqrt{3}} - \frac{1648(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})^3}{531441} - \frac{23264(w + \frac{3\sqrt{3}}{2})^4}{14348907\sqrt{3}} + \dots \quad (\text{III})$$

Con el camino $w_2 : [-0.4999, 0.4999] \rightarrow \mathbb{C} : \theta \mapsto \frac{-3\sqrt{3}}{2} + 1.039230485e^{2\pi\theta i}$ que rodea a $w = f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ y las series de arriba usamos aproximación numérica para evaluar el vector $\mathbf{z}(w) = (z_{(1)}(w), z_{(2)}(w), z_{(3)}(w))$:

$$\begin{pmatrix} -1.22915 + 0.0000748454i & -3.30401 - 0.000742586i & 0.895851 + 0.0000147725i \\ -3.30399 + 0.00668324i & -1.22915 - 0.000673611i & 0.895851 - 0.000132952i \end{pmatrix}$$

La primera fila es $(a_1, a_2, a_3) := \mathbf{z}(w_2(-0.4999))$ y la segunda fila es $(b_1, b_2, b_3) := \mathbf{z}(w_2(0.4999))$

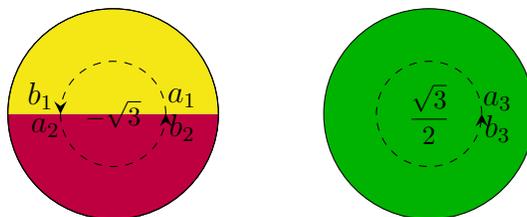


Figura 4.51.

La figura anterior ilustra la continuación del w_2 alrededor de $z = \sqrt{3}$, se observa que

$$a_1 \longrightarrow b_1 \approx a_2 \longrightarrow b_2 \approx a_1$$

que da la permutación (12), donde la aproximación es hasta las milésimas.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & a_2 & & a_3 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \updownarrow \\ b_1 & & b_2 & & b_3 \end{pmatrix}$$

Todo lo anterior se puede hacer de manera automática, usando un algoritmo implementado en Maple con las instrucciones:

```
# Cargar el paquete
with(algcurves);

# Definir la curva algebraica
p := (z^2-1)*w-z^3:

# Singularidades de p
singularities(p, w, z);

# Monodromía de p
m := monodromy(p, w, z, 'showpaths')
```

La variable m es un vector con tres componentes. La primera es el punto base, donde comienza el camino cerrado que se usará para calcular el grupo de monodromía.

```
m[1];
-3.30413859787021
```

La segunda es $z(m[1])$

```
m[2];
[-3.30413859787021,
-1.22893230529440,
0.895764207274609]
```

La tercera son las imágenes $-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3\sqrt{3}}{2}$ en la esfera de los puntos de ramificación $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ con sus respectivas permutaciones

```
m[3];
[
[-2.59807621135, [[1, 2]]],
[0., [[1, 2, 3]]],
[2.59807621135, [[1, 3]]]]
]
```

Con estas permutaciones queda determinada la superficie de Riemann y se puede determinar explícitamente cuáles copias de \mathbb{C} coinciden en cada punto, como se muestra en la siguiente figura:

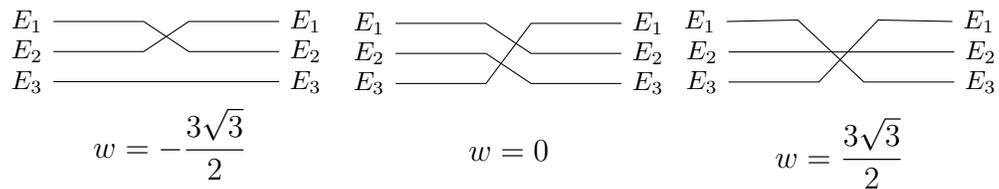


Figura 4.52.

El argumento `showpaths` muestra el camino usado para calcular el grupo de monodromía.

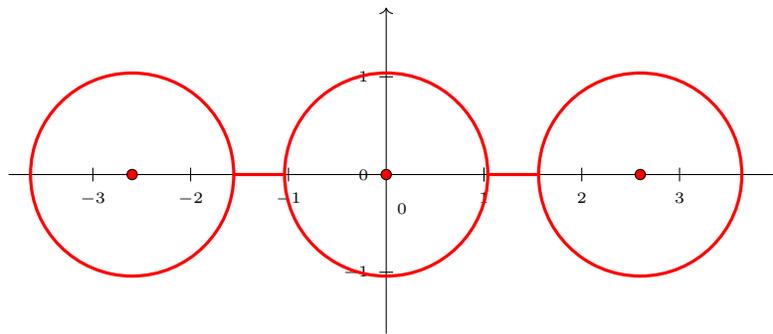


Figura 4.53.

Siguiendo el procedimiento que describe la figura 4.54 se comprueba que es posible identificar las tres copias (“cortando” y “pegando” adecuadamente los bordes) para obtener de nuevo una esfera.

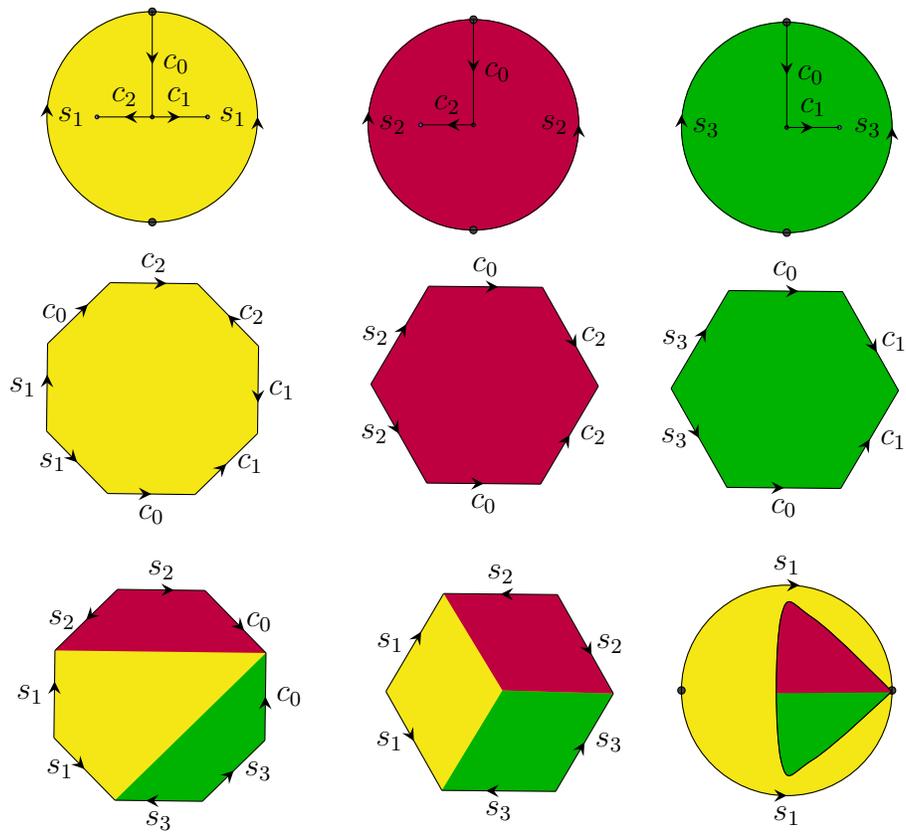


Figura 4.54. Recubrimiento de la esfera inducido por la función racional f .

Lo anterior da una comprobación intuitiva que el género de la superficie de Riemann definida por la función racional $f(z) = \frac{z^3}{z^2 - 1}$ es cero, es decir, es una esfera.

Conclusiones

Luego de estudiar la teoría que ha permitido desarrollar esta investigación concluimos que se han logrado los objetivos propuestos al inicio, pues se realizó un estudio introductorio a las superficies de Riemann desde una perspectiva intuitiva y geométrica, además se ha aplicado resultados clásicos y modernos para explicar la construcción de superficies, a saber: continuación analítica y el teorema de monodromía.

Usando continuación analítica se explicó cómo construir la superficies de Riemann de las funciones multivaluadas $\log z$ y \sqrt{z} , para representarlas por una función univaluada sobre el dominio adecuado dando como resultado la superficie de Riemann.

Se explicó la relación entre una curva algebraica y la superficie de Riemann, y se retomó la perspectiva algorítmica que permite caracterizar o describir una superficie para este caso. Esta caracterización se hace mediante el grupo de monodromía, todo esto se ilustra en un ejemplo que se ha explicado con total detalle donde se muestra, salvo homeomorfismos, el recubrimiento de la esfera mediante una función racional.

Referencias

- [1] S. Basu, R. Pollack, and M.F. Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [2] A.I. Bobenko and C. Klein. *Computational Approach to Riemann Surfaces*. Springer, 2011.
- [3] Julia Cufí. Superficies de Riemann. *Publicacions de la Secció de matemàtiques*, 1976.
- [4] S.E. Goodman. *Beginning Topology*. Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2005.
- [5] G.A. Jones and D. Singerman. *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*. Cambridge University Press, 1987.
- [6] N. J. Willis, A. K. Didier, and K. M. Sonnanburg. How to Compute a Puiseux Expansion. *ArXiv e-prints*, July 2008.