1. ORTOGRUPPI. -

Un <u>ortogruppo</u> S è un semigruppo completamente regolare (c.r.) in cui l'insieme E degli idempotenti è un sottosemigruppo.

I semigruppi idempotenti (o bande) e i semigruppi inversi c.r. sono esempi di ortogruppi.

Si perviene a delle caratterizzazioni degli ortogruppi in termini di relazioni di Green ($\mathcal{D},\mathcal{J},\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H}$); inoltre, si studiano i legami tra le relazioni di Green su S, ortogruppo, e le relazioni di Green sulla banda E degli idempotenti di S e si perviene ancora ad altre caratterizzazioni.

Se a è un elemento c.r. di un semigruppo S, si indica con $\hat{a}$ l'idempotente della $\mathcal{H}$-classe di S contenente a e con a^{-1} l'inverso di a nella stessa $\mathcal{H}$-classe.

<u>TEOREMA 1.1.</u>-

Siano a,b elementi c.r. di un semigruppo S, allora

i) $a\mathcal{R}b$ sse $\hat{a}\,\hat{b} = \hat{b}$, $\hat{b}\,\hat{a} = \hat{a}$

ii) $a\mathcal{L}b$ sse $\hat{a}\,\hat{b} = \hat{a}$, $\hat{b}\,\hat{a} = \hat{b}$

<u>Dim.</u>-

Si prova la i). Si osservi, dapprima, che se s è un elemento c.r. di un semigruppo S, poiché $sS \subseteq \hat{s}\, s\, S \subseteq \hat{s}\, S$ ed $\hat{s}\, S = s\, s^{-1}\, S \subseteq s\, S$ si ha

$$s\, S = \hat{s}\, S \qquad (1)$$

Siano a,b elementi c.r. di un semigruppo S tali che $a\mathcal{R}b$; per la (1) $\hat{a}\mathcal{R}\hat{b}$, quindi esiste un elemento x di S tale che $\hat{a}x = \hat{b}$, pertanto $\hat{a}\,\hat{b} = \hat{a}(\hat{a}x) = \hat{a}x = \hat{b}$; in modo analogo $\hat{b}\,\hat{a} = \hat{a}$. Viceversa, poiché $\hat{a}\, S = \hat{b}\,\hat{a}\, S \subseteq \hat{b}\, S$ e $\hat{b}\, S = \hat{a}\,\hat{b}\, S \subseteq \hat{a}\, S$, per la (1) $a\mathcal{R}b$.

La ii) si dimostra in modo analogo alla i).

TEOREMA 1.2. -

Sia S un ortogruppo; per ogni a,b in S

$$a\mathscr{D}b \quad \text{sse} \quad \hat{a} = \hat{a}\,\hat{b}\,\hat{a} \quad , \quad \hat{b} = \hat{b}\,\hat{a}\,\hat{b}\ .$$

Dim.-

Siano a,b due elementi di S, ortogruppo, tali che $a\mathscr{D}b$, quindi $a\mathscr{L}x$, $x\mathscr{R}b$ per un certo $x \in S$. Allora (cfr. Teorema 1.1)

$$\hat{a}\mathscr{L}\hat{x} \quad , \quad \hat{x}\mathscr{R}\hat{b} \qquad\qquad (2)$$

Poiché $\mathscr{L}$ è una congruenza destra e $\mathscr{R}$ una congruenza sinistra,

$$\hat{a}\,\hat{b}\mathscr{L}\hat{x}\,\hat{b} \quad , \quad \hat{a}\,\hat{x}\mathscr{R}\,\hat{a}\,\hat{b}\ ;$$

per le (2) e per il Teorema 1.1

$$\hat{a}\,\hat{b}\mathscr{L}\hat{b} \quad , \quad \hat{a}\mathscr{R}\,\hat{a}\,\hat{b}\ ,$$

pertanto, ancora per il Teorema 1.1

$$\hat{a} = \hat{a}\,\hat{b}\,\hat{a} \quad , \quad \hat{b} = \hat{b}\,\hat{a}\,\hat{b}\ .$$

Il viceversa è immediato; infatti per il Teorema 1.1 $\hat{a}\,\hat{b}\mathscr{L}b$ e $\hat{a}\,\hat{b}\mathscr{R}a$, quindi $a\mathscr{D}b$.

Il Teorema 1.2 può essere utilizzato per caratterizzare gli ortogruppi come sottoclasse dei semigruppi regolari e dei semigruppi completamente regolari.

TEOREMA 1.3.-

Sia S un semigruppo regolare ed E l'insieme degli idempotenti di S. Sono equivalenti:

i) S è un ortogruppo;

ii) Per ogni $e,f \in E$: $e\mathscr{J}f$ sse $e = efe$, $f = fef$;

iii) Per ogni $e,f \in E$: $e\mathscr{D}f$ sse $e = efe$, $f = fef$;

iv) Per ogni $a,x \in S$: $a = axa \Longrightarrow a = ax^2a^2$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Se S è un ortogruppo, la ii) è vera per il Teorema 1.2, poiché $\mathscr{D} = \mathscr{J}$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) E' noto che $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$ pertanto, per ogni $e, f \in E$ tali che $e \mathscr{D} f$, per l'ipotesi $e = efe$, $f = fef$.

Viceversa, se $e, f \in E$ tali che $e = efe$, $f = fef$, allora $f \mathscr{L} ef$, $ef \mathscr{R} e$, quindi $e \mathscr{D} f$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Siano $a, x \in S$ tali che $a = axa$, poiché $ax \mathscr{D} xa$ ed ax, xa sono elementi idempotenti di S, per l'ipotesi

$$ax = ax(xa)ax$$

quindi $a = axa = (axxaax)a = ax^2a^2$.

iv) $\Longrightarrow$ i) Sia a un elemento di S; poiché a è regolare esiste $x \in S$ tale che $a = axa$. Allora, per l'ipotesi, $a = ax^2a^2 \in aSa^2$, pertanto per il Teorema IV.1.6 di /9/ S è completamente regolare.

Siano e, f elementi idempotenti di S ed x inverso di ef in S, allora

$$fxe = f(xefx)e = (fxe)^2$$

$$ef(fxe)ef = efxef = ef\ .$$

Per l'ipotesi

$$ef = ef(fxe)^2(ef)^2 = efxef(ef) = (ef)^2$$

pertanto ef è un idempotente, quindi S è un ortogruppo.

COROLLARIO 1.4.-

Sia S un semigruppo completamente regolare sono equivalenti:

i) S è un ortogruppo;

ii) Per ogni $a, b \in S$: $a \mathscr{D} b$ sse $\hat{a} = \hat{a}\,\hat{b}\,\hat{a}$, $\hat{b} = \hat{b}\,\hat{a}\,\hat{b}$

iii) Per ogni $a, x \in S$: $a = a\,x\,a \Longrightarrow a = a\,x^2\,a^2$.

OSSSERVAZIONE. -

L'equivalenza tra i) e iii) è nota (cfr. /10/).

Sia B un sottosemigruppo di un semigruppo S; indichiamo con $\mathcal{H}^B, \mathcal{L}^B, \mathcal{R}^B, \mathcal{D}^B, \mathcal{I}^B$ le relazioni di Green $\mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I}$ relative al semigruppo B.

<u>TEOREMA 1.5</u>.-

Sia S un ortogruppo ed E il suo sottosemigruppo degli idempoteneti. Allora

i) $\mathcal{R} \cap (E \times E) = \mathcal{R}^E$

ii) $\mathcal{L} \cap (E \times E) = \mathcal{L}^E$

iii) $\mathcal{H} \cap (E \times E) = \mathcal{H}^E$

iv) $\mathcal{D} \cap (E \times E) = \mathcal{D}^E$

<u>Dim.</u>-

La dimostrazione è immediata dal Teorema 1.1 e dal Teorema 1.2, tenendo conto che E è un ortogruppo.

Le i),ii),iii) del Teorema 1.5 valgono per situazioni più generali [cfr. /5/; Prop. 4.5,p.50]. La iv) può venir utilizzata per caratterizzare gli ortogruppi come sottoclasse dei semigruppi <u>ortodossi</u> cioè dei semigruppi regolari nei quali l'insieme E degli idempotenti è un sottosemigruppo. Vale infatti, il seguente teorema [cfr. /5/; Prop. 3.3, p.204]:

<u>TEOREMA 1.6</u>. -

Un semigruppo ortodosso S con banda degli idempotenti E è completamente regolare sse $\mathcal{D} \cap (E \times E) = \mathcal{D}^E$.

<u>Dim.</u> -

La necessità della condizione è immediata. Infatti, un semigruppo ortodosso completamente regolare è un ortogruppo, quindi,per il Teorema 1.5 $\mathcal{D} \cap (E \times E) = \mathcal{D}^E$. Viceversa, sia a un elemento di S; poiché S è regolare esiste $a' \in S$ tale che

$$a = aa'a \quad , \quad a' = a'aa' \tag{3}$$

Posto $aa' = e$, $a'a = f$, poiché $e,f \in E$ ed $\ell \mathscr{D} f$, per l'ipotesi $e \mathscr{D}^E f$, allora per il Teorema 1.2

$$e = efe \quad , \quad f = fef \tag{4}$$

Sia $\bar{a} = ea'f$

$$\begin{aligned} a\bar{a}a &= a(ea'f)a = aa'a(ea'aa'aa'f)aa'a \qquad \text{(per la (3))} = \\ &= a(a'aea'a)a'(aa'faa')a = a(fef)a'(efe)a = \\ &= afa'ea \qquad \text{(per la 4))} = \\ &= aa'ea = aa'a = a \end{aligned}$$

inoltre,

$$\begin{aligned} a\bar{a} &= a(ea'f) = (aa'a)e(a'aa')f \qquad \text{(per la (3))} = \\ &= a(a'aea'a)a'f = a(fef)a'f = \\ &= afa'f \qquad \text{(per la (4))} = \\ &= aa'f = ef \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}a &= (ea'f)a = e(a'aa')f(aa'a) \qquad \text{(per la (3))} = \\ &= ea'(aa'faa')a = ea'(efe)a = \\ &= ea'ea \qquad \text{(per la (4))} = \\ &= ea'a = ef \end{aligned}$$

Si è provato che ogni elemento a di S è completamente regolare, quindi S è completamente regolare.

COROLLARIO 1.7. -

Un semigruppo ortodosso S con banda degli idempotenti E è completamente regolare sse $\mathscr{J} \cap (E \times E) = \mathscr{J}^E$.

Dim. -

Un semigruppo ortodosso completamente regolare è un ortogruppo, quindi poiché $\mathscr{D} = \mathscr{J}$, per il Teorema 1.5 $\mathscr{J} \cap (E \times E) = \mathscr{J}^E$.

Viceversa, supposto $\mathscr{J} \cap (E \times E) = \mathscr{J}^E$, poiché $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$ e $\mathscr{D}^E = \mathscr{J}^E$

$$\mathcal{D} \cap (E\times E) \subseteq \mathcal{I} \cap (E\times E) = \mathcal{I}^E = \mathcal{D}^E .$$

Inoltre, è noto che $\mathcal{D}^E \subseteq \mathcal{D} \cap (E\times E)$, pertanto per il Teorema 1.6, S è completamente regolare.

Si osservi che in un semigruppo ortodosso, in generale $\mathcal{D} \neq \mathcal{I}$.

DEFINIZIONE 1.7. - Una banda E si dice regolare destra [risp. sinistra] sse $ef = fef$ [risp. $ef = efe$] per qualsiasi $e,f \in E$.

LEMMA 1.8. - [cfr. /8/, Teorema 8]

In una banda E, sono equivalenti

i) E è una banda regolare destra [risp. sinistra]

ii) $\mathcal{R} = \mathcal{D}$ [risp. $\mathcal{L} = \mathcal{D}$]

Dim. -

E' noto che $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$. Siano a,b elementi di E tali che $a\mathcal{D}b$, allora per il Teorema 1.2 $a = aba$, $b = bab$, quindi, poichè E è una banda regolare destra

$$ab = (aba)b = (ba)b = b$$

$$ba = (bab)a = (ab)a = a$$

pertanto per il Teorema 1.1 $a\mathcal{R}b$.

Viceversa, per ogni a,b in E, poiché $ab\mathcal{D}ba$ e $\mathcal{D}$ è una congruenza, $aba\mathcal{D}ba$. Allora essendo $\mathcal{R} = \mathcal{D}$, $aba\mathcal{R}ba$, pertanto per il Teorema 1.1

$$ba = (aba)ba = aba$$

TEOREMA 1.9. -

Se S è un semigruppo ed E l'insieme degli idempotenti di S, sono equivalenti:

i) S è un ortogruppo con E banda regolare destra

ii) S è ortodosso e $\mathcal{I} \cap (E\times E) = \mathcal{R}^E$

iii) S è ortodosso e $\mathcal{D} \cap (E\times E) = \mathcal{R}^E$

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) L'ortogruppo S è ortodosso; inoltre, poiché $\mathcal{D}=\mathcal{J}$ e per il Teorema 1.5, $\mathcal{J}\cap(E\times E) = \mathcal{J}^E$. La banda E è regolare destra, quindi, per il Lemma 1.8 $\mathcal{J}^E = \mathcal{D}^E = \mathcal{R}^E$, pertanto $\mathcal{J}\cap(E\times E) = \mathcal{R}^E$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) E' noto che $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$; dall'ipotesi segue

$$\mathcal{D}\cap (E\times E) \subseteq \mathcal{J}\cap(E\times E) = \mathcal{R}^E .$$

E' noto che $\mathcal{R}^E \subseteq \mathcal{D}^E$ ed è immediato verificare che $\mathcal{D}\cap(E\times E) = \mathcal{D}^E$, quindi $\mathcal{D}\cap(E\times E) = \mathcal{R}^E$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Poiché $\mathcal{D}^E \subseteq \mathcal{D}\cap(E\times E)$ e $\mathcal{R}^E \subseteq \mathcal{D}^E$, dalla ipotesi segue che $\mathcal{D}^E = \mathcal{R}^E$ cioè per il Lemma 1.8 E è una banda regolare destra. Inoltre, $\mathcal{D}\cap(E\times E) = \mathcal{R}^E = \mathcal{D}^E$ implica, per il Teorema 1.6, che S è un ortohruppo.

Sussiste, inoltre, il seguente teorema in cui l'equivalenza tra i) e iii) è nota [cfr. /5/, p. 94]

TEOREMA 1.10. -

Se S è un semigruppo ed E l'insieme degli idempotenti di S, sono equivalenti:

i) S è completamente regolare e inverso.

ii) S è regolare e $\mathcal{J}\cap(E\times E) = 1_E$

iii) S è regolare e $\mathcal{D}\cap(E\times E) = 1_E$

Dim.-

i) $\Longrightarrow$ ii) Ovviamente, un semigruppo S c.r. e inverso è regolare. Inoltre, poiché $\mathcal{D}= \mathcal{J}$ e per il Teorema 1.5 $\mathcal{J}\cap(E\times E) = \mathcal{J}^E$; ma è noto che l'insieme degli idempotenti di S è una banda commutativa (semireticolo), quindi $\mathcal{J}^E = 1_E$, pertanto $\mathcal{J}\cap(E\times E) = 1_E$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Sia S un semigruppo regolare; è immediato verificare che

$1_E \subseteq \mathscr{D} \cap (E \times E)$, inoltre, poiché $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$, $\mathscr{D} \cap (E \times E) \subseteq \mathscr{J} \cap (E \times E)$ quindi dalla ipotesi segue che $\mathscr{D} \cap (E \times E) = 1_E$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Sia a un elemento di S; poiché S è regolare esiste un elemento z di S tale che $a = aza$. Allora, poiché $az \mathscr{D} za$ ed az e za sono elementi idempotenti di S, per l'ipotesi $az = za$.

Siano x ed y due elementi di S inversi di un elemento a di S; poiché $ax \mathscr{D} ya$, $xa \mathscr{D} ay$, $ax \mathscr{D} xa$, per l'ipotesi $ax = ya, xa = ay, ax = xa$, pertanto

$$x = xax = axx = yax = yxa = yay = y.$$

Per l'arbitrarietà dell'elemento a si conclude che S è inverso e completamente regolare.

2. UNA CLASSIFICAZIONE DEGLI ORTOGRUPPI. -

In questo capitolo si caratterizzano tramite le relazioni di Green gli ortogruppi con banda degli idempotenti di tipo P, ove P è uno qualsiasi dei tipi di banda classificati da M. Petrich in /8/.

Risulta utile l'introduzione del concetto di congruenza Λ-destra [Λ-sinistra], come pure l'introduzione della banda S/ρ dove S è un ortogruppo e ρ è una congruenza Λ-destra [Λ-sinistra].

Di tutti i teoremi si sono omessi i "duali" che si ottengono scambiando $\mathscr{R}$ con $\mathscr{L}$, il termine "destra" con "sinistra" e in modo opportuno le uguaglianze presenti nella (iv) di ogni teorema.

Tutti i risultati di questo capitolo sono dovuti all'autore /12/.

Ricordiamo che se a è un elemento completamente regolare (c.r.) di un semigruppo S, si indica con $\hat{a}$ l'unità di H_a e con a^{-1} l'inverso di A in H_a.