Capitolo 7

Applicazione del calcolo dei residui

Il Teorema dei residui fornisce un modo per calcolare integrali curvilinei e anche diversi tipi di integrali di funzioni reali, senza conoscere una primitiva dell'integrando.

7.1 Calcolo di integrali curvilinei

1. Calcoliamo:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)}\, dz$$

Per calcolare l'integrale richiesto utilizziamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 applicato al disco unitario di centro -1: infatti la curva su cui è eseguito l'integrale è la frontiera di tale dominio regolare. Ora, le singolarità della funzione integranda f sono tutti e soli gli zeri (semplici) del denominatore (sono i poli semplici di f):

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad z_2 = e^{i\pi} = -1, \qquad z_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$z_4 = 2, \qquad z_5 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, \qquad z_6 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Evidentemente, l'unica singolarità di f interna a $|z+1| = 1$ è $z_2 = -1$.

Allora:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)}, -1\right)$$

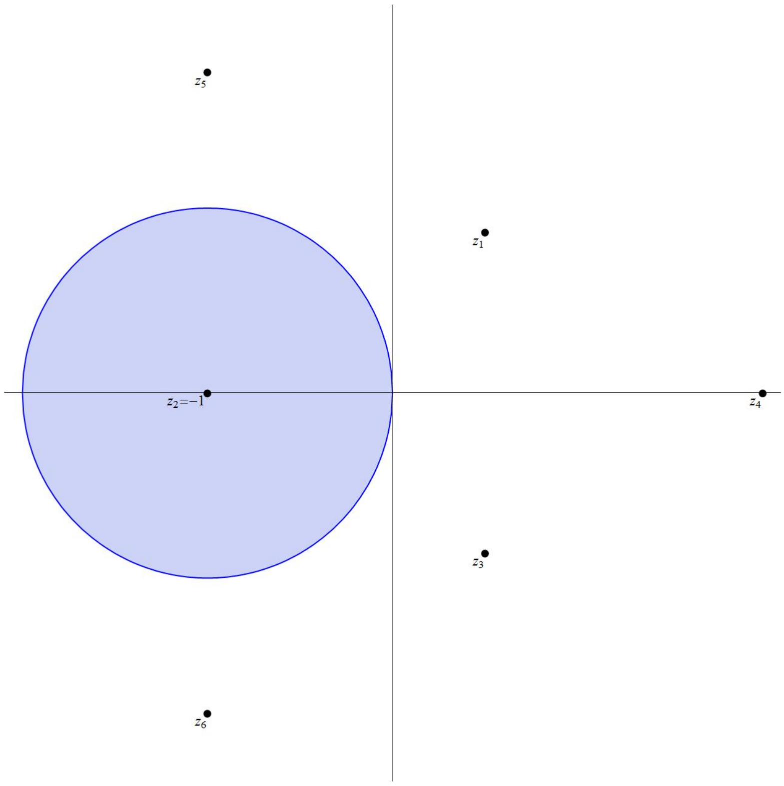


Figura 7.1: Poli semplici di f

Calcoliamo:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)}, -1\right) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)} = \\ = \lim_{z\to -1}\frac{1}{(z^2-z+1)(z^3-8)} = -\frac{1}{27}$$

Dunque, per il primo Teorema dei residui 6.3.1:

$$\int_{|z+1|=1}\frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)}\,dz = -\frac{2\pi i}{27}$$

2. Calcoliamo:

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z-e^{-z}}{z^4}\,dz$$

Esplicitiamo lo sviluppo in serie di Laurent della funzione integranda; si ha:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^5)$$
$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^5)$$

Da cui:

$$e^z - e^{-z} = 2z + \frac{z^3}{3} + o(z^5)$$

Dunque lo sviluppo in serie di Laurent della funzione integranda è:

$$\frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = 2 \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} + o(z)$$

Allora $z = 0$ è un polo del terzo ordine,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{z^4}, 0\right) = \frac{1}{3},$$

e quindi l'integrale richiesto vale, per il primo Teorema dei residui 6.3.1:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\, dz = \frac{2\pi i}{3}$$

3. Calcoliamo:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^3 z}\, dz$$

Esplicitiamo lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $1/\sin^3 z$ in un intorno di $z = 0$. Innanzitutto:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right),$$

pertanto:

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{z^3\left(1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)\right)^3}.$$

Osserviamo che il termine

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)}$$

a secondo membro si può vedere come somma della serie geometrica di ragione:

$$w := \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots$$

Pertanto, trascurando i termini di ordine superiore al terzo:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)} = 1 + \frac{z^2}{3!} + o(z^3)$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)\right)^3} = \left[1 + \frac{z^2}{3!} + o(z^3)\right]^3 = 1 + \frac{3z^2}{3!} + o(z^3)$$

dove gli unici termini di grado inferiore al terzo sono 1 e il triplo prodotto tra il quadrato di 1 e $z^2/3!$. Allora:

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{z^3}\left[1 + \frac{3z^2}{3!} + o(z^3)\right] = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{o(z^3)}{z^3}$$

L'ultimo addendo rappresenta la parte regolare di $1/\sin^3 z$ (contiene tutte le potenze ad esponente positivo dello sviluppo in serie di Laurent); osservando la parte singolare ricaviamo che $z = 0$ è polo del terzo ordine e che:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin^3 z}, 0\right) = \frac{1}{2}$$

Possiamo quindi concludere, per il primo Teorema dei residui 6.3.1, che:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^3 z}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

4. Calcoliamo:

$$\int_{+\gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z}\, dz$$

dove γ è la curva di equazione parametrica:

$$z(\vartheta) = \left(2 + \cos\frac{\vartheta}{2}\right) e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 4\pi]$$

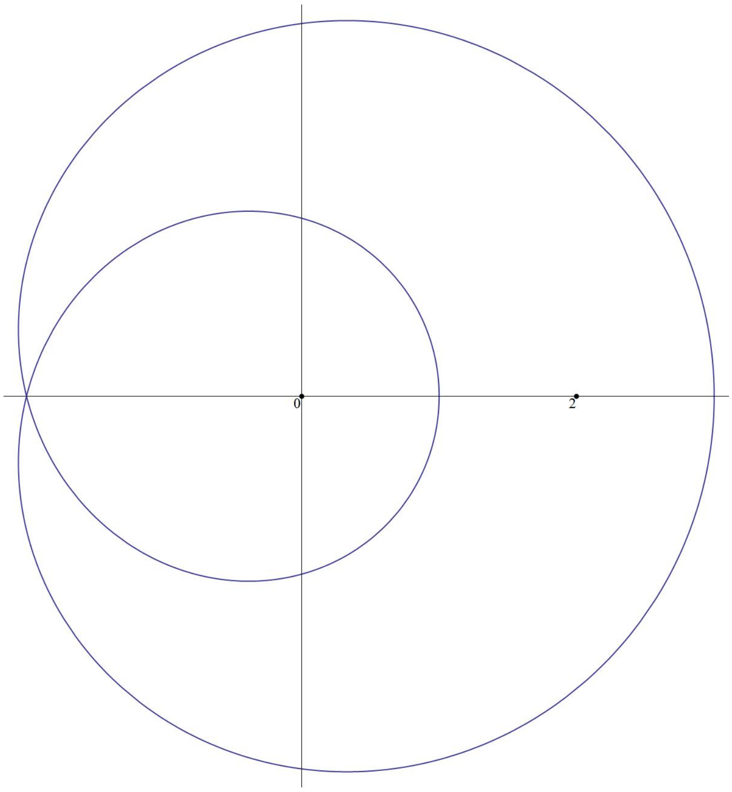


Figura 7.2: sostegno di γ

Le singolarità della funzione integranda f sono 0 e 2, entrambi poli semplici. Infatti, usando la decomposizione in frazioni parziali, si ha:

$$\frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} = z^3 + \frac{3}{z} - \frac{1}{z-2}$$

Osservato che la curva γ è chiusa ma non semplice, per calcolare l'integrale richiesto, usiamo il primo Teorema dei residui generalizzato 6.4.2:

$$\int_{+\gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z}\, dz = 2\pi i \Big[\left(n(\gamma, 0) \cdot \mathrm{Res}\,(f(z), 0)\right) + \\ + \left(n(\gamma, 2) \cdot \mathrm{Res}\,(f(z), 2)\right) \Big]$$

dove con $n(\gamma, z)$ indichiamo l'indice di avvolgimento della curva γ attorno al punto $z \notin \gamma$. Come si può notare dalla figura, si ha:

$$n(\gamma, 0) = 2, \quad n(\gamma, 2) = 1$$

I residui nei due poli semplici 0 e 2 si deducono direttamente dalla precedente decomposizione in frazioni parziali della funzione integranda e risulta:

$$\operatorname{Res}\,(f(z), 0) = 3, \quad \operatorname{Res}\,(f(z), 2) = -1$$

Pertanto:

$$\int_{+\gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z}\, dz = 10\pi i$$

7.2 Calcolo di integrali definiti tra 0 e 2π di funzioni razionali di $\cos\vartheta$ e $\sin\vartheta$

Integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta,$$

dove l'integrando è una funzione razionale di $\cos\vartheta$ e $\sin\vartheta$, possono essere ricondotti ad integrali curvilinei su $|z| = 1$ usando le formule di Eulero (1.7) e (1.8). Agli integrali curvilinei si potrà applicare poi il primo Teorema dei residui 6.3.1, come illustrato nei successivi esempi.

1. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos\vartheta}\, d\vartheta.$$

Poniamo $z = e^{i\vartheta}$. Applicando la formula di Eulero per il coseno otteniamo:

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Allora, tenuto conto che $d\vartheta = dz/iz$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos\vartheta}\, d\vartheta = \int_{|z|=1} \frac{1}{5 + 2\left(z + \dfrac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \\ = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2}\, dz$$

Quest'ultimo integrale può essere calcolato con il primo Teorema dei residui applicato alla funzione integranda (che denoteremo con f) sulla circonferenza unitaria. Le singolarità al finito di f sono i due poli semplici $z_1 = -2$ e $z_2 = -1/2$, ma solo z_2 cade nel disco unitario; risulta:

$$\operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{1}{2}\right) = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\,(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

Ne segue:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos\vartheta}\, d\vartheta = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

2. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\vartheta\, d\vartheta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Come nell'esercizio precedente, trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile $z := e^{i\vartheta}$ mediante la formula di Eulero per il coseno (1.7):

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\vartheta d\vartheta = \int_{|z|=1} \frac{1}{2^{2n}} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2^{2n} z} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz$$

Denotiamo la funzione integranda all'ultimo membro con $f(z)$. Applicando la formula del binomio di Newton, risulta:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \cdot \frac{1}{z^{2n-k}}$$

da cui si ha:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{k} \frac{1}{z^{2n-2k+1}}$$

Quest'ultima somma rappresenta lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ in un intorno di $z = 0$. Essendo $\operatorname{Res}\left(f(z), 0\right)$ il coefficiente di $\frac{1}{z}$, si ha:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f(z), 0\right) &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n!\, n!} = \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)\,(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \\
&= \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2)\,(2n \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2)} = \\
&= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.
\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\vartheta \, d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2 - 2p\cos\vartheta + 1} \, d\vartheta \quad (0 < p < 1).$$

Trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile $z := e^{i\vartheta}$ mediante la formula di Eulero per il coseno (1.7):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2 - 2p\cos\vartheta + 1} \, d\vartheta &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z - pz^2 - p + p^2 z} \, dz = \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{(z-p)(1-pz)} \, dz. \end{aligned}$$

Denotiamo la funzione integranda all'ultimo membro con $f(z)$. Tale funzione presenta due singolarità di tipo polare del primo ordine; poiché $0 < p < 1$, l'unica singolarità interna a $|z| = 1$ è $z = p$. Risulta:

$$\operatorname{Res}(f(z), p) = \lim_{z \to p} (z - p) \cdot \frac{1}{(z-p)(1-pz)} = \frac{1}{1-p^2}.$$

Allora, per 6.3.1:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-p)(1-pz)} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), p) = \frac{2\pi i}{1-p^2}.$$

In definitiva abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2 - 2p\cos\vartheta + 1} \, d\vartheta = \frac{2\pi}{1-p^2} \quad (0 < p < 1).$$

4. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos\vartheta)^2} \, d\vartheta \quad (a > b > 0).$$

Trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile $z := e^{i\vartheta}$ mediante la formula di Eulero per il coseno (1.7):

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos\vartheta)^2} \, d\vartheta = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{4z}{(bz^2 + 2az + b)^2} \, dz.$$

Denotiamo la funzione integranda all'ultimo membro con $f(z)$. Il denominatore della funzione f presenta due zeri reali del secondo ordine:

$$z_1 = -\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad z_2 = -\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Osservato che $z_1 \cdot z_2 = 1$ e che, essendo $a > b > 0$, z_1 è esterno alla circonferenza unitaria, e (di conseguenza) z_2 è interno alla circonferenza unitaria, calcoliamo solo il residuo di f in z_2:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,(f(z), z_2) &= \lim_{z \to z_2} \frac{d}{dz}\left[(z - z_2)^2 \cdot \frac{4z}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2}\right] = \\
&= \lim_{z \to z_2} \frac{d}{dz} \frac{4z}{b^2(z - z_1)^2} = \lim_{z \to z_2} \frac{4(z - z_1) - 8z}{b^2(z - z_1)^3} = \\
&= \frac{a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

In definitiva:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos\vartheta)^2}\, d\vartheta &= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{4z}{(bz^2 + 2az + b)^2}\, dz = \\
&= 2\pi \mathrm{Res}\,(f(z), z_2) = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

5. Calcolare:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \sin\vartheta}\, d\vartheta.$$

7.3 Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali

La seguente proposizione riguarda il calcolo di integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx.$$

Proposizione 7.3.1 (Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali). *Siano $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi a coefficienti reali di grado rispettivamente m e $n \geq m + 2$; supponiamo inoltre $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora la funzione razionale*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

è integrabile su $\mathbb{R}$ *e*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right), \tag{7.1}$$

dove i punti z_j *sono gli zeri di* $Q(z)$ *con* $Im(z_j) > 0$ *(*$j = 1, 2, ...\nu$*).*

Dimostrazione. Trattandosi di funzioni razionali a coefficienti reali, perché $Q(x)$ abbia solo zeri complessi n dev'essere pari, $n = 2\nu$, ed allora le radici si presentano a coppie coniugate.

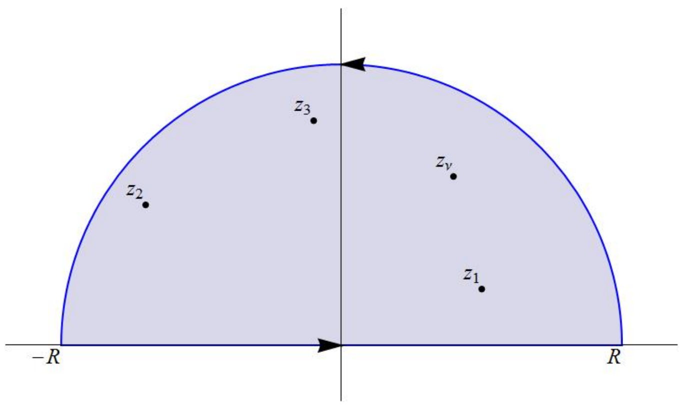
Sia $R > 0$ sufficientemente grande in modo che $B_R(0)$ contenga tutte le n radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $Q(z)$. Siano $z_1, \ldots, z_\nu$ le radici di $Q(z)$ con parte immaginaria strettamente positiva e consideriamo l'insieme:

$$D := \overline{B}_R(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) \geq 0\}.$$

D è un dominio regolare; allora per 6.3.1 vale:

$$\int_{+\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right).$$

Ora, la frontiera di D è unione dell'intervallo $[-R, R]$ e della semicirconferenza $\gamma_R^+(0)$, con orientazione come in figura:



Perciò:

$$\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right).$$

Per provare la tesi, dimostriamo che:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0$$

Ora $\gamma_R^+(0)$ ha rappresentazione parametrica:

$$z(\vartheta) = Re^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

perciò:

$$\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \int_0^\pi \frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} iRe^{i\vartheta}\, d\vartheta.$$

Per l'ipotesi:

$$\frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} = o\left(\frac{1}{R^2}\right);$$

Ne deduciamo che, per $R \to +\infty$:

$$\frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} iRe^{i\vartheta} = o\left(\frac{1}{R}\right);$$

perciò l'integrale lungo la semicirconferenza è infinitesimo per $R \to +\infty$, il che prova la proposizione. □

Osservazione 7.3.2. Evidenziamo che la dimostrazione è consistita nell'aggiungere all'intervallo limitato $[-R, R]$ (con $R > 0$ sufficientemente grande) della retta reale una semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine. In tal modo è formata una curva regolare, semplice e chiusa, frontiera di un dominio regolare cui si applica il teorema dei residui. Successivamente si passa al limite per $R \to +\infty$.

1. Calcoliamo:

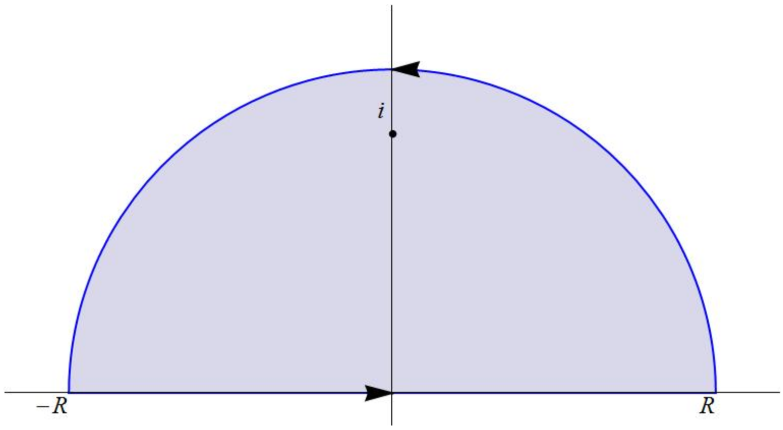
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}.$$

Tale funzione presenta due poli semplici in corrispondenza degli zeri del denominatore:

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i$$



Per 7.3.1, consideriamo i poli con parte immaginaria positiva, in questo caso solo $z_1 = i$, e fissiamo un semidisco di raggio $R > |i| = 1$.

Risulta:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i).$$
Il residuo di f in i vale:
$$\lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$
In definitiva:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

2. Calcoliamo
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$
Consideriamo la funzione di variabile complessa
$$f(z) := \frac{1}{1+z^4}.$$
Gli zeri del denominatore sono le radici quarte di -1, cioè:
$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$
$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i).$$

Si tratta di poli semplici per f. Considerando i due poli a parte immaginaria positiva (ovvero z_0 e z_1), dalla 7.3.1 si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1) \right].$$

Calcoliamo i residui di f in z_0 e z_1:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{4z^3} = -\frac{z_0}{4}, \\ \mathrm{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \to z_1} \frac{1}{4z^3} = -\frac{z_1}{4}. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

(vedere l'esercizio **3** del paragrafo 7.7).

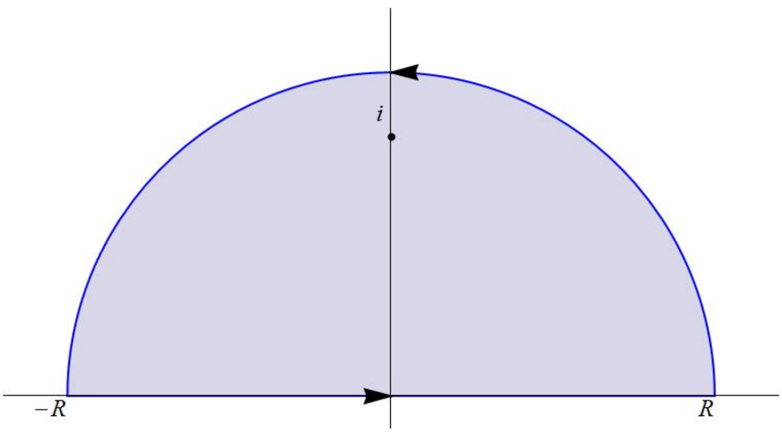
3. Calcoliamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

Essa ha in $z_1 = i$ e in $z_2 = -i$ due poli del secondo ordine; applichiamo il primo teorema dei residui 6.3.1 alla funzione f sul semidisco di raggio $R > 1$ in figura:



Per 6.2.1, abbiamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right) &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2}\cdot (z-i)^2\right] = \\ &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i} -\frac{2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale da calcolare vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

4. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\, dx$$

Osserviamo che la funzione integranda è pari, pertanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\, dx$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) := \frac{z^2}{(1+z^2)^3}$$

che ha un polo del terzo ordine in $z = i$. Allora, per 7.3.1:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(f(z), i\right)$$

Calcoliamo il residuo richiesto:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f(z), i\right) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^2}{(1+z^2)^3}\cdot (z-i)^3\right] = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^2}{(z+i)^3}\right] = -\frac{i}{16}\end{aligned}$$

In definitiva:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{\pi}{16}.$$

7.4 Teoremi di Jordan del grande e del piccolo cerchio. Lemma di Jordan

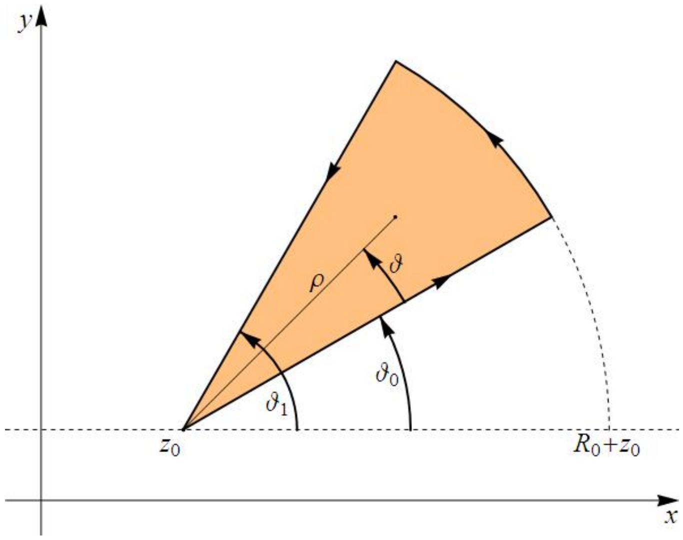
Nelle applicazioni risultano utili i seguenti risultati di Jordan, grazie ai quali, in molti casi, si possono calcolare i limiti per $R \to +\infty$ o per $r \to 0^+$ di integrali su archi di circonferenza nel piano complesso di raggi R o r.

Teorema 7.4.1 (di Jordan, del grande cerchio)**.** *Sia $\gamma_{R_0}(z_0)$ un arco di circonferenza di raggio $R_0 > 0$ e centro in z_0, limitato agli estremi dalle semirette per z_0 di anomalia ϑ_0 e ϑ_1 ($\vartheta_0 < \vartheta_1$). Se, $f(z)$ essendo olomorfa su $\gamma_R(z_0)$ per $\vartheta_0 \le \vartheta \le \vartheta_1$ e per ogni $R \ge R_0$, si ha uniformemente rispetto a ϑ*

$$\lim_{z\to\infty} (z - z_0)\, f\,(z) = l \in \mathbb{C}$$

allora risulta

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z)dz = il\,(\vartheta_1 - \vartheta_0)\,.$$



Dimostrazione. L'equazione parametrica di $\gamma_R(z_0)$ è:

$$z = z_0 + Re^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1]\,.$$

Risulta

$$\int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{1}{Re^{i\vartheta}} iRe^{i\vartheta} d\vartheta = i\,(\vartheta_1 - \vartheta_0) \tag{7.2}$$

e

$$\int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{|dz|}{|z-z_0|} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{1}{R} \cdot R\, d\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_0. \tag{7.3}$$

Per ipotesi, fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, esiste $k > 0$ tale che, per $|z - z_0| > k$, si ha:

$$|(z - z_0)\, f(z) - l| < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Allora, per $R > k$ otteniamo, tenuto conto di (7.2) e (7.3):

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z)dz - il\,(\vartheta_1 - \vartheta_0) \right| = \\
&= \left| \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z)dz - l \int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz \right| = \\
&= \left| \int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} \left[f(z)(z - z_0) - l \right] dz \right| \leq \\
&\leq \int_{+\gamma_R(z_0)} |f(z)(z - z_0) - l| \left| \frac{dz}{z - z_0} \right| < \\
&< \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{|dz|}{|z - z_0|} = \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} (\vartheta_1 - \vartheta_0) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Per definizione di limite, quindi:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z)dz = il\,(\vartheta_1 - \vartheta_0)\,,$$

il che prova il teorema. □

Teorema 7.4.2 (di Jordan, del piccolo cerchio)**.** *Sia $\gamma_{r_0}(z_0)$ un arco di circonferenza di raggio $r_0 > 0$ e centro in z_0, limitato agli estremi dalle semirette per z_0 di anomalia ϑ_0 e ϑ_1 ($\vartheta_0 < \vartheta_1$). Se, $f(z)$ essendo olomorfa su $\gamma_r(z_0)$ per $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$ e per ogni $0 < r \leq r_0$, si ha uniformemente rispetto a ϑ*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f\,(z) = l \in \mathbb{C}$$

allora risulta

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{+\gamma_r(z_0)} f(z)dz = il\,(\vartheta_1 - \vartheta_0)\,.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per $0 < r = |z - z_0| < \delta$, si ha:

$$|(z - z_0)\, f(z) - l| < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Allora, per $r < \delta$, tenuto conto di (7.2) e (7.3), risulta:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{+\gamma_r(z_0)} f(z)dz - il\,(\vartheta_1 - \vartheta_0)\right| = \\
&= \left|\int_{+\gamma_r(z_0)} f(z)\,dz - l\int_{+\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z-z_0}dz\right| = \\
&= \left|\int_{+\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z-z_0}\,[f(z)(z-z_0) - l]\,dz\right| \leq \\
&\leq \int_{+\gamma_r(z_0)} |f(z)(z-z_0) - l|\left|\frac{dz}{z-z_0}\right| < \\
&< \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0}\int_{+\gamma_r(z_0)} \frac{|dz|}{|z-z_0|} = \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0}(\vartheta_1 - \vartheta_0) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Per definizione di limite, quindi:

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{+\gamma_r(z_0)} f(z)\,dz = il\,(\vartheta_1 - \vartheta_0)\,,$$

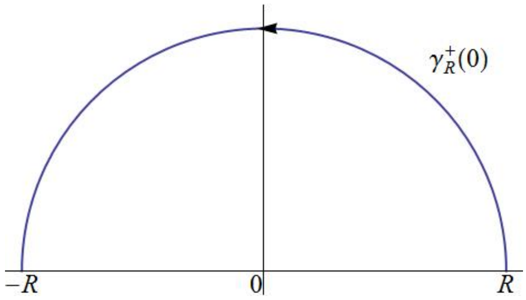
il che prova il teorema. □

Lemma 7.4.3 (di Jordan)**.** *Sia $\gamma_{R_0}(0)$ un arco di circonferenza di raggio $R_0 > 0$ e centro in 0, limitato agli estremi dalle semirette per 0 di anomalia ϑ_0 e ϑ_1 ($\vartheta_0 < \vartheta_1$). Se, $f(z)$ essendo olomorfa su $\gamma_R(0)$ per $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$ e per ogni $R \geq R_0$, si ha uniformemente rispetto a ϑ*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0,$$

allora si hanno i seguenti risultati:

(i) *se $\vartheta_0 = 0$ e $\vartheta_1 = \pi$,*

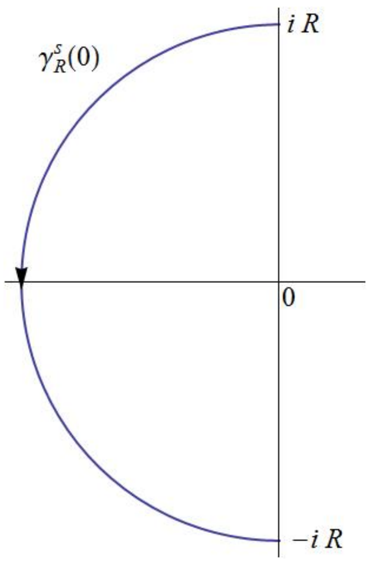


risulta

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{+\gamma_R^+(0)} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0 \quad \forall\alpha > 0,$$

dove $\gamma_R^+(0)$ *è la semicirconferenza superiore;*

(ii) *se* $\vartheta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *e* $\vartheta_1 = \frac{3}{2}\pi$,

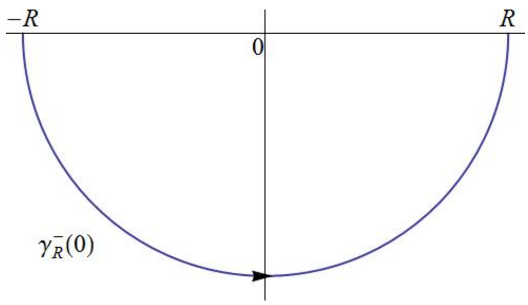


risulta

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{+\gamma_R^s(0)} f(z)e^{\alpha z}dz = 0 \quad \forall\alpha > 0,$$

dove $\gamma_R^s(0)$ *è la semicirconferenza a sinistra;*

(iii) *se* $\vartheta_0 = \pi$ *e* $\vartheta_1 = 2\pi$,

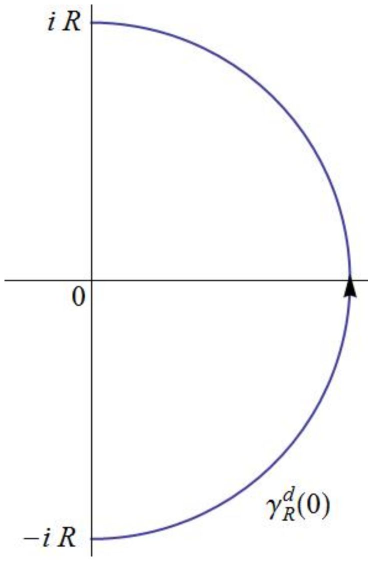


risulta

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{+\gamma_R^-(0)} f(z)e^{-i\alpha z}dz = 0 \quad \forall\alpha > 0,$$

dove $\gamma_R^-(0)$ *è la semicirconferenza inferiore;*

(iv) *se* $\vartheta_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ *e* $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$,



risulta

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{+\gamma_R^d(0)} f(z)e^{-\alpha z}dz = 0 \quad \forall\alpha > 0,$$

dove $\gamma_R^d(0)$ *è la semicirconferenza a destra.*

Dimostrazione.

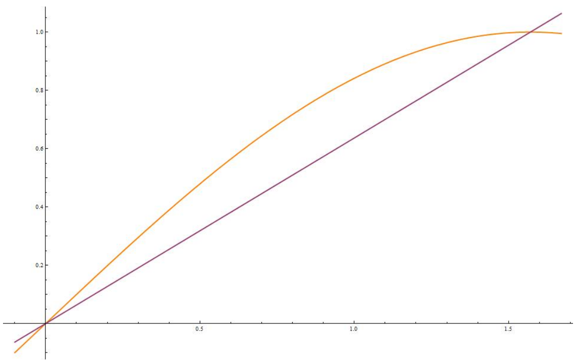
(i) Consideriamo la rappresentazione parametrica di $\gamma_R^+(0)$:

$$z(\vartheta) = Re^{i\vartheta} = R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \quad \vartheta\in[0,\pi]\,.$$

Vale:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{+\gamma_R^+(0)} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| &= \left|\int_0^\pi f(Re^{i\vartheta})e^{i\alpha R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} \cdot Rie^{i\vartheta}d\vartheta\right| = \\
&= \left|\int_0^\pi f(Re^{i\vartheta})e^{i\alpha R\cos\vartheta} \cdot e^{-\alpha R\sin\vartheta} \cdot Rie^{i\vartheta}d\vartheta\right| \leq \\
&\leq \int_0^\pi \sup_{z\in\gamma_R^+(0)} |f(z)|e^{-\alpha R\sin\vartheta} \cdot Rd\vartheta = \\
&= 2R \sup_{z\in\gamma_R^+(0)} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\vartheta}d\vartheta.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Risulta $\sin\vartheta \geq \dfrac{2}{\pi}\vartheta$ per $\vartheta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (considerare il grafico di $\sin\vartheta$ e la congiungente i punti $(0,0)$ e $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$, di equazione $y = \dfrac{2}{\pi}\vartheta$).



Da (7.4) segue:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{+\gamma_R^+(0)} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| &\leq 2R \sup_{z\in\gamma_R^+(0)} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\left(\frac{2}{\pi}\vartheta\right)}d\vartheta = \\
&= 2R \sup_{z\in\gamma_R^+(0)} |f(z)| \cdot \pi \cdot \frac{1-e^{-\alpha R}}{2\alpha R}.
\end{aligned}$$

Poiché per ipotesi

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{z\in\gamma_R^+(0)} |f(z)| = 0$$

e $\alpha > 0$ per ipotesi, per $R \to +\infty$ otteniamo la tesi.

(ii) Consideriamo la rappresentazione parametrica di $\gamma_R^s(0)$:

$$z(\vartheta) = Re^{i\vartheta} = R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \quad \vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right].$$

Vale:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{+\gamma_R^s(0)} f(z)e^{\alpha z}dz\right| &= \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(Re^{i\vartheta})e^{\alpha R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} \cdot Rie^{i\vartheta}d\vartheta\right| = \\
&= \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(Re^{i\vartheta})e^{\alpha R\cos\vartheta} \cdot e^{i\alpha R\sin\vartheta} \cdot Rie^{i\vartheta}d\vartheta\right| \leq \\
&\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sup_{z\in\gamma_R^s(0)} |f(z)|e^{\alpha R\cos\vartheta} \cdot Rd\vartheta \overset{\vartheta' = \vartheta - \frac{\pi}{2}}{\downarrow}{=} \\
&= R \sup_{z\in\gamma_R^s(0)} |f(z)| \int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\vartheta'}d\vartheta' = \\
&= 2R \sup_{z\in\gamma_R^s(0)} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\vartheta'}d\vartheta' \leq \\
&\leq 2R \sup_{z\in\gamma_R^s(0)} |f(z)| \cdot \pi \cdot \frac{1-e^{-\alpha R}}{2\alpha R} \to 0
\end{aligned}$$

per $R \to +\infty$.

I casi (iii) e (iv) sono lasciati da dimostrare per esercizio. □

7.5 Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali moltiplicate per una funzione esponenziale. Formula di Heaviside

Il risultato che segue riguarda il calcolo di integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dx, \quad \alpha > 0.$$

Proposizione 7.5.1. *Siano $P(x)$, $Q(x)$ polinomi a coefficienti reali di grado rispettivamente m e $n \geq m+2$ e sia $\alpha > 0$; supponiamo, inoltre, $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}\left(\frac{P(z)e^{i\alpha z}}{Q(z)}, z_j\right), \tag{7.5}$$

dove i punti z_j sono gli zeri di $Q(z)$ con $Im(z_j) > 0$ $(j = 1, \ldots, \nu)$.

Dimostrazione. Sia $R > 0$ sufficientemente grande in modo che $B_R(0)$ contenga tutte le n, $n = 2\nu$, radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $Q(z)$. Siano $z_1, \ldots, z_\nu$ le radici di $Q(z)$ con parte immaginaria strettamente positiva e consideriamo l'insieme:

$$D := \overline{B}_R(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \; Im(z) \geq 0\}\,.$$

D è un dominio regolare; allora per 6.3.1 vale:

$$\int_{+\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j\right).$$

Poiché $+\partial D = (+\gamma_R^+(0)) \cup [-R, R]$, si ha:

$$\underbrace{\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx}_{\text{(II)}} = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j\right).$$

Passando al limite per $R \to +\infty$, l'integrale (I) è infinitesimo, per 7.4.3 punto (i), mentre l'integrale (II) tende all'integrale improprio in (7.5), da cui la tesi. □

Corollario 7.5.2 (Formula di Heaviside)**.** *Sotto le stesse ipotesi di 7.5.1, se gli zeri $z_1, \ldots, z_\nu$ di $Q(z)$ con $Im(z_j) > 0$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ sono semplici, vale la seguente formula di Heaviside:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \frac{P(z_j) e^{i\alpha z_j}}{Q'(z_j)}. \tag{7.6}$$

Dimostrazione. Poiché z_j è polo semplice, da (6.5) si ottiene:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j\right) = \frac{P(z_j) e^{i\alpha z_j}}{Q'(z_j)}.$$

□

1. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx, \quad \alpha > 0.$$

La funzione integranda presenta due singolarità polari del primo ordine, i e $-i$; applicando 7.5.2 risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+1} dx = 2\pi i \left[\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\right]_{z=i} = \pi e^{-\alpha}.$$

Osserviamo che, esplicitando l'esponenziale complesso in termini di seno e coseno, otteniamo:

$$\pi e^{-\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)}{x^2+1} dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+1} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2+1} dx.$$

Eguagliando parte reale e immaginaria di primo e ultimo membro si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+1} dx = \pi e^{-\alpha}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2+1} dx = 0 \quad (\alpha > 0).$$

Osservazione 7.5.3. Dalla considerazione precedente, si evince come calcolare *integrali impropri di funzioni reali razionali moltiplicate per le funzioni coseno o seno.* In generale, basta osservare che, per l'integrando in (7.5), si ha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x) + i \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\alpha x).$$

7.6 Integrandi che presentano singolarità sulla retta reale

Finora abbiamo assunto che l'integrando f non abbia singolarità sulla retta reale; ciò ha consentito di integrare f sull'asse reale. Modificando la curva di integrazione, possiamo eliminare tale richiesta, come illustrato negli esempi che seguono.

1. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

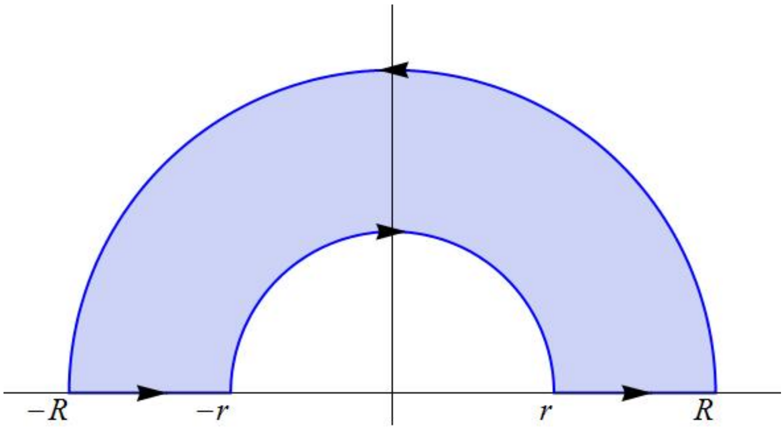
L'integrale proposto è improprio, definito come il limite di

$$\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} dx$$

per $R \to +\infty$. Osserviamo che la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ è integrabile in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

nella semicorona circolare contenuta nel semipiano positivo $C^+(0, r, R)$: in tale dominio regolare f è olomorfa, allora per il Teorema dell'inte-



grale nullo di Cauchy 2.8.3:

$$\int_{+\partial C^+(0,r,R)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

La frontiera di $C^+(0, r, R)$ orientata positivamente è così formata:

$$+\partial C^+(0, r, R) = [r, R] \cup \big(+\gamma_R^+(0)\big) \cup [-R, -r] \cup \big(-\gamma_r^+(0)\big)$$

Allora:

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \tag{7.7}$$

Osserviamo che:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\int_{-r}^{-R} \frac{e^{ix}}{x} dx \overset{t=-x}{\underset{\downarrow}{=}} -\int_r^R \frac{e^{-it}}{-t}(-dt) \overset{x=t}{\underset{\downarrow}{=}} -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

Sostituendo in (7.7) risulta:

$$\begin{aligned}\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz &= -\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx = \\ &= -2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx,\end{aligned} \tag{7.8}$$

dove abbiamo utilizzato la formula di Eulero per la funzione seno (1.8). Ora, applicando il lemma 7.4.3(i) e il teorema 7.4.2 si ha:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{+\gamma_R^+(0)}\frac{e^{iz}}{z}dz = o, \quad \lim_{r\to 0^+}\int_{+\gamma_r^+(0)}\frac{e^{iz}}{z}dz = i\pi. \tag{7.9}$$

Facendo tendere $R \to +\infty$ e $r \to 0^+$ in (7.8), tenuto conto delle (7.9) otteniamo:

$$-i\pi = -2i\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx \;\Rightarrow\; \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Poiché la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ è pari, abbiamo in definitiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi.$$

2. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$$

Applicando la formula di Eulero per la funzione seno (1.8):

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}}{8i} = \\ = -\frac{1}{4}[\sin(3x) - 3\sin x],$$

e quindi:

$$\frac{\sin^3 x}{x^3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(3x)-3\sin x}{x^3}.$$

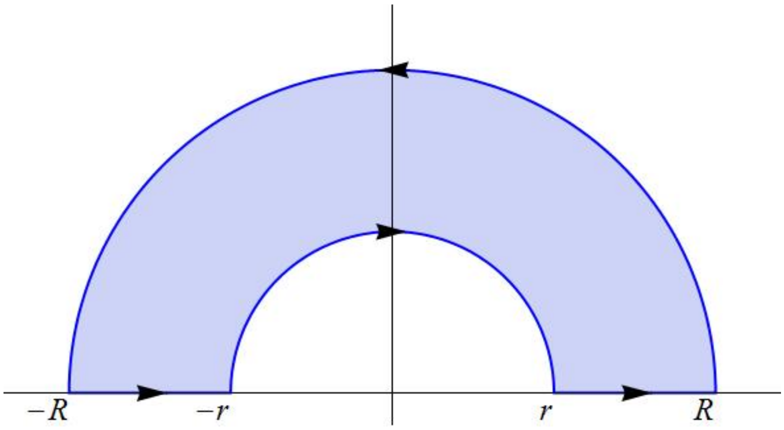
Consideriamo allora la funzione (che presenta al numeratore uno zero in $z = 0$):

$$f(z) := \frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}$$

sulla semicorona circolare D in figura:

Poiché $f(z)$ è olomorfa in D, per il Teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:

$$\int_{+\partial D}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz = 0$$



Scomponendo l'integrale lungo i tratti regolari di ∂D, otteniamo:

$$\int_r^R \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+2}{x^3}\,dx+\int_{+\gamma_R^+(0)}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz+$$
$$+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+2}{x^3}\,dx-\int_{+\gamma_r^+(0)}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz=0$$

dove abbiamo indicato con $\gamma_R^+(0)$ e $\gamma_r^+(0)$ la semicirconferenza esterna e la semicirconferenza interna (rispettivamente). Ne segue:

$$\int_r^R \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+2}{x^3}\,dx-\int_r^R \frac{e^{-3ix}-3e^{-ix}+2}{x^3}\,dx=$$
$$=-\int_{+\gamma_R^+(0)}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz+\int_{+\gamma_r^+(0)}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz$$

da cui:

$$\begin{aligned}&2i\int_r^R\frac{\sin(3x)-3\sin x}{x^3}\,dx=\\&=-\int_{+\gamma_R^+(0)}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz+\int_{+\gamma_r^+(0)}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz.\end{aligned}\tag{7.10}$$

Ora:

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}=0$$

perché il numeratore è limitato nel semipiano delle y positive. Applicando la regola di L'Hôpital otteniamo:

$$\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}=-3$$

Allora, per il teorema del grande cerchio 7.4.1:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{+\gamma_R^+(0)}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz=0 \tag{7.11}$$

e, per il teorema del piccolo cerchio 7.4.2:

$$\lim_{r\to0^+}\int_{+\gamma_r^+(0)}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz=-3\pi i \tag{7.12}$$

Per $r\to0^+$ e $R\to+\infty$, da (7.10), per (7.11) e (7.12), si ha:

$$2i\int_0^{+\infty}\frac{\sin(3x)-3\sin x}{x^3}\,dx=-3\pi i$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx=\frac{3}{8}\pi.$$

3. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3(x^2+1)}\,dx.$$

Tenendo presente che $x-\sin x=o(x^3)$, la funzione integranda è integrabile in $[0,+\infty[$. Ora,

$$x-\sin x=Re\left(x+ie^{ix}\right),$$

pertanto consideriamo la funzione (che presenta al numeratore uno zero in $z=0$):

$$f(z):=\frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)}$$

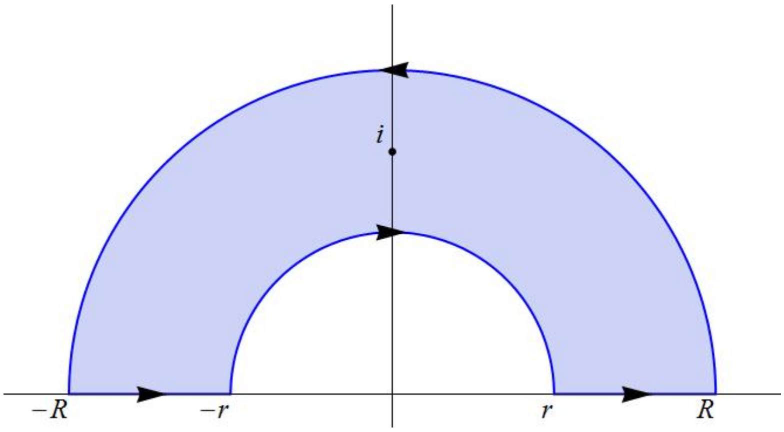
sulla semicorona circolare D in figura:

con $r<1<R$. La funzione $f(z)$ presenta in D una sola singolarità: il polo semplice $z=i$. Per il primo Teorema dei residui:

$$\int_{+\partial D}\frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)}\,dz=2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)},i\right)=2\pi i\cdot\frac{ie^{-1}}{2},$$

essendo

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)},i\right)=\frac{ie^{-1}}{2}$$



Scomponendo l'integrale lungo i tratti regolari di ∂D, otteniamo:

$$\int_r^R \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+1)}\,dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+1)}\,dx +$$
$$- \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)}\,dz = -\frac{\pi}{e}.$$

dove abbiamo indicato con $\gamma_R^+(0)$ e $\gamma_r^+(0)$ la semicirconferenza esterna e la semicirconferenza interna (rispettivamente). Ne segue:

$$\begin{aligned} 2\int_r^R \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+1)}\,dx &= \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)}\,dz + \\ &- \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)}\,dz - \frac{\pi}{e} \end{aligned} \tag{7.13}$$

Allora, per il teorema del grande cerchio 7.4.1:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)}\,dz = 0 \tag{7.14}$$

e, per il teorema del piccolo cerchio 7.4.2:

$$\lim_{r\to0^+} \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{z+ie^{iz}-i}{z^3(z^2+1)}\,dz = \frac{\pi}{2} \tag{7.15}$$

Per $r \to 0^+$ e $R \to +\infty$, da (7.13), per (7.14) e (7.15), si ha:

$$2\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{e}$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right].$$

4. Calcoliamo il *valor principale (v.p.)* del seguente integrale improprio[1]:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} dx.$$

La funzione integranda è un infinitesimo di ordine 3 sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$, ma per $x \to -1$ è un infinito del primo ordine.

[1] *Integrali impropri e loro valor principale (v.p.) secondo Cauchy.*

Definizione 7.6.1. Sia f definita sulla retta reale e consideriamo l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Consideriamo i limiti:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\, dx \tag{7.16}$$

e

$$\lim_{R_1 \to +\infty} \int_{-R_1}^{0} f(x)\, dx + \lim_{R_2 \to +\infty} \int_0^{R_2} f(x)\, dx. \tag{7.17}$$

Se il limite (7.16) esiste, esso si chiama valor principale secondo Cauchy dell'integrale improprio e si scrive:

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\, dx.$$

Se il limite (7.17) esiste, si dice che l'integrale improprio converge e si scrive:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R_1 \to +\infty} \int_{-R_1}^{0} f(x)\, dx + \lim_{R_2 \to +\infty} \int_0^{R_2} f(x)\, dx.$$

Osservazione 7.6.2. Se esiste il limite (7.17) allora esiste il limite (7.16) e vale l'uguaglianza

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

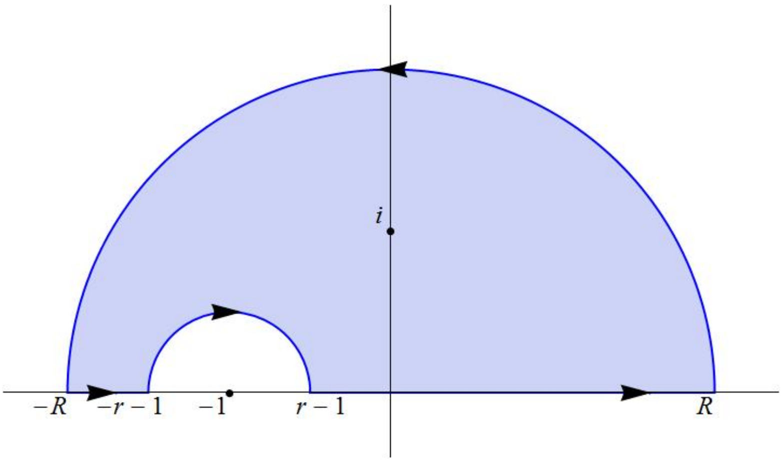
Tuttavia, l'esistenza di (7.16) non implica in generale l'esistenza di (7.17). Infatti

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx = 0$$

ma non esistono i due limiti

$$\lim_{R_1 \to +\infty} \int_{-R_1}^{0} x\, dx, \qquad \lim_{R_2 \to +\infty} \int_0^{R_2} x\, dx.$$

Pertanto la funzione integranda è integrabile in un intorno di $\pm\infty$, ma non è integrabile in un intorno del punto -1. Oltre che in -1, il denominatore si annulla in i e $-i$ (zeri semplici). Consideriamo un dominio regolare a cui applicare il primo Teorema dei residui 6.3.1 che non contenga il punto -1. Una scelta naturale è quella di considerare un semidisco del semipiano superiore centrato in 0 e di raggio $R > 1$ (contenente i), privato di un semidisco centrato in -1 e di raggio $r < 1$ sufficientemente piccolo.



Detto $D_{r,R}$ tale insieme, applichiamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 a

$$f(z) := \frac{1}{(z^2+1)(z+1)}$$

in $D_{r,R}$ (dominio regolare):

$$\int_{+\partial D_{r,R}} \frac{1}{(z^2+1)(z+1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i)$$

Ripartendo la frontiera di $D_{r,R}$ e considerandone l'orientazione positiva, come in figura, otteniamo:

$$\begin{aligned} &\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{1}{(z^2+1)(z+1)} dz + \int_{-R}^{-1-r} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} dx + \\ &- \int_{+\gamma_r^+(-1)} \frac{1}{(z^2+1)(z+1)} dz + \int_{-1+r}^{R} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} dx = \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2(i-1)} \end{aligned} \tag{7.18}$$

essendo:

$$Res(f,i) = \frac{1}{2i-2}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} &\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{1}{(z^2+1)(z+1)}dz \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\int_{+\gamma_r^+(-1)} \frac{1}{(z^2+1)(z+1)}dz \overset{r\to 0^+}{\longrightarrow} i\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \tag{7.19}$$

per 7.4.1 e 7.4.2 rispettivamente. Quindi, per $R \to +\infty$ e $r \to 0^+$, da (7.18), per (7.19), otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}dx + \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}dx = \frac{\pi}{2},$$

pertanto

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Calcoliamo il valor principale del seguente integrale improprio:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}dx. \tag{7.20}$$

La funzione integranda è integrabile in un intorno di $\pm\infty$, ma non è integrabile in un intorno del punto 1, poiché è infinitesima di ordine 3 per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$, ma per $x \to 1$ è un infinito del primo ordine. Consideriamo la funzione

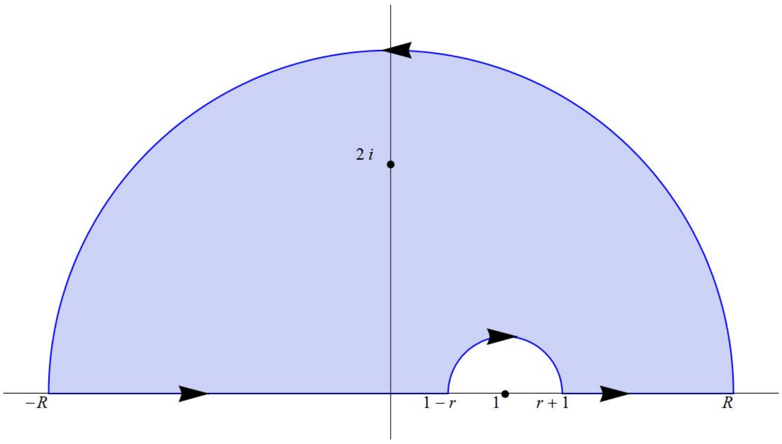
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)};$$

1, $2i$ e $-2i$ sono zeri semplici del denominatore.

Consideriamo il dominio regolare $D_{R,r}$ come in figura ($R > 2$ e $r < 1$).

Applichiamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 a $f(z)$ in $D_{R,r}$:

$$\int_{+\partial D_{R,r}} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), 2i)$$



Poiché $z = 2i$ è polo semplice per $f(z)$, si ha:

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)} = \frac{e^{-2}}{4i(2i-1)}.$$

Ripartendo la frontiera di $D_{R,r}$ e considerandone l'orientazione positiva come in figura, otteniamo:

$$\begin{aligned}&\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}\,dz + \int_{-R}^{1-r} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x-1)}\,dx +\\ &-\int_{+\gamma_r^+(1)} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}\,dz + \int_{1+r}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x-1)}\,dx = \\ &= \frac{\pi}{2e^2(2i-1)} = -\frac{\pi(2i+1)}{10e^2}.\end{aligned} \tag{7.21}$$

Da 7.4.3(i) e 7.4.2 segue:

$$\begin{aligned}&\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}\,dz \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0\\ &\int_{+\gamma_r^+(1)} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}\,dz \overset{r\to 0^+}{\longrightarrow} i\frac{e^i\pi}{5}.\end{aligned} \tag{7.22}$$

Allora, per $R \to +\infty$ e $r \to 0^+$ in (7.21) e tenuto conto di (7.22), risulta (essendo $e^i = \cos 1 + i \sin 1$):

$$\begin{aligned}&(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x-1)}dx = \\ &= \frac{i\pi e^i}{5} - \frac{\pi(2i+1)}{10e^2} = -\pi\,\frac{2e^2\sin 1 + 1}{10e^2} + i\left(2\pi\,\frac{e^2\cos 1 - 1}{10e^2}\right).\end{aligned}$$

Il valor principale (7.20) è dato dalla parte immaginaria dell'integrale precedente:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)} dx = 2\pi \, \frac{e^2 \cos 1 - 1}{10e^2}$$

e quindi:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x-1)} dx = -\pi \, \frac{2e^2 \sin 1 + 1}{10e^2}.$$

7.7 Integrali di funzioni polidrome

1. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2} \, dx \quad (a > 0)$$

La funzione integranda è integrabile su $[0, +\infty[$ in quanto per $x \to 0^+$ è infinita di ordine arbitrariamente piccolo e per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine maggiore di 1. Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) := \frac{\log z}{z^2+a^2}$$

e scegliamo per l'argomento principale di z la limitazione $\text{Arg}z \in [0, 2\pi[$ (cioè log è definito nell'insieme semplicemente connesso $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$). Il punto $z = 0$ è di diramazione per la funzione f, che presenta due poli semplici in ia e $-ia$. Consideriamo il dominio regolare D in figura ($r < a < R$).

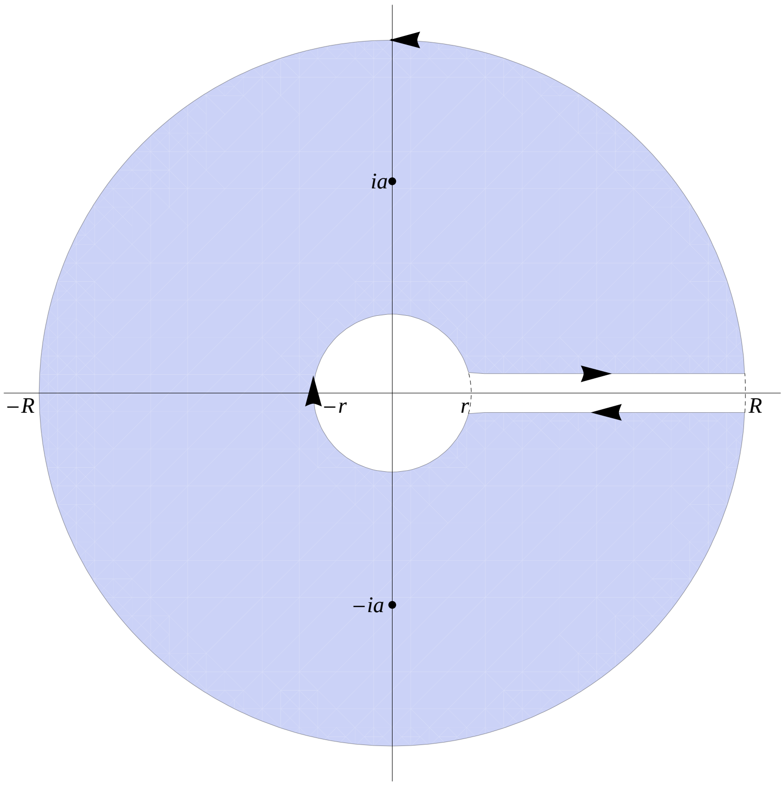
Applicando il primo Teorema dei residui 6.3.1 si ha:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log z}{z^2+a^2} \, dz = 2\pi i \left[\text{Res}\,(f(z), ia) + \text{Res}\,(f(z), -ia)\right] \tag{7.23}$$

Vale:

$$\text{Res}\,(f(z), ia) = \frac{\log a + \frac{\pi}{2} \cdot i}{2ia},$$

$$\text{Res}\,(f(z), -ia) = -\frac{\log a + \frac{3\pi}{2} \cdot i}{2ia}$$



da cui:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log z}{z^2+a^2}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{\log a + \frac{\pi}{2}\cdot i - \log a - \frac{3\pi}{2}\cdot i}{2ia} = -\frac{\pi^2}{a} i \quad (7.24)$$

Per i teoremi di Jordan del piccolo e grande cerchio 7.4.2 e 7.4.1, per $r \to 0^+$ e $R \to +\infty$ si ha:

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{-\partial B_r(0)} f(z)\,dz = 0,$$

$$\lim_{R\to +\infty} \int_{+\partial B_R(0)} f(z)\,dz = 0.$$

Perciò, facendo tendere $r \to 0$ e $R \to +\infty$, da (7.23) e (7.24), otteniamo:

$$\int_{+\partial D} f(z)\,dz = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{x^2+a^2}\,dz = -\frac{\pi^2}{a} i$$

dove il secondo addendo al numeratore del secondo integrale è dovuto al fatto che si è compiuto un giro intorno all'origine (punto di diramazione per la funzione logaritmo naturale). Ora:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{x^2+a^2}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{2\pi i}{x^2+a^2}\,dx =$$
$$= -\frac{2\pi i}{a}\left[\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{+\infty} = -\frac{2\pi i}{a}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{a}i$$

e quindi abbiamo, in conclusione, l'ovvia identità:

$$-\frac{\pi^2}{a}i = -\frac{\pi^2}{a}i$$

e non abbiamo ottenuto informazioni utili al calcolo dell'integrale proposto.

L'analisi di quanto rilevato con la precedente scelta di $f(z)$ porta a considerare la funzione:

$$f(z) := \frac{\log^2 z}{z^2+a^2}$$

sullo stesso dominio regolare D. Abbiamo, per il primo teorema dei residui 6.3.1:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log^2 z}{z^2+a^2}\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f(z), ia\right) + \operatorname{Res}\left(f(z), -ia\right)\right]$$

Vale:

$$\operatorname{Res}\left(f(z), ia\right) = \frac{\log^2 a - \dfrac{\pi^2}{4} + i\pi\log a}{2ia},$$
$$\operatorname{Res}\left(f(z), -ia\right) = -\frac{\log^2 a - \dfrac{9}{4}\pi^2 + 3i\pi\log a}{2ia}$$

da cui:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log^2 z}{z^2+a^2}\,dz = 2\pi i\cdot$$
$$\cdot\frac{\log^2 a - \dfrac{\pi^2}{4} + i\pi\log a - \log^2 a + \dfrac{9}{4}\pi^2 - 3i\pi\log a}{2ia} =$$
$$= \frac{2\pi^2}{a}\left(\pi - i\log a\right).$$

Esplicitando l'integrale a sinistra come somma di integrali sulle quattro curve regolari che formano ∂D, otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_{+\partial D}\frac{\log^2 z}{z^2+a^2}\,dz = &\int_r^R\frac{\log^2 x}{x^2+a^2}\,dx+\int_{+\partial B_R(0)}\frac{\log^2 z}{z^2+a^2}\,dz+\\ &-\int_r^R\frac{(\log x+2\pi i)^2}{x^2+a^2}\,dx-\int_{+\partial B_r(0)}\frac{\log^2 z}{z^2+a^2}\,dz=\\ &=\int_{+\partial B_R(0)}\frac{\log^2 z}{z^2+a^2}\,dz-\int_{+\partial B_r(0)}\frac{\log^2 z}{z^2+a^2}\,dz+\\ &+\int_r^R\frac{4\pi^2-4\pi i\log x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{2\pi^2}{a}(\pi-i\log a)\end{aligned}$$

Osserviamo che uniformemente rispetto ad Arg$z$:

$$\lim_{z\to 0} z\cdot f(z)=0,\qquad \lim_{z\to\infty} z\cdot f(z)=0$$

quindi, per i teoremi del piccolo e del grande cerchio 7.4.2 e 7.4.1, gli integrali sulle circonferenze tendono a 0 per $r\to 0$ e $R\to+\infty$; ne segue:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi^2}{a}(\pi-i\log a)=&\int_0^{+\infty}\frac{4\pi^2-4\pi i\log x}{x^2+a^2}\,dx=\\ &=4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\,dx-4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx=\\ &=4\pi^2\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{+\infty}-4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx=\\ &=\frac{2\pi^3}{a}-4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx\end{aligned}$$

L'integrale all'ultimo membro è proprio quello proposto e quindi, con ovvi calcoli:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}\log a.$$

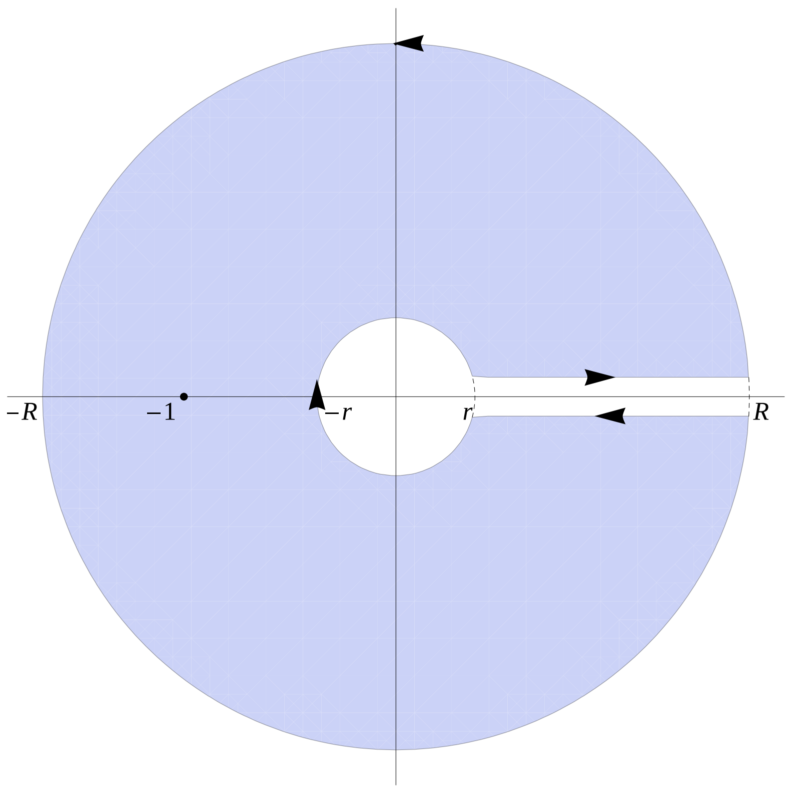
2. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx\quad(0<\lambda<1).$$

Osserviamo che per $x\to+\infty$ la funzione integranda è un infinitesimo di ordine $2-\lambda>1$ e per $x\to 0^+$ è un infinito di ordine $1-\lambda<1$, pertanto l'integrale converge. Consideriamo la funzione:

$$f(z) := \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} = \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z}$$

e scegliamo per l'argomento principale di z la limitazione $\mathrm{Arg} z \in [0, 2\pi[$ (cioè log è definito nell'insieme semplicemente connesso $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$). Il punto $z = 0$ è di diramazione per f, mentre $z = -1$ è un polo del primo ordine. Consideriamo il dominio regolare D in figura (dove $R > 1$ e $r < 1$):



Risulta:

$$\mathrm{Res}\,(f(z), -1) = \lim_{z \to -1} (1+z) \cdot \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} = (-1)^{\lambda-1} = (e^{i\pi})^{\lambda-1} = e^{(\lambda-1)i\pi}$$

Per il primo Teorema dei residui 6.3.1 applicato a f su D si ha:

$$\int_r^R \frac{e^{(\lambda-1)\log x}}{1+x}\,dx + \int_{+\partial B_R(0)} \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z}\,dz + \int_R^r \frac{e^{(\lambda-1)(\log x + 2\pi i)}}{1+x}\,dx + $$
$$+ \int_{-\partial B_r(0)} \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z}\,dz = 2\pi i e^{(\lambda-1)i\pi} \tag{7.25}$$

Il terzo integrale a primo membro risulta essere:

$$\int_R^r \frac{e^{(\lambda-1)(\log x+2\pi i)}}{1+x}\,dx = -e^{(\lambda-1)2\pi i}\int_r^R \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx$$

Osserviamo che, per $|z|=R$:

$$\left|z\cdot\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\right| \le \frac{R^\lambda}{R-1} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

e, per $|z|=r$:

$$\left|z\cdot\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\right| \le \frac{r^\lambda}{1-r} \overset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

e i due limiti risultano uniformi rispetto ad Arg$z$. Facendo tendere $r\to 0$ e $R\to+\infty$ in (7.25) otteniamo, per i teoremi del grande cerchio 7.4.1 e del piccolo cerchio 7.4.2:

$$2\pi i e^{(\lambda-1)\pi i} = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx - e^{(\lambda-1)2\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx = \frac{2\pi i e^{(\lambda-1)\pi i}}{1-e^{(\lambda-1)2\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} \tag{7.26}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per $\overline{e^{(\lambda-1)\pi i}}$ e applicando la formula di Eulero per il seno (1.8).

3. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}\,dx \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Posto $t := x^{2n}$ (quindi $dt = 2nx^{2n-1}dx$) otteniamo:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2n}\cdot t^{\frac{1}{2n}-1}\,dt = \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{2n}-1}}{1+t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2n}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)},$$

per (7.26) (con $\lambda = 1/2n$).

4. Calcoliamo:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)}}\,dx.$$

Posto $t := \frac{1}{x} - 1$ (quindi $dx = -\frac{1}{(1+t)^2}\,dt$) otteniamo:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}}\,dx =$$
$$= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\frac{1}{t+1}\cdot t^{\frac{1}{3}}}\cdot\left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right)\,dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{3}}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

per (7.26) (con $\lambda = 2/3$).

7.8 Integrali di Fresnel

Due integrali impropri classici sono gli *integrali di Fresnel*:

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt, \qquad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt.$$

Gli zeri della funzione $\cos(t^2)$ in $[0,+\infty[$ sono i punti:

$$t_k = \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

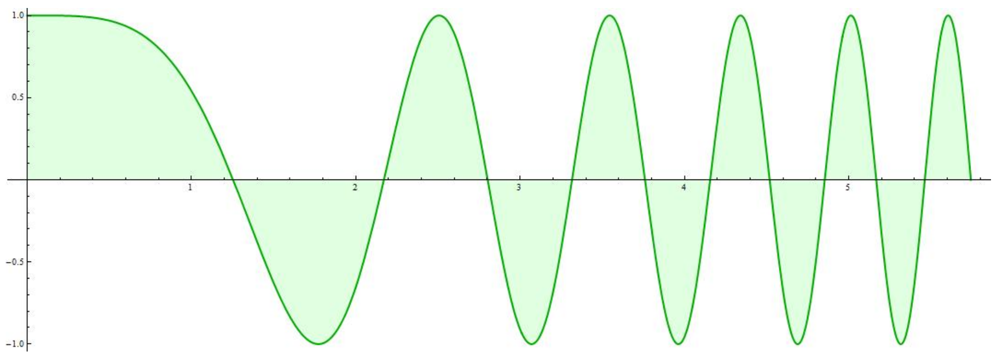


Figura 7.3: Grafico di $\cos(t^2)$; osserviamo che $t_{k+1} - t_k \to 0$ per $k \to +\infty$.

Gli zeri di $\sin(t^2)$ in $[0,+\infty[$ sono i punti:

$$t_k = \sqrt{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

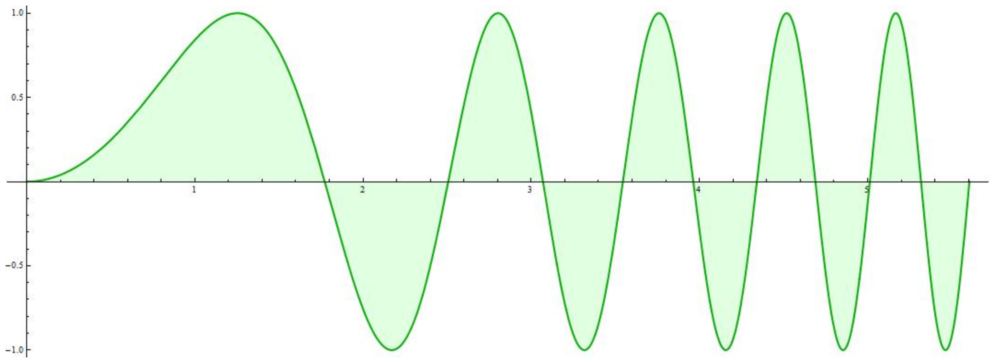


Figura 7.4: Grafico di $\sin(t^2)$; osserviamo che $t_{k+1} - t_k \to 0$ per $k \to +\infty$.

Consideriamo la funzione

$$f(z) = e^{-z^2} \in H(\mathbb{C})$$

e il settore polare chiuso

$$D_R = \left\{(\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

Sia ora

$$A = \left(R\frac{\sqrt{2}}{2}, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = Re^{i\frac{\pi}{4}}$$

Per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:

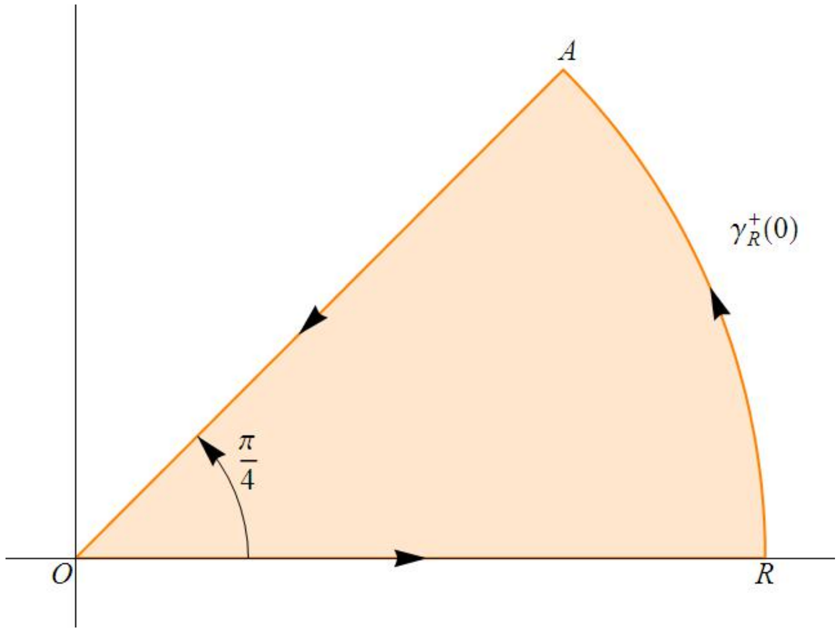
$$\int_{+\partial D_R} e^{-z^2} dz = 0,$$

da cui, suddividendo ∂D_R come in figura:

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz + \int_{+AO} e^{-z^2} dz = 0 \tag{7.27}$$

Poiché $\gamma_R^+(0)$ ha rappresentazione parametrica

$$z = Re^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$



si ottiene:

$$\begin{aligned}\left|\int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2}dz\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2i\vartheta}}Rie^{i\vartheta}d\vartheta\right| = \\ &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta)}Rie^{i\vartheta}d\vartheta\right| \leq \\ &\leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\vartheta}d\vartheta\end{aligned} \tag{7.28}$$

Poniamo $2\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (quindi $d\vartheta = -\frac{d\varphi}{2}$); da (7.28) si ottiene:

$$\begin{aligned}\left|\int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2}dz\right| &\leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\vartheta}d\vartheta = \\ &= -\frac{R}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R^2\sin\varphi}d\varphi = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\varphi}d\varphi \leq \\ &\leq \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi = \frac{R}{2}\left[\frac{e^{-R^2\frac{2}{\pi}\varphi}}{-R^2\frac{2}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{R}{2}\left[\frac{e^{-R^2}-1}{-R^2\frac{2}{\pi}}\right] = \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right),\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza $\sin\varphi \geq \dfrac{2}{\pi}\varphi$ per ogni $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; di conseguenza:

$$\int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ora, il segmento OA (bisettrice) ha rappresentazione parametrica:

$$z = te^{i\frac{\pi}{4}}, \quad t \in [0, R].$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
\int_{+AO} e^{-z^2} dz &= \int_R^0 e^{-t^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\, dt = \int_R^0 e^{-it^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt = \\
&= \frac{i+1}{\sqrt{2}} \int_R^0 \left[\cos(t^2) - i\sin(t^2)\right] dt = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^R \left[\cos(t^2) + \sin(t^2)\right] dt - \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^R \left[\cos(t^2) - \sin(t^2)\right] dt.
\end{aligned}$$

Per $R \to +\infty$ la (7.27) porta a:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \left[\cos(t^2) + \sin(t^2)\right] dt + \\
+ \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \left[\cos(t^2) - \sin(t^2)\right] dt
\end{aligned}$$

(osserviamo che, poiché il primo membro è convergente, anche il secondo membro è convergente). Uguagliando parte reale e immaginaria si ottiene il sistema:

$$\begin{cases}
\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt + \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\[2ex]
\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt - \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt = 0
\end{cases},$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{7.29}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{7.30}$$

1. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Operando il cambio di variabile

$$x = t^2 \quad (dx = 2t\, dt)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x}}\, dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2) + \cos(t^2)}{t} \cdot 2t\, dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \left[\sin(t^2) + \cos(t^2)\right]\, dt. \end{aligned}$$

Ora, da (7.29) e (7.30):

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt + \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Perciò l'integrale richiesto vale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

7.9 Somma di alcune serie

Definizione 7.9.1 (funzione meromorfa)**.** Un'applicazione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *meromorfa* se è olomorfa in Ω, eccetto che per singolarità polari.

Teorema 7.9.2. *Sia f meromorfa in tutto il piano complesso $\mathbb{C}$ avente solo un numero finito di poli $z_1, \dots, z_\nu$, con $z_j \notin \mathbb{Z}$ per ogni $j = 1, \dots, \nu$. Supponiamo $|f(z)| = o\left(|z|^{-\alpha}\right)$ per $z \to \infty$, con $\alpha > 1$. Definiamo*

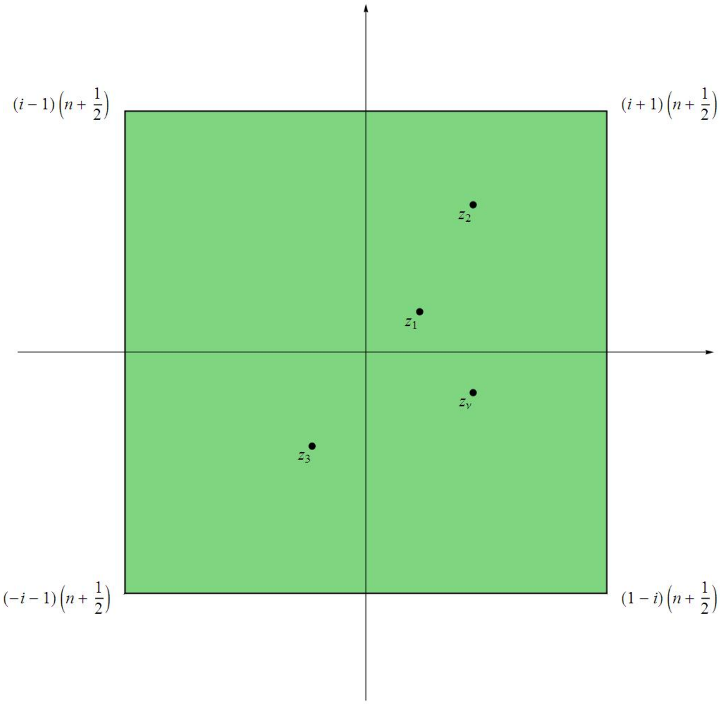
$$g(z) := \pi f(z) \cot(\pi z), \quad h(z) := \frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}.$$

Allora

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = -\sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}(g(z), z_j), \tag{7.31}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(k) = -\sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}(h(z), z_j). \tag{7.32}$$

Dimostrazione. Proviamo l'uguaglianza (7.31) (la (7.32) si prova analogamente). Sia n un intero positivo sufficientemente grande, tale che γ_n sia il bordo del quadrato di vertici $\left(n+\frac{1}{2}\right)(1+i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1+i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1-i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(1-i)$, contenente tutti i poli di f.



Per il primo Teorema dei residui 6.3.1 si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_n} g(z)\,dz = \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}(g(z), z_j) + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}(g(z), k).$$

Poiché g ha poli semplici in ciascun $z = k$, si ha

$$\operatorname{Res}(g(z), k) = \lim_{z\to k}\left[(z-k)\cdot \pi f(z)\cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right] = f(k),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'applicazione del Teorema di L'Hôpital alla funzione $\frac{\pi(z-k)}{\sin(\pi z)}$. Pertanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_n} g(z)\,dz = \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}(g(z), z_j) + \sum_{k=-n}^{n} f(k)$$

e quindi conseguiremo la tesi se dimostriamo che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_{+\gamma_n} g(z)\,dz = 0.$$

A tal fine, proviamo che esiste una costante positiva A, indipendente da n, tale che $|\cot(\pi z)| \le A$ per ogni $|z| > n$.

Sia allora $z = x + iy$, quindi $i\pi z = i\pi x - \pi y$; risulta

$$|\cot(\pi z)| = \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| \le \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \le \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}},$$

se $y \ge \frac{1}{2}$.

Analogamente, si ha

$$|\cot(\pi z)| \le \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} = \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \le \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}},$$

se $y \le -\frac{1}{2}$.

Ora, siano $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ e $z = n + \frac{1}{2} + iy$. Allora risulta

$$\begin{aligned}|\cot(\pi z)| &= \left|\cot\left(\pi\left(n + \frac{1}{2} + iy\right)\right)\right| = \left|\cot\left(\frac{\pi}{2} + i\pi y\right)\right| = \\ &= |\tanh(\pi y)| \le \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

poiché la funzione $\tanh(\pi y)$ ha derivata positiva e quindi è monotona crescente.

Se $z = -n - \frac{1}{2} + iy$, si ha

$$\begin{aligned}|\cot(\pi z)| &= \left|\cot\left(\pi\left(-n - \frac{1}{2} + iy\right)\right)\right| = \left|\cot\left(-\frac{\pi}{2} + i\pi y\right)\right| = |\tanh(\pi y)| \le \\ &\le \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Posto

$$A := \max\left\{\frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}, \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

si ha $|\cot(\pi z)| \le A$ su γ_n, dove A è indipendente da n. Di conseguenza, per l'ipotesi su f, si ha

$$\left|\int_{+\gamma_n} g(z)\,dz\right| = \left|\int_{+\gamma_n} \pi f(z)\cot(\pi z)\,dz\right| \le \pi \cdot o(n^{-\alpha}) \cdot A \cdot \underbrace{(8n+4)}_{l(\gamma_n)},$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per $n \to +\infty$. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Il Teorema 7.9.2 consente di calcolare la somma di alcune serie bilatere, calcolando la somma dei residui di particolari funzioni ausiliarie.

1. Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+a^2}, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Consideriamo

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2};$$

$z = \pm ia$ sono poli semplici per f. Detta

$$g(z) = \frac{\pi}{z^2+a^2}\cot(\pi z),$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g(z), ia) &= \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{\pi}{z^2+a^2}\cot(\pi z) = \\
&= \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{\pi}{(z-ia)(z+ia)}\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \\
&= -\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a); \\
\operatorname{Res}(g(z), -ia) &= \lim_{z\to -ia}(z+ia)\frac{\pi}{z^2+a^2}\cot(\pi z) = \\
&= \lim_{z\to -ia}(z+ia)\frac{\pi}{(z-ia)(z+ia)}\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \\
&= -\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a).
\end{aligned}$$

Per il teorema 7.9.2 possiamo concludere:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a).$$

2. Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^2}, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Consideriamo
$$f(z) = \frac{1}{(z+a)^2};$$
$z = -a$ è un polo del secondo ordine per f. Detta
$$h(z) = \frac{\pi}{(z+a)^2 \sin(\pi z)},$$
calcoliamo:
$$\begin{aligned} \text{Res}(h(z), -a) &= \lim_{z \to -a} \frac{d}{dz} \left[(z+a)^2 \frac{\pi}{(z+a)^2 \sin(\pi z)} \right] = \\ &= \lim_{z \to -a} \frac{d}{dz} \left[\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right] = -\frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)} \end{aligned}$$
Per il teorema 7.9.2 possiamo concludere:
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}.$$

7.10 Indicatore logaritmico. Principio dell'argomento. Teorema di Rouché. Un'altra dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra

Uno dei più eleganti risultati della Teoria dei residui riguarda l'indicatore logaritmico.

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω, allora la funzione $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ si chiama *derivata logaritmica* di f (vedi (2.9)) e risulta olomorfa negli stessi punti di $f(z)$, purché $f(z) \neq 0$.

Lemma 7.10.1.

(i) *Se z_0 è uno zero di ordine ν per f, allora la derivata logaritmica di f ha un polo del primo ordine in z_0, con residuo*
$$Res\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = \nu;$$

(ii) *se z_0 è un polo di ordine p per f, allora la derivata logaritmica di f ha un polo del primo ordine in z_0, con residuo*

$$Res\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = -p.$$

Dimostrazione.

(i) Per ipotesi, esistono un intorno di z_0 ed una funzione g, ivi olomorfa, tali che

$$f(z) = (z - z_0)^{\nu} g(z),$$

con $g(z_0) \neq 0$. Allora

$$f'(z) = \nu(z - z_0)^{\nu-1} g(z) + (z - z_0)^{\nu} g'(z),$$

da cui (nell'intorno di z_0, privato di z_0):

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Il primo e il secondo addendo rappresentano rispettivamente la parte singolare e la parte regolare della serie di Laurent della derivata logaritmica di f, perciò z_0 è un polo semplice e risulta:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = a_{-1} = \nu.$$

(ii) Per ipotesi z_0 è polo di ordine p per f, pertanto lo sviluppo di Laurent (in un intorno di z_0, privato di z_0), è dato da:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{p} a_{-k} (z - z_0)^{-k},$$

con $a_{-p} \neq 0$. Ne segue che:

$$f(z)(z-z_0)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k+p} + \sum_{k=1}^{p} a_{-k} (z-z_0)^{-k+p} =: g(z) \text{ (olomorfa).}$$

Ora, $g(z_0) = a_{-p} \neq 0$ e

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}.$$

Calcoliamo:

$$f'(z) = \frac{g'(z)(z-z_0)^p - g(z)p(z-z_0)^{p-1}}{(z-z_0)^{2p}},$$

da cui:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{p}{z-z_0}.$$

Il primo e il secondo addendo rappresentano rispettivamente la parte regolare e la parte singolare della serie di Laurent della derivata logaritmica di f, perciò z_0 è un polo semplice e risulta:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = a_{-1} = -p.$$

$\square$

Teorema 7.10.2 (dell'indicatore logaritmico)**.** *Sia $f(z)$ meromorfa in Ω e sia $D \subset \Omega$ un dominio regolare. $f(z)$ abbia in $\mathring{D}$ solo un numero finito di poli $\beta_1, \ldots, \beta_s$, con ordini di molteplicità $p_1, \ldots, p_s$; inoltre, sia $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial D$ ed $f(z)$ abbia in $\mathring{D}$ gli zeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ con ordini di molteplicità $\nu_1, \ldots, \nu_r$. Allora:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = Z_f - P_f, \tag{7.33}$$

dove Z_f e P_f sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di f in $\mathring{D}$, contati con la loro molteplicità.

Dimostrazione. Alla derivata logaritmica di f possiamo applicare il primo Teorema dei residui 6.3.1 nel dominio regolare D e otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \sum_{j=1}^{r} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \alpha_j\right) + \sum_{h=1}^{s} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \beta_h\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{r} \nu_j + \sum_{h=1}^{s}(-p_h) = \sum_{j=1}^{r} \nu_j - \sum_{h=1}^{s} p_h = \\ &= Z_f - P_f,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il lemma 7.10.1 applicato ai poli semplici di f'/f, α_j e β_h ($j = 1, \ldots, r$, $h = 1, \ldots, s$). $\square$

L'integrale che compare al primo membro di (7.33) si chiama *indicatore logaritmico* di f.

Il precedente teorema in letteratura è noto anche come *Principio dell'argomento*. Vediamo perché.

Supponiamo che ∂D sia formata da un'unica curva regolare γ semplice e chiusa di equazione parametrica

$$z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

con $z(a) = z(b)$. Risulta

$$\begin{aligned} Z_f - P_f &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma} \frac{d}{dz}\left[\log\left(f(z)\right)\right]\, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\log\left(f(z)\right)\right]_{z(a)}^{z(b)} = \frac{1}{2\pi i}\left[\log|f(z)| + i\mathrm{Arg}(f(z))\right]_{z(a)}^{z(b)} = \\ &= \frac{[\mathrm{Arg}(f(z))]_{+\gamma}}{2\pi}, \end{aligned}$$

cioè, la differenza tra il numero di zeri e quello di poli di $f(z)$ in $\mathring{D}$ è data dalla variazione dell'argomento principale di $f(z)$ lungo γ percorsa nel verso positivo, moltiplicata per il fattore $1/2\pi$.

Teorema 7.10.3 (di Rouché)**.** *Siano f e g meromorfe in Ω.*
Se $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \gamma$, dove γ è una curva generalmente regolare, semplice e chiusa, con sostegno contenuto in Ω, e se f e g non hanno né zeri né poli su γ, allora:

$$Z_f - P_f = Z_{f+g} - P_{f+g},$$

dove Z_f e Z_{f+g} (rispettivamente P_f e P_{f+g}) indicano il numero finito di zeri (rispettivamente di poli) di f e $f+g$ dentro γ, contati con la loro molteplicità.

Dimostrazione. Osserviamo che $f + g$ non ha zeri su γ. Infatti, se $z_0 \in \gamma$ fosse uno zero di $f + g$, si avrebbe:

$$f(z_0) + g(z_0) = 0 \;\Rightarrow\; f(z_0) = -g(z_0) \;\Rightarrow\; |f(z_0)| = |g(z_0)|,$$

il che è in contraddizione con l'ipotesi. Ora, la funzione $|f| - |g|$ è continua sul compatto γ, quindi, per il teorema di Weierstrass:

$$\exists\, m > 0 \text{ t.c. } |f(z)| - |g(z)| \geq m \;\forall\, z \in \gamma.$$

Sia $\lambda \in [0,1]$. Risulta

$$|f(z) + \lambda g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| \geq m > 0 \quad \forall\, z \in \gamma;$$

allora l'integrale

$$I(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)}\, dz$$

è ben definito. Osserviamo che, per 7.10.2, $I(0) = Z_f - P_f$ e $I(1) = Z_{f+g} - P_{f+g}$: se proviamo che $I(\lambda)$ è costante in $[0,1]$, conseguiremo la tesi.

Per il Teorema 7.10.2

$$I(\lambda) = Z_{f+\lambda g} - P_{f+\lambda g} \in \mathbb{Z} \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$$

e quindi l'applicazione $\lambda \mapsto I(\lambda)$, continua sul connesso $[0,1]$, assume valori interi relativi: pertanto $I(\lambda)$ è necessariamente costante in $[0,1]$. Da ciò segue $I(0) = I(1)$, ovvero la tesi. □

Corollario 7.10.4. *Siano $f, g \in H(\Omega)$. Se $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \gamma$, dove γ è una curva generalmente regolare, semplice e chiusa, con sostegno contenuto in Ω, allora*

$$Z_f = Z_{f+g}$$

(cioè f e $f+g$ hanno lo stesso numero di zeri dentro γ, contati con la loro molteplicità).

Dimostrazione. Poiché $f, f+g \in H(\Omega)$, si ha $P_f = P_{f+g} = 0$; applicando 7.10.3 si ottiene la tesi. □

1. Calcoliamo quanti zeri ha il polinomio

$$P(z) = z^5 - 2z + 16$$

nella corona circolare aperta

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}.$$

Definiamo:

$$f(z) := 16, \quad g(z) := z^5 - 2z$$

Sulla circonferenza $|z| = 1$ si ha:

$$|g(z)| = |z^5 - 2z| = |z^4 - 2| \leq |z^4| + 2 = 3 < 16 = |f(z)|.$$

Su $B_1(0)$ le funzioni f e g verificano le ipotesi di 7.10.4, pertanto $f(z)+g(z) = P(z)$ ha lo stesso numero di zeri di $f(z) = 16$ nel disco unitario; quindi non c'è alcuno zero di $P(z)$ in $B_1(0)$.

Siano ora

$$f(z) := z^5, \quad g(z) := 16 - 2z.$$

Osserviamo che sulla circonferenza $|z| = 2$ si ha:

$$|g(z)| = |16 - 2z| \leq 16 + |2z| \leq 16 + 4 = 20 < 32 = |f(z)|.$$

In $B_2(0)$ le funzioni soddisfano le ipotesi di 7.10.4, pertanto $f(z) + g(z) = P(z)$ ha lo stesso numero di zeri di $f(z) = z^5$ nel disco $B_2(0)$; in questo caso $f(z)$ ha uno zero di molteplicità 5 in $z = 0 \in B_2(0)$, perciò $P(z)$ ha 5 zeri in $B_2(0)$.

Possiamo allora concludere che il polinomio $P(z)$ ha tutti gli zeri in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Teorema 7.10.5 (di Hurwitz)**.** *Sia $f_n \in H(\Omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ e $f_n \rightrightarrows f$ sui compatti contenuti in Ω.*

Allora $f \equiv 0$ in Ω o $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che f non sia identicamente nulla su Ω e che abbia uno zero isolato in $z_0 \in \Omega$. Sia $r > 0$ tale che

$$|f(z)| \geq m > 0 \; \forall \, z \in \partial B_r(z_0).$$

Poiché $f_n \rightrightarrows f$ sui compatti di Ω, in particolare su $\partial B_r(z_0)$, abbiamo:

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{m}{2} \; \forall \, z \in \partial B_r(z_0)$$

per n sufficientemente grande. Allora, per un tale n, si ha:

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{m}{2} < m \leq |f(z)| \; \forall \, z \in \partial B_r(z_0).$$

Applicando il corollario 7.10.4 a $f_n - f$ e f, abbiamo che f e $(f_n - f) + f = f_n$ hanno lo stesso numero di zeri in $B_r(z_0)$. Questo contraddice l'ipotesi che f_n non ha zeri in Ω. □

Diamo ora un'altra dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra, usando 7.10.4.

Teorema 7.10.6 (fondamentale dell'Algebra)**.** *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado* $n \geq 1$ *ha* n *radici in* $\mathbb{C}$*, contate con la loro molteplicità.*

Dimostrazione. Consideriamo il polinomio:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \ n \in \mathbb{N}, \ a_n \neq 0$$

e definiamo:

$$f(z) := z^n, \quad g(z) := \frac{1}{a_n}\left(a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}\right).$$

Osserviamo che $P(z) = a_n \left[f(z) + g(z)\right]$; poiché

$$\lim_{|z| \to +\infty} \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| = 0,$$

allora

$$\exists \, R > 0 \text{ t.c. } \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \ \forall \, |z| \geq R.$$

In particolare, sulla circonferenza $|z| = R$ si ha $|g(z)| < |f(z)|$; allora, per 7.10.4, le funzioni f e $P = a_n \left[f + g\right]$ hanno lo stesso numero di zeri in $B_R(0)$. Ora, la funzione $f(z) = z^n$ ha n zeri nell'intero piano complesso; ne segue che anche $P(z)$ ha in $\mathbb{C}$ n radici, contate con la loro molteplicità. □