n. 3 - Pseudoconnessioni proiettive.

Per semplicità di notazione si denoterà nel seguito con $\mathcal{S}(M)$ lo spazio fibrato dei riferimenti proiettivi associato alla varietà differenziabile M.

Def. 3.1.- Si chiama pseudoconnessione proiettiva su M ogni pseudoconnessione sullo spazio fibrato $\mathcal{S}(M)$.

Sia Γ una pseudoconnessione proiettiva su M e sia A il campo tensoriale su M associato a Γ (c.f.r. [2]), si vogliono definire in modo analogo a quanto si fa per le connessioni proiettive, le componenti di Γ rispetto ad una carta locale di M ed una carta locale di $\tilde{G}$ prefissata. Si consideri a tale scopo, una carta locale (U,ϕ) e sia $\{x^i\}_{1\leq i\leq n}$ il relativo sistema coordinato; si indichi con σ_U la sezione locale di $\mathcal{S}(M)$ definita su U la quale associa ad ogni punto $p\in U$ il riferimento proiettivo u_p relativo alla carta (U,ϕ) e sia ω_U la 1-forma su U a valori nell'algebra di Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ di $\tilde{G}$, definita per ogni $p\in U$ e per ogni $X_p\in T_p(M)$ da (c.f.r. [2])

$$(\omega_U)_p(X_p) = v_{\sigma_U(p)}((\sigma_U)_{*p}(A_p(X_p)) - \Gamma_{\sigma_U(p)}((\sigma_U)_{*p}(X_p))$$

dove $v_{\sigma_U(p)}$ è l'isomorfismo (c.f.r.[4]):

$$v_{\sigma_U(p)} : V_{\sigma_U(p)} \to \tilde{\underline{g}}$$
$$A^*_{\sigma_U(p)} \to A$$

Fissata una carta locale $(U_{\gamma\gamma},\phi_{\gamma\gamma})$ in $\tilde{G}$ sia $(E^\beta_\alpha)_{\substack{0\leq\alpha,\beta\leq n\\(\alpha,\beta)\neq(\gamma,\gamma)}}$ la base corrispondente dell'algebra di Lie $\tilde{\underline{g}}$; posto

$$\omega_U = (\Gamma^\alpha_{j\beta} dx^j) E^\beta_\alpha$$

$$A_{|U} = A^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d\, x^j$$

le $n^2 + n^2(n+2) = n^3+3n^2$ funzioni A^i_j, $\Gamma^\alpha_{j\beta}$ si chiamano le componenti di Γ rispetto alla carta (U,ϕ) ed alla carta $(U_{\gamma\gamma},\phi_{\gamma\gamma})$ prefissata in $\tilde{G}$(1).

Siano ora (U,ϕ) e $(\bar{U},\bar{\phi})$ due carte locali di M tali che $U\cap\bar{U}\neq\emptyset$ e siano $\{x^i\}_{1\leq i\leq n}$ ed $\{\bar{x}^{i'}\}_{1\leq i'\leq n}$ i relativi sistemi coordinati, posto $\theta^i_{.i'} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{i'}}$, $\bar{\theta}^{.i'}_{i} = \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial x^i}$ e $\theta^i_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^{j'}\partial \bar{x}^{k'}}$, si prova la seguente proposizione:

Prop. 3.1. - Sia Γ una pseudoconnessione proiettiva su M e siano A^i_j, $\Gamma^\alpha_{j\beta}$ e $\bar{A}^{i'}_{j'}$, $\bar{\Gamma}^{\alpha'}_{j'\beta'}$ le componenti di Γ relative rispettivamente alle carte (U,ϕ) e $(\bar{U},\bar{\phi})$ di M ed alla carta locale $(U_{\circ\circ},\phi_{\circ\circ})$ di $\tilde{G}$, allora in $U\cap\bar{U}$ si ha:

(1) Si precisa che in questo numero gli indici latini variano nell'insieme $\{1,2,\dots,n\}$ mentre gli indici greci nell'insieme $\{0,1,2,\dots,\hat{\gamma},\dots,n\}$ essendo γ l'indice corrispondente alla carta locale $(U_{\gamma\gamma},\phi_{\gamma\gamma})$ prefissata in $\tilde{G}$.

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{j'k'} = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \Theta^{k}_{.k'}$$

$$\Gamma^{i'}_{j'0} = \Gamma^{i}_{j0}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \bar{\Theta}^{.i'}_{i} \tag{1}$$

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^{i}_{jk}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \Theta^{k}_{.k'}\, \bar{\Theta}^{.i'}_{i} + A^{h}_{j}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \bar{\Theta}^{.h'}_{h}\, \bar{\Theta}^{.i'}_{i}\, \Theta^{i}_{h'k'}$$

Dimostrazione.

Per la prop. 1 del n. 3 di [2], per ogni $p \in U \cap \bar{U}$ e per ogni $X_p \in T_p(M)$ risulta

$$(\omega_{\bar{U}})_p(X_p) = (\mathrm{ad}(\Psi_{U\bar{U}}(p))^{-1})(\omega_U)_p(X_p) + \delta_{U\bar{U}}(A_p(X_p)) \tag{2}$$

dove $\Psi_{U\bar{U}}(p)$ è quell'elemento $\tilde{C}_{U\bar{U}}$ di $\tilde{G}$ rappresentato dalla matrice

$$C_{U\bar{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad \text{con } B = (\Theta^{i}_{i'})_{1\le i,i'\le n} \in GL(n,\mathbb{R}),$$

$\delta_{U\bar{U}}$ è la 1-forma su $U \cap \bar{U}$ a valori in $\tilde{\underline{g}}$ definita per ogni $p \in M$ e per ogni $X_p \in T_p(M)$ da:

$$(\delta_{U\bar{U}})_p(X_p) = \delta_{\Psi_{U\bar{U}}(p)}((\Psi_{U\bar{U}})_{*p}(X_p))$$

essendo $\delta_{\Psi_{U\bar{U}}(p)}$ la 1-forma canonica δ su G calcolata nel punto $\Psi_{U\bar{U}}(p)$.

Nella (2) sostituendo ad X_p il vettore tangente $(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}})$ si ottiene:

$$(\omega_{\bar{U}})_p(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}})_p = \mathrm{ad}(\Psi_{U\bar{U}}(p))^{-1}\, \Theta^{j}_{j'} \Gamma^{\alpha}_{j\beta} E^{\beta}_{\alpha} + (\delta_{U\bar{U}})_p\, \Theta^{j}_{j'}\, A_p(\frac{\partial}{\partial x^{j}})_p \tag{3}$$

Tenuto anche conto del n. 2, della (3), segue

$$(\omega_{\bar{U}})_p(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}})_p = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk} \Theta^{j}_{.j'} \Theta^{k}_{.k'} E^{k'}_{\circ} + \Gamma^{i}_{jo} \Theta^{j}_{.j'} \bar{\Theta}^{.i'}_{i} E^{\circ}_{i'} + \Gamma^{i}_{jk} \Theta^{j}_{.j'} \Theta^{k}_{.k'} \bar{\Theta}^{.i'}_{i} E^{k'}_{i'} +$$

$$+ A^{h}_{j}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \bar{\Theta}^{.h'}_{h}\, \Theta^{i}_{.h'k'}\, \bar{\Theta}^{.i'}_{i}\, E^{k'}_{i'}$$

e da questa e dall'espressione $(\omega_{\bar{U}})_p(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}})_p = \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} E^{\beta'}_{\alpha'}$ si ottengono in modo ovvio le uguaglianze (1). $\square$

Prop. 3.2. - <u>Ogni pseudoconnessione proiettiva</u> Γ <u>su</u> M <u>induce una pseudo-connesione lineare</u> $\overset{\circ}{\Gamma}$ <u>e viceversa</u>.

Dim.

Infatti fissata in $\tilde{G}$ la carta locale (U_{oo},ϕ_{oo}), per ogni carta (U,ϕ) di M, si indichino con A^i_j, $\Gamma^\alpha_{j\beta}$ le componenti di Γ rispetto a tali carte e si ponga $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$, allora le n^2+n^3 funzioni A^i_j, $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk}$ sono le componenti rispetto ad (U,Φ) di una pseudoconnessione lineare $\overset{\circ}{\Gamma}$ in M in quanto per la prop. 3.1 se (U',ϕ') è un'altra carta locale di M tale che $U\cap U' \neq \emptyset$ si ha

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk}\Theta^j_{.j'}\Theta^k_{.k'}\bar{\Theta}^{i'}_i + A^h_j\Theta^j_{.j'}\bar{\Theta}^{h'}_h\bar{\Theta}^{i'}_i\Theta^i_{h'k'} .$$

Viceversa, indicato con L(M) lo spazio fibrato dei riferimenti lineari di M, si considerino l'applicazione $\varphi : GL(n,R) \to \tilde{G}$, $\tilde{A} \to \tilde{B}$ con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

e l'applicazione $\Phi : L(M) \to \mathcal{S}(M)$ che ad ogni riferimento lineare $\ell_p = (X_1,X_2,\dots,X_n)$ nel punto $p\in M$, associa il riferimento proiettivo $\Phi(\ell_p)$ così definito:

$$\Phi(\ell_p) = (0_{T_p(M)},D_p(X_1),\dots,D_p(X_n), \sum_{i=1}^n X_i) .$$

Si verifica facilmente che (Φ,φ) è un omomorfismo di fibrati e quindi per ogni pseudoconnessione lineare $\overset{\circ}{\Gamma}$ si può considerare la pseudoconnessione proiettiva immagine di $\overset{\circ}{\Gamma}$ tramite detto omomorfismo. (c.f.r. [3]). □