La lezione mancata

La formula di de Moivre – Stirling

Carlo Sempi Dipartimento di Matematica e Fisica Ennio De Giorgi, Università del Salento, Italy

Nel numero precedente di questa rivista Giampaolo Co' [1] ha utilizzato la formula di Stirling in una versione adeguata all'uso che se ne riprometteva. Poiché ho scoperto che molti di coloro che la usano non ne hanno mai visto una dimostrazione, in questa Lezione mancata ne dò una dimostrazione completa, seguendo quella data da Robbins [2]. In primo luogo un commento sul nome: l'ho chiamata formula di de Moivre–Stirling anche se è comunemente detta formula di Stirling. Tuttavia essa è essenzialmente dovuta a de Moivre; l'importante contributo di Stirling si limita al calcolo della costante $\sqrt{2\pi}$. Si veda in proposito [3].

La formula dà una stima asintotica di $n!$, o, ciò che è lo stesso, di $\ln n!$. Ora $\ln n! = \ln \prod_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} \ln j$; d'altro canto, poiché $x \mapsto \ln x$ è una funzione strettamente crescente, come illustrato nella Figura 1, risulta

$$\int_{j-1}^{j} \ln x \, dx < [j - (j-1)] \ln j < \int_{j}^{j+1} \ln x \, dx;$$

da questa relazione, sommando per $j = 1, 2, \ldots, n$, scende

$$\int_{0}^{n} \ln x \, dx < \ln n! < \int_{1}^{n+1} \ln x \, dx$$

onde, poiché $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$,

$$n \ln n - n < \ln n! < (n+1) \ln(n+1) - n.$$

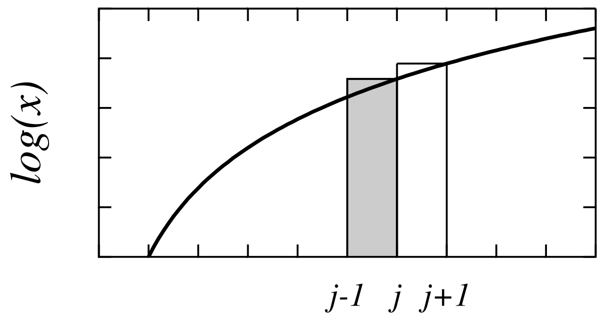

Figura 1

Questa doppia diseguaglianza suggerisce di paragonare $\ln n!$ alla media aritmetica del primo e dell'ultimo termine. Tale media è

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}\,[n\ln n - n + (n+1)\ln(n+1) - n] \\ &= \frac{1}{2}\Big[n\ln n - 2n + (n+1)\ln n \\ &\qquad +(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big] \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + a_n\,, \end{aligned}$$

ove

$$a_n := \frac{1}{2}\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{2}\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\,,$$

che tende a $1/2$ al tendere di n a $+\infty$. Si studierà così la differenza

$$s_n := \ln n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\,\ln n + n\,. \qquad (1)$$

Ora, è

$$\begin{aligned} s_n - s_{n+1} &= \ln n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n \\ &\quad +n - \ln(n+1)! \\ &\quad +\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) \\ &\quad +\ln(n+1) - n - 1 \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\,\ln\frac{n+1}{n} - 1\,; \end{aligned}$$

e poiché

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}}\,,$$

si ha

$$s_n - s_{n+1} = \frac{1}{2}\,(2n+1)\ln\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}} - 1\,. \quad (2)$$

Com'è noto, per $|t| < 1$ vale il seguente sviluppo in serie

$$\begin{aligned} \ln(1+t) &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}\,t^3 + \dots \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} \qquad (3) \end{aligned}$$

dal quale, sostituendo $-t$ a t, si ricava

$$\ln(1-t) = -t - \frac{1}{2}\,t^2 - \frac{1}{3}\,t^3 - \dots = -\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{t^n}{n}\,. \quad (4)$$

Sottraendo la (4) dalla (3) si ottiene

$$\ln\frac{1+t}{1-t} = 2\,\left(t+\frac{1}{3}\,t^3+\dots\right) = 2\,\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\,.$$

In virtú di quest'ultima relazione, la (2) si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} s_n - s_{n+1} &= (2n+1)\,\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)(2n+1)^{2j+1}} - 1 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)(2n+1)^{2j}} \\ &= \frac{1}{3(2n+1)^2}\,\sum_{j=0}^{\infty}\frac{3}{(2j+3)(2n+1)^{2j}}\,. \end{aligned} \qquad (5)$$

I termini di quest'ultima serie sono maggiorati dai termini della serie geometrica di ragione $(2n+1)^{-2} < 1$ (per $n > 2$); scende cosí dalla (5)

$$\begin{aligned} 0 < s_n - s_{n+1} &< \frac{1}{3(2n+1)^2}\,\frac{1}{1-(2n+1)^{-2}} \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2-1} \\ &= \frac{1}{12(n^2+n)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}\,. \end{aligned} \qquad (6)$$

Si vede, intanto, che la successione (s_n) è decrescente è, perciò, ammette limite $\xi \geq -\infty$; d'altro canto, pure dalla (6), scende

$$s_n - \frac{1}{12n} < s_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}$$

e, pertanto, la successione $(s_n - 1/12n)$ è crescente ed ammette perciò limite. Di conseguenza, esiste finito $\xi := \lim_{n\to+\infty} s_n$. Segue allora dalla (1) che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n/e)^n\,e^{\xi}\sqrt{n}} = 1\,,$$

onde

$$n! = e^{\xi}\,n^n\,\sqrt{n}\,e^{-n}\,e^{\theta_n}\,. \qquad (7)$$

L'eq.(7) è già sufficiente per molte applicazioni: mancano il valore della costante e^{ξ} e la stima dell'errore che si commette sostituendo a $n!$ l'espressione $e^{\xi}\, n^n \sqrt{n}\, e^{-n}$. Incominciamo subito dalla stima dell'errore. Dimostriamo ora che $0 < \theta_n < \frac{1}{12n}$.

Si ricava dalla (5) che

$$s_n - s_{n+1} > \frac{1}{3(2n+1)^2} > \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12(n+2)}$$

e, di qui, che la successione $(s_n - \frac{1}{12(n+1)})$ decresce. Poiché si è visto che $(s_n - \frac{1}{12n})$ cresce, si ha la doppia diseguaglianza

$$\xi + \frac{1}{12(n+1)} < s_n < \xi + \frac{1}{12n}$$

sicché, tenendo conto della (1), riesce

$$e^{\xi}\, n^n \sqrt{n}\, e^{-n} \exp\left(\frac{1}{12(n+1)}\right) < n!$$
$$< e^{\xi}\, n^n \sqrt{n}\, e^{-n} \exp\left(\frac{1}{12n}\right) .$$

Ciò mostra che nella (7) è $0 < \theta_n < \frac{1}{12n}$.

Il modo piú semplice per calcolare la costante e^{ξ} consiste nell'utilizzare la (7) per l'approssimazione dei termini della distribuzione binomiale

$$p_{n,k} = \mathbb{P}(S_n = k) \quad = \quad \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^{n-k}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

che è la probabilità $\mathbb{P}(S_n = k)$ di ottenere k volte testa lanciando n volte una moneta per la quale è p la probabilità di testa. La variabile aletoria S_n, che conta il numero di teste in n lanci, ha media $\mathbb{E}(S_n) = np$ e varianza $V(S_n) = np(1-p)$. Riducendo o, come spesso dicono i fisici, *standardizzando*, la variabile aleatoria S_n

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}$$

e ignorando il fattore di correzione e^{θ_n} che tende uniformemente a 1, si arriva all'espressione

$$\lim_{n\to+\infty} \quad \mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right)$$
$$= \quad \frac{1}{e^{\xi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\,.$$

Quest'ultima equazione è il contenuto del teorema integrale di de Moivre–Laplace. Ovviamente, si deve avere

$$\mathbb{P}(S_n \in \mathbb{R}) = 1 = \frac{1}{e^{\xi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

ciò che porta al valore della costante di normalizzazione $e^{\xi} = \sqrt{2\,\pi}$. Abbiamo cosí la formula di de Moivre–Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^n \sqrt{n}\, e^{-n}\, e^{\theta_n} \qquad \left(\theta_n \in \left]0, \frac{1}{12n}\right[\right) .$$

[1] G. Co': "La lezione mancata. Statistica, entropia e temperatura", *Ithaca* **XI** (2018) 125–132.

[2] H. Robbins: "A remark on Stirling's formula", *Amer. Math. Monthly* **62** (1955) 26–29.

[3] D.R. Bellhouse: *Abraham de Moivre: setting the stage for classical probability and its applications.* CRC Press, Boca Raton FL (2011).