

# Superintegrabilità

**Danilo Riglioni**

Liceo Scientifico Statale Aristotele, via dei Sommozzatori 50, 00143, Roma

**L**e simmetrie sono un ingrediente fondamentale per arrivare alla formulazione di leggi fisiche ed è possibile metterle in corrispondenza con quantità che si conservano e per tale ragione emergono nei sistemi più stabili e lontani dal caos. Tutti i sistemi che possono essere risolti per via analitica si dicono integrabili, tuttavia tra questi sistemi è possibile classificarne alcuni che hanno un numero di simmetrie massimale. Benché rari questi sistemi giocano un ruolo fondamentale dalla meccanica celeste alla fisica atomica.

## Introduzione

Lo studio della fisica è per certi versi lo studio del concetto di simmetria applicato ai fenomeni naturali, come affermato ad esempio dal premio Nobel P.W. Anderson [1] il quale, grazie a considerazioni sulla simmetria e la sua rottura, ha contribuito in modo decisivo a molte delle maggiori scoperte scientifiche contemporanee, come il bosone di Higgs o la superconduttività. Potremmo dire, senza esagerare troppo, che la simmetria è l'essenza di ogni disciplina scientifica e la ragione va ricercata direttamente nelle capacità predittive e di sintesi proprie della scienza tout court. Il lavoro dello scienziato naturale risiede proprio nell'osservare le regolarità che si presentano in natura e nel descrivere tali regolarità sotto forma di leggi scientifiche. Si pensi ad esempio alle regolarità nel moto dei corpi celesti, che per prime hanno colpito l'interesse degli uomini, alla rego-

larità con cui si presenta un certo carattere in una data specie e in diverse generazioni della stessa, o alla regolarità nelle proprietà chimiche degli elementi, che ha portato alla formulazione della tavola periodica. Il passo successivo è quindi quello di formalizzare queste regolarità usando il linguaggio della matematica. Tra gli esempi citati, il movimento di alcuni oggetti celesti risulta invariato per determinate traslazioni temporali: la posizione della Terra rispetto al Sole risulta pressoché invariata per una traslazione temporale di circa 365,25 giorni. Mentre, ad esempio, l'uomo presenta bilateria ossia è possibile dividere il suo corpo lungo un piano sagittale in due metà pressoché identiche. Se invertiamo destra e sinistra, ad esempio specchiandoci, otteniamo un'immagine pressoché invariata di noi stessi. Possiamo finalmente arrivare al concetto di simmetria come una sorta di ossimoro, ossia quella trasformazione matematica che lascia invariato un oggetto, dove per oggetto possiamo intendere sia una figura geometrica, sia un'equazione matematica. Ecco spiegata la capacità di sintesi della scienza (la parte destra può essere descritta per mezzo di quella sinistra, soltanto una parte descrive il tutto), ma anche la sua capacità predittiva (le posizioni future possono essere descritte come traslazione temporale delle posizioni passate). Citando E. Mach [2], ciò rende la scienza "un affare": Essa si propone con il minimo sforzo di appropriarsi della massima quantità possibile dell'infinita, eterna verità. Forti di questo punto di vista, cominciamo a capitalizzare al meglio la conoscenza che abbiamo sul particolare per giungere a quella universale. Le equazioni del moto di Newton, che possono essere sperimen-

tate e verificate sulla Terra, risultano invarianti per le trasformazioni di Galileo, in linea con la nostra percezione di uno spazio omogeneo e isotropo e di un tempo omogeneo non connesso allo spazio. Diviene quindi possibile ipotizzare che la fisica che vale sulla terra sia valida anche per i corpi celesti, portando Newton a spiegare le tre leggi empiriche di Keplero come naturale conseguenza delle sue leggi "universali", valide cioè sia in cielo sia in Terra. Giunti a questo punto potremmo esser tentati dalla presunzione di sbarazzarci nuovamente della ricerca di altre simmetrie, affermando che le equazioni di Newton sono sufficienti a descrivere tutti i fenomeni naturali che si pongono davanti ai nostri occhi e in tutto l'universo, a patto di conoscere le forze agenti tra tutte le particelle che compongono il sistema. Questo era in generale il punto di vista dei deterministi come Laplace di cui vale la pena leggere un estratto [3]: Noi dobbiamo riguardare il presente stato dell'universo come l'effetto del suo stato precedente e come la causa di quello che seguirà. Ammesso per un istante che una mente possa tener conto di tutte le forze che animano la natura, assieme alla rispettiva situazione degli esseri che la compongono, se tale mente fosse sufficientemente vasta da poter sottoporre questi dati ad analisi, essa abbraccerebbe nella stessa formula i moti dei corpi più grandi dell'universo assieme a quelli degli atomi più leggeri. Per essa niente sarebbe incerto ed il futuro, così come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi. A parte la difficoltà di conoscere con arbitraria precisione il presente (non più tardi di un secolo dopo il principio di Heisenberg renderà fisicamente impossibile questa eventualità), resta la difficoltà di risolvere matematicamente il problema. A tal proposito, nel XIX secolo Liouville trovò un algoritmo per risolvere un sistema governato dalle equazioni di Newton (più in generale un sistema Hamiltoniano) dipendente da  $N$  coordinate (gradi di libertà), a patto di conoscere almeno  $N$  quantità conservate in involuzione (vedremo più tardi il suo significato): in questo caso il sistema è detto integrabile [5]. Per lungo tempo il caso generale, ossia in assenza di  $N$  quantità conservate, rimase un problema aperto. Tra i problemi non risolubili con la tecnica di Liouville troviamo il problema dei tre corpi, che assorbì gli sforzi della comunità scientifica per quasi tutto il XIX

secolo. Il problema dei tre corpi consiste nel risolvere le equazioni di Newton e di conseguenza le traiettorie di tre corpi che interagiscono tra loro, come ad esempio il sistema Sole-Terra-Luna. Nel 1889 il Re di Svezia fu addirittura indotto a bandire un ingente premio in denaro per chi vi si fosse applicato con successo. Tale premio fu riscosso da Poincaré, che provò come in generale non fosse possibile arrivare a una soluzione stabile. Lo scienziato francese mostrò in sostanza che esistono sistemi per i quali, scegliendo condizioni iniziali appena differenti, si possono ottenere traiettorie che possono divergere anche molto velocemente determinando appunto un'instabilità. Tutto ciò impedisce di dire qualcosa di definitivo



**Figura 1:** *Henry Poincaré (1854 (Nancy) - 1912 (Paris))*

sulla posizione dei corpi con il passare del tempo, in altre parole abbiamo di fronte a noi quello che più tardi verrà definito moto caotico [4]. Questo mostra come non possiamo fare a meno delle simmetrie, non solo per risolvere agevolmente un problema di meccanica, ma anche solo per poter fare delle predizioni certe sull'evoluzione di un sistema. Infatti la ricetta fornita da Liouville ha bisogno di un numero di quantità conservate che cresce con i gradi di libertà del sistema, e ogni quantità conservata è legata all'esistenza di una certa simmetria, come affermato da Emmy Noether nel celebre teorema che porta il suo nome. Non a caso i principi di conservazione della quantità di moto, dell'energia e del momento

angolare possono essere elegantemente ottenuti rispettivamente a partire dalle proprietà di omogeneità dello spazio, del tempo e dall'isotropia dello spazio. Da questo punto di vista è come se



**Figura 2:** Emmy Noether ( 1882 (Erlangen) - 1935 (Bryn Mawr))

la presenza di simmetria faccia la differenza, in prima approssimazione, tra ciò che può essere studiato e ciò che è destinato a rimanere rumore bianco. È naturale allora che sia maturato nel tempo un interesse scientifico nei confronti della simmetria in se stessa, si pensi alla nascita della teoria dei gruppi, e che in seguito sia nato un interesse a ricercare la classificazione più ampia di modelli matematici caratterizzati da un numero congruo di simmetrie, una buona review sullo stato dell'arte si può trovare in [6]. Diamo allora uno sguardo da vicino agli esempi più importanti, iniziando con un'introduzione essenziale del formalismo Hamiltoniano, necessario alla trattazione dell'argomento.

## Formalismo Hamiltoniano

Le equazioni di Newton per un sistema conservativo

$$m_i \ddot{q}_i = -\partial_i V(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N) \quad (1)$$

possono essere riformulate per mezzo delle variabili canoniche  $q_i, p_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (2)$$

La funzione Hamiltoniana  $H$  si definisce invece come somma delle energie cinetica e potenziale

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m_i} + V(\mathbf{q})$$

Inoltre, introduciamo l'operazione binaria chiamata parentesi di Poisson

$$\{f, g\} = \sum_i^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (3)$$

dove  $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  e  $g(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  sono ancora funzioni delle  $2N$  variabili  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ . In particolare, per le variabili canoniche, si osserva che

$$\begin{cases} \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \\ \{q_i, p_k\} = \delta_{i,k}, \\ \text{con } \delta_{i,k} = 0 \quad i \neq k; \quad \delta_{i,i} = 1 \quad \forall i. \end{cases} \quad (4)$$

È facile verificare che la derivata fatta rispetto al tempo di una funzione  $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , dove  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  evolvono secondo le equazioni di Newton, può essere definita per mezzo della parentesi di Poisson

$$\dot{f} = \{f, H\}. \quad (5)$$

Diremo quindi che una funzione  $I(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  è una quantità conservata per l'Hamiltoniana  $H$  se - Poisson commuta con  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

$$\{I, H\} = 0. \quad (6)$$

Un insieme di  $N$  quantità conservate  $I_1, \dots, I_N$  si dicono in involuzione se

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad \forall i, j. \quad (7)$$

Se il sistema ha  $N$  gradi di libertà diremo che il sistema è integrabile secondo Liouville.

## L'integrabilità nel problema dei due corpi

Due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  costituiscono un sistema con 6 gradi di libertà poiché la loro posizione può essere individuata per mezzo delle sei coordinate  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  a cui dobbiamo aggiungere le loro rispettive variabili coniugate

$$\mathbf{p}_1 = (px_1, py_1, pz_1) \text{ e } \mathbf{p}_2 = (px_2, py_2, pz_2).$$

In generale, la funzione di Hamilton avrà quindi la seguente forma

$$H = \frac{1}{2m_1} |\mathbf{p}_1|^2 + \frac{1}{2m_2} |\mathbf{p}_2|^2 + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) . \quad (8)$$

Il principio di conservazione della quantità di moto ci restituisce immediatamente 3 quantità conservate il cui ruolo emerge chiaramente non appena riscriviamo la funzione di Hamilton usando come nuove variabili quelle che individuano il centro di massa e la posizione reciproca tra i due corpi

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{cases} \quad (9)$$

Le nuove variabili impulso che conservano le parentesi di Poisson risultano essere

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{p}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{P} + \mathbf{p} \\ \mathbf{p}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{P} - \mathbf{p} \end{cases} \quad (10)$$

Nelle nuove variabili la Hamiltoniana si legge come

$$H = \frac{1}{2M} |\mathbf{P}|^2 + \frac{1}{2m} |\mathbf{p}|^2 + V(|\mathbf{r}|), \quad (11)$$

dove  $M = m_1 + m_2$  è la massa totale e  $m = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$  è quella definita come massa ridotta. Nel caso in cui  $m_1 \ll m_2$  è facile verificare che

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} m = m_1.$$

Ad esempio nel caso del sistema Terra-Sole la massa ridotta tende al valore della massa della Terra, concordemente con la visione che la Terra ruota intorno al Sole apparentemente immobile (in realtà vediamo quindi che sarebbe più corretto dire che entrambi ruotano intorno al centro di massa, che per ovvie ragioni tende a coincidere con il corpo più massivo). Notiamo subito che la funzione  $H$  nelle nuove variabili non dipende dalle variabili  $\mathbf{R}$  e questo ci porta a verificare facilmente che

$$\{H, \mathbf{P}\} = 0, \quad (12)$$

come era lecito aspettarsi fin da principio. Perciò scrivere la funzione  $H$  in variabili canoniche in cui i momenti coniugati  $p$  si conservano significa adottare un sistema di coordinate che sfrutta una certa simmetria. Nel caso specifico osserviamo che il sistema non è sensibile ad uno spostamento del centro di massa in altri punti dell'universo. Inoltre il sistema nelle nuove variabili diviene matematicamente equivalente a due sistemi separati non interagenti: infatti l'evoluzione del valore delle variabili  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  non dipende da  $(\mathbf{R}, \mathbf{P})$  avendo

$$H = H_1 + H_2, \quad (13)$$

$$H_1 = \frac{1}{2M} |\mathbf{P}|^2, \quad H_2 = \frac{1}{2m} |\mathbf{p}|^2 + V(|\mathbf{r}|).$$

Allo stesso modo, essendo il potenziale  $V$  dipendente solo dal modulo di  $\mathbf{r}$ , è conveniente introdurre un nuovo sistema di variabili. Una delle variabili sarà appunto il raggio  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Precisamente avremo il cambiamento di variabili

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta,$$

$$p_x = \sin \theta \cos \phi p_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi p_\theta - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} p_\phi,$$

$$p_y = \sin \theta \sin \phi p_r + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi p_\theta + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} p_\phi,$$

$$p_z = \cos \theta p_r - \frac{1}{r} \sin \theta p_\theta,$$

Questa nuova trasformazione (canonica) ci permette di ottenere la Hamiltoniana  $H_2$  nella seguente forma

$$H_2 = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r) \quad (14)$$

o, equivalentemente, nella forma

$$H_2 = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{H_\theta}{r^2} \right) + V(r) \quad (15)$$

$$H_\theta = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta},$$

dove si sono introdotti

$$p_\phi = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z \equiv \mathbf{L}_z; \quad H_\theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}|^2 \equiv |\mathbf{L}|^2, \quad (16)$$

ossia la terza componente del momento angolare  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  e il modulo quadro dello stesso. Dall'indipendenza da  $\phi$  della funzione di Hamilton possiamo dedurre immediatamente la conservazione della quantità  $p_\phi$ . Lo stesso si può dire anche della quantità  $H_2$  che, come una nuova Hamiltoniana definita su uno spazio ridotto  $\theta, \phi$ , risulta conservata  $\{H_\theta, H\} = 0$ . Inoltre, a causa dell'invarianza di  $H_\theta$ , l'Hamiltoniana  $H_2$  risulta matematicamente equivalente ad un sistema con un solo grado di libertà, rendendo così evidente il ruolo giocato dalle simmetrie nel ridurre i sistemi integrabili a più gradi di libertà in sistemi più semplici.

### Dall'integrabilità alla superintegrabilità e le sue applicazioni

La funzione di Hamilton  $H_2$  ha 3 gradi di libertà ed è definita in uno spazio (detto delle fasi) a 6 dimensioni, dato dalle tre coordinate  $\mathbf{r}$  e dai tre impulsi  $\mathbf{p}$ . Usando coordinate polari per lo spazio delle configurazioni, nello spazio delle fasi si hanno le coordinate  $(r; \theta; \phi; p_r; p_\theta; p_\phi)$ . Questo significa che lo stato del sistema è univocamente determinato al tempo  $t_0$  da un punto nello spazio delle fasi, che evolverà verso un nuovo punto dello spazio delle fasi al tempo  $t_0 + dt$ , dove  $dt$  è un intervallo di tempo infinitesimo. Tuttavia non tutti i punti dello spazio delle fasi sono accessibili dal sistema, vista la presenza delle quantità conservate che giocano di fatto il ruolo di vincolo. Come detto precedentemente il sistema  $H_2$  possiede 3 quantità conservate in involuzione:  $(H_2, H_\theta, p_\phi)$  a cui possiamo aggiungere una quarta quantità conservata funzionalmente indipendente da quelle già elencate ad esempio la componente x del vettore momento angolare  $L_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_x$ . Quando il numero delle quantità conservate è superiore al numero dei gradi di libertà il sistema si dice **superintegrabile**. Queste quattro quantità dipendendo da  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$  e definiscono di fatto un sistema di 4 equazioni in 6

incognite:

$$\begin{cases} H_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_1 \\ H_\theta(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_2 \\ p_\phi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_3 \\ L_x(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_4 \end{cases} \quad (17)$$

Ciò significa che lo spazio delle fasi accessibile, una volta considerati i vincoli derivanti dalle quantità conservate, si riduce ad uno spazio bidimensionale. Infatti non è difficile mostrare che per potenziali centrali il moto è planare. Se consideriamo le traiettorie dei pianeti del sistema solare notiamo però che, oltre ad essere planari, sono anche chiuse ossia lo spazio delle fasi accessibile al sistema risulta essere monodimensionale. Questa è una chiara indicazione dell'esistenza di un'ulteriore quantità conservata. La quantità in questione si chiama vettore di Laplace-Runge-Lenz (LRL). Considerando come potenziale  $V(r) = -k/r$ , si mostra che la quantità vettoriale

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (18)$$

è conservata, cioè si ha

$$\{H_2, \mathbf{A}\} = 0. \quad (19)$$

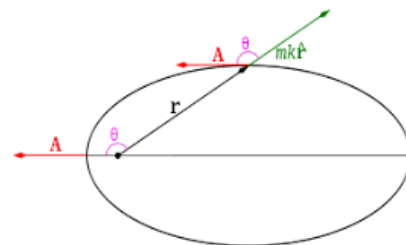


Figura 3: Il vettore di LRL

Il lettore potrebbe pensare a questo punto di avere a che fare con una sovrabbondanza di quantità conservate: tre componenti dal vettore di LRL le tre componenti del momento angolare  $\mathbf{L}$  e l'energia. Ma ciò, in base a quanto detto poc'anzi, definirebbe un sistema di equazioni sovradeterminato. In effetti si può vedere che queste quantità non sono indipendenti, poiché sussistono le relazioni  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$  e  $|\mathbf{A}|^2 = m^2 k^2 + 2m|\mathbf{L}|^2 H_2$ , che riportano il numero di costanti del moto a cinque. Quando il sistema ammette un numero di



costanti del moto indipendenti pari a  $2N-1$ , con  $N$  gradi di libertà, il sistema si definisce **massimamente superintegrabile**. È naturale chiedersi ora se i sistemi massimamente superintegrabili costituiscano una famiglia rara o meno. A questa domanda ha dato una risposta J. Bertrand [7] per quanto riguarda i sistemi con simmetria radiale. Bertrand considera una traiettoria circolare mettendosi sul minimo di un potenziale generico  $V(r)$  che ammette stati legati. Perturbando tale orbita circolare si ottengono delle condizioni che la funzione  $V(r)$  deve soddisfare affinché la perturbazione non rompa la condizione di traiettoria chiusa. Sorprendentemente si rese conto che esistono solo due potenziali massimamente superintegrabili e questi sono il potenziale di Keplero ed il potenziale di oscillatore armonico. Non sorprende tanto che in questa famiglia sia presente il potenziale armonico che emerge naturalmente nello studio delle perturbazioni e quindi da sistemi lineari, quanto la peculiarità del potenziale  $1/r$ . Questo significa che è come se la Natura avesse scelto un potenziale eccezionalmente simmetrico per due interazioni fondamentali come le interazioni gravitazionali ed elettromagnetiche. La cosa diviene ancora più suggestiva se pensiamo che il potenziale  $1/r$  è conseguenza diretta della legge di Gauss. In uno spazio  $N$ -dimensionale il flusso costante del campo elettrico di una sorgente puntiforme si calcola su una ipersuperficie che scala come  $r^{N-1}$ . Questo genera una forza proporzionale al suo inverso  $1/r^{N-1}$  il cui potenziale è proporzionale a  $1/r^{N-2}$ . Perciò solo in tre dimensioni l'interazione Coulombiana dà luogo alla massima superintegrabilità, davvero una coincidenza fortunata per chi ama le simmetrie.

Prima di concludere questa serie di riflessioni sul ruolo delle simmetrie nella fisica classica è necessario spendere qualche parola su come le simmetrie siano sopravvissute al cambio di paradigma scientifico conseguente all'introduzione della Meccanica Quantistica. Abbiamo visto come le simmetrie che descrivono il mondo fisico all'interno di una data teoria sono un aspetto letteralmente fondamentale che possono assumere il ruolo di postulato. Si pensi ad esempio ai postulati della teoria della relatività riguardo all'equivalenza tra diversi sistemi di riferimento inerziali, condiviso con la fisica Newtoniana. Al-

lo stesso modo la Meccanica Quantistica non fa venir meno il concetto di omogeneità ed isotropia dello spazio, ma rivede il concetto di osservabile fisica. Volendo trovare un'analogia con la geometria è come far venir meno il V postulato di Euclide senza invalidare i primi quattro, quello che si ottiene è una nuova geometria detta non Euclidea. Le conseguenze di queste riflessioni si possono ritrovare nei lavori di Pauli [8] che fu capace, usando il vettore di LRL, di ottenere lo spettro di emissione dell'atomo di idrogeno senza risolvere esplicitamente l'equazione di Schrödinger analogamente a quanto visto in meccanica classica dove possiamo fare a meno di risolvere le equazioni del moto per ottenere la traiettoria. Più tardi lo stesso Schrödinger mostrò che in effetti, nel caso dell'atomo di idrogeno, gli autovalori possono essere trovati molto elegantemente sfruttando il metodo della fattorizzazione [9], che non a caso può essere applicato con successo anche nel caso di oscillatore armonico quantistico, e che permette di ottenere lo spettro senza dover passare esplicitamente per il calcolo di un'equazione differenziale. Questa caratteristica si pensa in effetti essere comune a tutti i sistemi quantistici massimamente superintegrabili [10].



- [1] P.W. Anderson: "More is Different", *Science New Series* **177** (1972) 393-396.
- [2] E. Mach: *Populär-wissenschaftliche Vorlesungen*. Johann Ambrosius Barth, Lipsia (1896). trad. it. *Lecture Scientifiche Popolari*, Bocca, Torino (1900).
- [3] P. S. Laplace: *Essai philosophique sur les probabilités*. Bachelier, Parigi (1840).
- [4] L. Bonolis: "Il moto dei pianeti: ordine o caos? Il problema dei tre corpi, una sfida per la meccanica celeste", *La fisica nella scuola* **21** (2010) 12-36.
- [5] V. I. Arnold: *Metodi Matematici Della Meccanica Classica*. Editori Riuniti IV edizione, Roma (2004).
- [6] W. Miller, S. Post, P. Winternitz: "Classical and quantum Superintegrability with Applications", *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical* **46** (2013) N42.
- [7] J. Bertrand, *C.R. Acad. Sci.*, **77**, Parigi (1873).
- [8] W. Pauli: "Über das Wasserstoffspektrum vom standpunkt der neuen Quantenmechanik", *Z. Phys.* **36** (1926) 336-363.
- [9] E. Schrödinger: "A method of determining quantum mechanical eigenvalues and eigenfunctions", *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **46** (1940) 916.

Further studies on solving eigenvalue problems by factorization *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **46** (1941) 183206.

- [10] P. Tempesta, A. Turbiner, P. Winternitz: "Exact solvability of superintegrable systems *J. Math. Phys.*", **42** 2001 (4248)



**Danilo Riglioni, PhD:** Nato a Roma nel 1983, si è laureato in Fisica nel 2008 presso l'Università degli Studi Roma Tre, con una tesi dal titolo Sistemi superintegrabili su spazi curvi. Conseguito nella stessa Università il titolo di dottore di ricerca in Fisica con la tesi Quantum Bertrand Systems ha trascorso un triennio come post-doc presso il Centre de Recherches Mathématiques, dell'Université di Montréal, Montréal (QC) Canada. Attualmente è professore di ruolo di Matematica e Fisica nelle scuole secondarie di secondo grado e collabora con Roma Tre nell'organizzazione di corsi di aggiornamento in fisica moderna per gli insegnanti della scuola secondaria di secondo grado. e-mail:danilo.riglioni@istruzione.it

