Modelli di occupazione

Carlo Sempi
Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"
Università del Salento, Lecce

Il termine "occupazione" del titolo non si riferisce, naturalmente, a quella della quale parlano i politici e alla quale aspirano i giovani che cercano un lavoro. Cosa si intenda apparirà chiaro piuttosto dalle considerazioni che seguono.

Consideriamo il caso piú semplice di modello d'occupazione: si hanno N urne nelle quali vogliamo disporre n palline con $n \leq N$ con la sola condizione che ogni urna possa contenere al piú una sola pallina; supporremo, inoltre che le urne siano numerate da 1 a N e che pure le palline siano numerate da 1 a n. Il risultato dell'assegnazione delle n palline nelle N urne può essere rappresentato mediante la n–pla $(x_1, \dots, x_n)$, nella quale x_k indica il numero dell'urna nella quale è stata collocata la k–esima pallina. Ovviamente, si deve imporre la condizione che le componenti siano diverse tra loro, $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Sia Ω l'insieme di tali n–ple; formalmente

$$\begin{aligned} \Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \quad &: \quad x_i \in \{1, \dots, N\}, \\ x_i \neq x_j \qquad &(i \neq j)\} . \end{aligned}$$

Quante sono le n–ple di Ω? o, equivalentemente, qual è la numerosità (Ω) di Ω? La risposta è facile e è data da

$$N\,(N-1)\dots(N-n+1)\,,$$

perché la prima pallina può essere collocata in una qualsiasi delle N urne, e, perciò x_1 può assumere N valori, la seconda pallina in una qualsiasi delle rimanenti $N-1$ urne e, quindi per x_2 sono possibili $N-1$ valori, e cosí via. Il nuimero appena trovato si può scrivere in maniera leggermente diversa

$$\begin{aligned} D_{N,n} &= N\,(N-1)\dots(N-n+1) \\ &= \frac{N!}{(N-n)!}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

ove

$$k! = 1 \cdot 2 \dots (k-1) \cdot k$$

è il numero delle *permutazioni semplici* di k oggetti; alla quantità $D_{N,n}$ dell'eq. (1) si dà il nome di numero delle *disposizioni semplici* di N oggetti a n a n.

Abbiamo in definitiva trovato che le n palline numerate possono essere collocate nelle N urne in $D_{N,n}$ modi differenti, se vale la condizione che ogni urna possa contenere al piú una pallina.

Possiamo pensare che non esista la restrizione che ogni urna possa contenere una sola pallina. In questo caso, il risultato dell'assegnazione delle n palline tra le N urne sarà rappresentato ancora dall'n–pla $(x_1, \dots, x_n)$, ma senza la restrizione $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$; di conseguenza, ora avremo

$$\Omega_1 = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{1, \dots, N\}\}\ ,$$

insieme la numerosità del quale è

$$N(\Omega_1) = N^n \tag{2}$$

perché vi sono ora N possibili valori per ognuna delle n componenti del vettore $(x_1, \dots, x_n)$.

Supponiamo ora che le palline siano *indistinguibili*, vale a dire che esse non sono piú numerate da 1 a n; sappiamo solo che sono n. Domandiamoci come occorra modificare le considerazioni svolte sopra.

Poiché le palline hanno perso la loro individualità, non siamo in grado di distinguere due collocazioni nelle quali semplicemente si scambiano le palline tra le urne occupate; e poiché le n palline si possono permutare in $n!$ maniere differenti, le configurazioni possibili sono ora

$$\frac{D_{N,n}}{n!} = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\,. \tag{3}$$

Questo numero si indica mediante il *coefficiente binomiale*

$$\binom{N}{n} \tag{4}$$

che dà il numero delle *combinazioni semplici* di N a n a n, che è pure il numero di modi nei quali si possono scegliere n oggetti tra a N possibili; in inglese il coefficiente binomiale (4) è chiamato, assai efficacemente "N choose n".

Prima di procedere converrà introdurre le *combinazioni con ripetizione*.

Si supponga di estrarre palline da un'urna; le estrazioni possono avvenire in modi differenti. Dopo ogni estrazione di una pallina dall'urna, questa può essere reintrodotta, oppure no, nell'urna; parleremo allora, rispettivamente, di un'estrazione con o senza restituzione. Le palline potranno essere estratte in sequenza, in modo da poter parlare di una prima, di una seconda,... pallina estratta. Oppure possiamo pensare che piú palline possano essere estratte contemporaneamente dall'urna; si parlerà allora di un'estrazione *in blocco*.

Mentre è facile vedere come si realizzi un'estrazione in blocco nel caso dell'estrazione senza restituzione, è piú delicato raffigurare un'estrazione in blocco con restituzione. Si può pensare di realizzare un'estrazione di questo tipo estraendo le palline ad una ad una, senza tuttavia registrare in quale ordine le palline siano state estratte.

Il risultato di un'estrazione sarà rappresentato da n–ple $(x_1, \dots, x_n)$ con $x_i = 1, \dots, N$, n–ple che si possono pensare ordinate in modo che risulti $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ (tale ordinamento è solo opportuno, ma non necessario; altri sono possibili); la condizione $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ sarà, o no, richiesta, secondo che si tratti di un'estrazione senza o con restituzione. Formalmente, posto

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}$$

ci si domanda, innanzi tutto, quante siano le n–ple che compongono Ω. In altre parole vogliamo conoscere la numerosità dell'insieme

$$\begin{aligned} A(k,n) \qquad &:= \{(j_1, \dots, j_n) : j_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ & \quad j \in \{1, \dots, n\} \ \sum_{i=1}^{n} j_i = k\}\,, \end{aligned}$$

che denoteremo con $V(k,n)$.

Nell'estrazione senza restituzione di palline da un'urna, è $N(\Omega) = \binom{N}{n}$ che è, come abbiamo visto sopra, il numero delle combinazioni semplici di N oggetti a n a n. Se, invece, l'estrazione è con restituzione, è

$$N(\Omega) = \binom{N+n-1}{n}\,. \tag{5}$$

È questo il numero delle *combinazioni con ripetizione di N oggetti a n a n*. La dimostrazione si svolge per induzione su n. Se $n = 1$ è, evidentemente, $N(\Omega) = N = \binom{N}{1}$. Si supponga ora che, per ogni $k \leq N$, sia

$$N(\Omega) = V(k,n) := \binom{k+n-1}{n}\,;$$

si vuole dimostrare che il risultato è valido anche per $n+1$. Ordinate le $(n+1)$–ple nel modo indicato sopra, si osservi che vi sono $V(N,n)$ $(n+1)$–ple con il primo numero eguale a 1, ve ne sono $V(N-1,n)$ con il primo numero eguale a 2 e cosí via. Vi saranno, infine, $V(1,n)$ $(n+1)$–ple con la prima componente eguale a N. Pertanto

$$\begin{aligned} V(N, n+1) &= V(N,n) + V(N-1,n) + \\ & \quad \cdots + V(1,n) \\ &= \sum_{i=1}^{N} V(i,n)\,; \end{aligned}$$

ma, ricorrendo al triangolo di Pascal o di Tartaglia, che dir si voglia,

$$\begin{aligned} V(k,n) &= \binom{k+n-1}{n} \\ &= \binom{k+n}{n+1} - \binom{k+n-1}{n+1}\,, \end{aligned}$$

sicché

$$
\begin{aligned}
V(N, n+1) = \binom{N+n}{n+1} - \binom{N+n-1}{n+1} \\
+ \binom{N-1+n}{n+1} \\
- \binom{N+n-2}{n+1} + \cdots - \binom{n+1}{n+1} + \binom{n}{n} \\
= \binom{N+n}{n+1},
\end{aligned}
$$

che coincide con la (5) quando a N si sostituisca $N+1$.

Cosí, per esempio, la probabilità dell'evento B_j "nell'estrazione di un campione non ordinato (o a blocchi) di n palline da un'urna che ne contiene N delle quali b sono bianche e c colorate, si estraggono esattamente j palline bianche" è

$$
\mathbb{P}(B_j) = \frac{\binom{b+j-1}{j}\binom{c+n-j-1}{n-j}}{\binom{N+n-1}{n}}.
$$

Esempio 1. Si pensi ora di rovesciare il punto di vista, e, anziché estrarre palline da un'urna, si disponga di N urne e di n palline, identiche tra loro, da collocare nelle N urne, senza che vi siano limitazioni al numero di palline che si possono collocare in ogni urna. Il numero di maniere nelle quali ciò si può effettuare è

$$
\binom{N+n-1}{n} \tag{6}
$$

il risultato che si è già ottenuto sopra. ■

Esempio 2. Un albergo con N piani e con ricettività illimitata si trova a dover distribuire n clienti tra gli N piani; si tratta, evidentemente, dello stesso dello stesso problema dell'esempio precedente, con l'identificazione "piano=urna" e "cliente=pallina". Il numero dei modi di sistemare i clienti è, dunque, ancora quello dato dalla (6). ■

Buona parte dei libri di probabilità, a incominciare da quello fondamentale di Feller [4], chiama la (6) *statistica di Bose–Einstein* e la (4) *statistica di Fermi–Dirac*, perché imporre che ogni urna possa contenere al piú una sola pallina equivale all'introduzione del *principio d'esclusione* di Pauli.

Esempio 3. Se n particelle indistinguibili possono occupare N stati energetici, senza che vi sia una limitazione al numero di palline che possono occupare uno stato, i modi di occupazione sono nuovamente dati dalla (6). ■

Sinora abbiamo solo parlato di quanti siano i possibili modi di sistemare n palline, rispettivamente particelle, in N urne, rispettivamente stati, giungendo alla (6); come si direbbe in un corso di probabilità, abbiamo solo calcolato la numerosità dello spazio dei campioni Ω; si tratta ora di introdurre in questo spazio una probabilità. La soluzione piú semplice, ma si tratta di un passo logico, per niente scontato, è di adottare la distribuzione uniforme su tutti i modi contati sopra, cioè sui punti di Ω: ognuno di questi avrà, cosí, probabilità

$$
\frac{1}{\binom{N+n-1}{n}}. \tag{7}
$$

La (7) porta a risultati che possono sembrare paradossali. Come esempio, si consideri la distribuzione, già incontrata sopra, di n palline da collocare in N urne; allora l'assegnazione

$$
(n, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1})
$$

nella quale tutte le palline sono state collocate nell'urna 1 ha la stessa probabilità, data dalla (7), dell'assegnazione

$$
(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ urne}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-n \text{ urne}})
$$

anche se, a prima vista, sembrerebbe che quest'ultima dovebbe avere una probabilità maggiore. Anche le assegnazioni

$$
\begin{gathered}
(k, 0, \dots, 0, n-k) \\
(1, 0, 1, 0, n-2, 0, \dots, 0)
\end{gathered}
$$

hanno la stessa probabilità data dalla (7).

Il fenomeno appena adombrato è una conseguenza della supposta indistinguibilità delle palline.

Avvertiamo il lettore che qui le considerazioni svolte si allontanano da quelle che in Meccanica Statistica portano alla distribuzione di probabilità di

Bose–Einstein; questa è data da una legge geometrica

$$p_{n_s} = (1-q)\,q^{n_s} \qquad (n_s = 0, 1, \dots)\,, \tag{8}$$

con

$$q = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_s}{kT}\right)$$

ove T è la temperatura, k la costante di Boltzmann, μ il potenziale chimico, ε_s l'energia dell's–esimo stato e n_s il numero delle particelle nello stesso stato; si veda un libro di Meccanica Statistica, per esempio [5]. Se si calcola la speranza della legge (8) si ottiene il numero medio di particelle per stato

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(n_s) &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{1-q} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{\mu-\varepsilon_s}{kT}\right)}{1-\exp\left(\frac{\mu-\varepsilon_s}{kT}\right)}\,,\end{aligned}$$

che è l'espressione che si incontra nei testi di Meccanica Statistica. La distribuzione di Bose–Einstein fu introdotta da Bose [1] nel 1924 e studiata e ampliata da Einstein in due articoli [2, 3] del 1924 e 1925.

Ci si deve domandare perché nei testi di probabilità si chiami statistica di Bose–Einstein un'espressione che è ben differente da quella alla quale i fisici danno questo nome. È intanto evidente che sia nei libri di probabilità sia in quelli di Meccanica Statistica si parte da un fenomeno comune: l'assegnazione di oggetti, palline o particelle, *indistinguibili* tra varî stati, urne o livelli d'energia, senza che siano presenti restrizioni al numero di oggetti che possono occupare un'urna o uno stato. Qui però le somiglianze hanno termine; in primo luogo, tanto le urne, quanto le palline sono in numero finito, mentre nel caso della Meccanica Statistica sia le palline sia i livelli d'energia sono potenzialmente infiniti. Ma assai piú notevole è una seconda differenza: mentre le urne sono di fatto anch'esse indistinguibili, i livelli d'energia, vale a dire i varî stati che le particelle possono occupare, non lo sono affatto, anzi essi sono ordinati con energie $e_0 < e_1 < \dots$.

Credo che si possa concludere che lo stesso nome è attribuito, a parere di chi scrive erroneamente, a due fenomeni distinti e che sarebbe piú corretto che i libri di probabilità in futuro indicassero con un nome differente la distribuzione di probabilità dell'eq. (7).

[1] S.N. Bose, Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese, *Zeitschrift für Physik* **26** 178-181 (1924).

[2] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*, **2** 261-267 (1924).

[3] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. 2. Abhandlung, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Physikalisch-mathematische Klasse*, **1** 314 (1925).

[4] W. Feller, *An introduction to probability theory and ita applications*, Wiley, NewYork, 1950 (3rd ed. 1968).

[5] G.H. Wannier, *Statisical physics*, Wiley, New York, 1966.