

УДК 621.372

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ И РАСШИРЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ***Пономарева О.В., Пономарева Н.В.*Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,  
г. Ижевск, Российская Федерация

*Предложен метод расширения множества анализируемых частот цифровыми фильтрами на основе частотной выборки. Рассмотрен способ повышения точности измерения этим классом фильтров спектров сигналов. В основе предложенного подхода лежит согласованное обобщение структур фильтров на основе частотной выборки и стандартного нерекурсивного гребенчатого фильтра. Предложенный метод может найти широкое применение при решении задач выявления скрытых периодичностей. (E-mail: ponva@mail.ru)*

**Ключевые слова:** гребенчатый фильтр, фильтр на основе частотной выборки, разностное уравнение.

**Введение**

Характерной особенностью развития современной теории цифровой фильтрации является постоянно меняющаяся оценка эффективности применения в задачах анализа сигналов фильтров с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтров) и фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров). Пример – ситуация, сложившаяся с фильтрами на основе частотной выборки (ФОВ). В 1970-е гг. в связи с появлением перспективного метода проектирования нерекурсивных КИХ-фильтров – метода Паркса–Маклеллана, ФОВ были, как выясняется, незаслуженно забыты более чем на три десятилетия. Даже в курсах лекций и учебниках по цифровой обработке сигналов они упоминались вскользь или не упоминались вообще [1, 2].

Однако в последнее время доказано [1, 3], что ФОВ имеют ряд преимуществ перед фильтрами Паркса–Маклеллана. В частности, в тех приложениях, где требуемая ширина полосы пропускания проектируемого фильтра должна быть меньше одной пятой частоты дискретизации.

Целью данной работы является расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки, повышение точности измерения ими спектра сигнала

путем обобщения структуры стандартного нерекурсивного гребенчатого фильтра.

**Преимущества и недостатки фильтров на основе частотной выборки**

Класс фильтров на основе частотной выборки основан на том, что трансверсальный фильтр (фильтр с многоотводной линией задержки, рисунок 1), являясь фильтром без полюсов, может быть представлен в виде последовательной структуры, приведенной на рисунке 2. Отметим, что нормирующий множитель  $1/N$  для простоты, как и в [1], опущен. Влияние этого коэффициента и места его размещения при реализации ФОВ как с использованием чисел в формате с плавающей запятой, так и с фиксированной запятой, достаточно подробно рассмотрено в [1].

Следует отметить, что фильтры на основе частотной выборки эффективны не только при узкополосной фильтрации. Например, эффективность применения фильтров этого класса для скользящих спектральных измерений также весьма высока [1–3]. Действительно, структура ФОВ дает возможность рекуррентного расчета значений отсчетов на выходе  $k$ -го комплексного резонатора. В результате после выхода фильтра на установившийся режим для получения каждого значения скользящего спек-

трального измерения на  $k$ -й частоте необходимо выполнить всего два комплексных умножения на входной отсчет.

В то же время следует признать, что ФОЧВ имеют и серьезные недостатки, которые ограничивает их применение во многих приложениях [4–12].

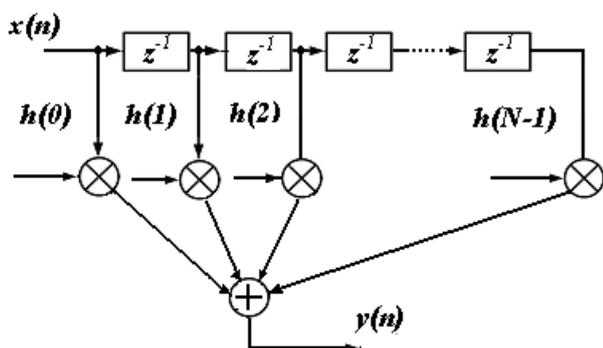


Рисунок 1 – Нерекursивный фильтр с конечной импульсной характеристикой с  $N$  ответвлениями – трансверсальный фильтр

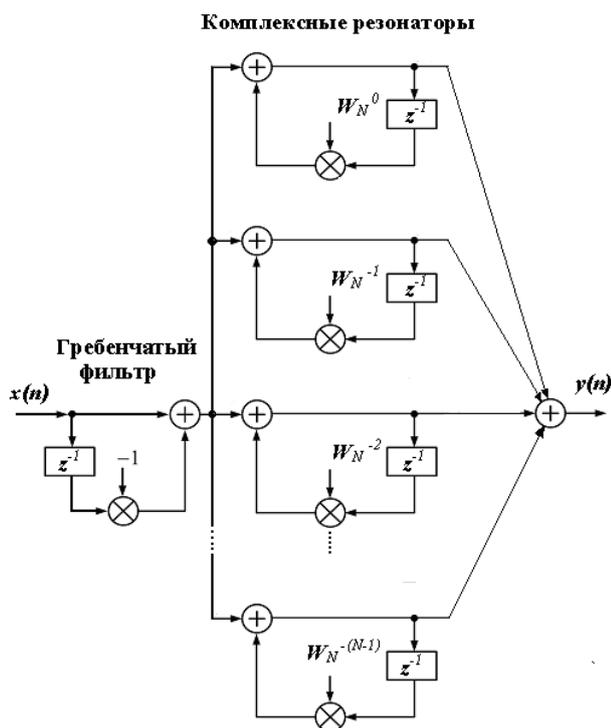


Рисунок 2 – Структурная схема фильтра на основе частотной выборки, где  $W_N^k = \exp[-j2\pi/N]k$

Первый недостаток – это фиксированность множества анализируемых частот [1–3]:  $\{j2\pi/N\}k$ , где  $k = 0, N-1$ ;  $N$  – число отсчетов импульсной характеристики гребенчатого

фильтра. Этот недостаток является следствием фундаментального свойства амплитудно-частотной характеристики гребенчатого фильтра, которая имеет  $N$  нулей, равномерно распределенных на единичной окружности в  $Z$ -плоскости с шагом  $2\pi/N$  (рисунок 3). При этом полюс каждого из комплексных резонаторов ФОЧВ для компенсации должен совпадать с одним из нулей амплитудно-частотной характеристики гребенчатого фильтра (рисунок 4).

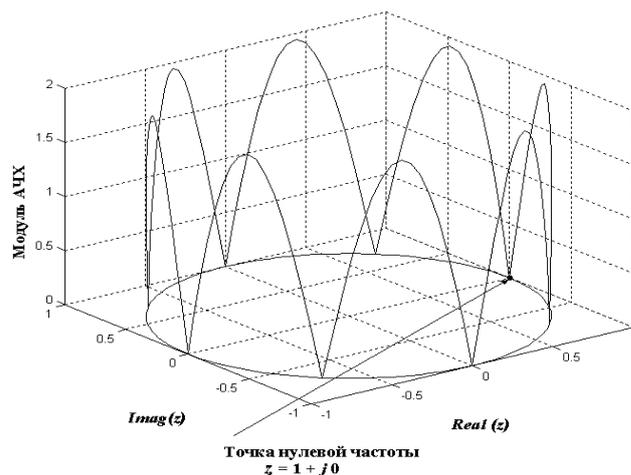


Рисунок 3 – Амплитудно-частотная характеристика гребенчатого фильтра в  $z$ -плоскости вдоль единичной окружности,  $N = 8$

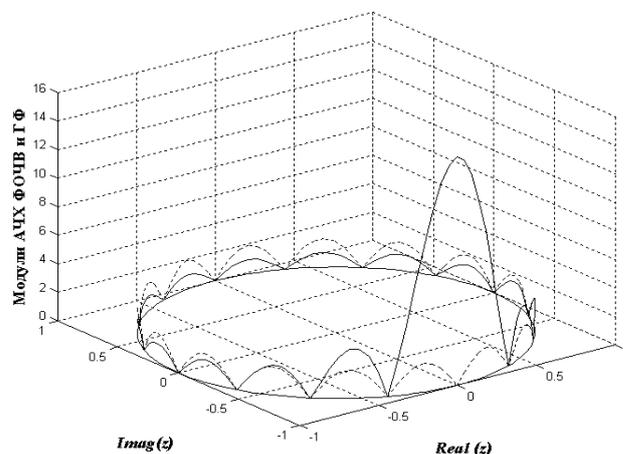


Рисунок 4 – Амплитудно-частотная характеристика гребенчатого фильтра (пунктирная линия) и фильтра на основе частотной выборки (сплошная линия) в  $z$ -плоскости вдоль единичной окружности,  $N = 16$

Второй недостаток ФОЧВ связан с тем, что операции в параллельной части структуры (рисунок 2) выполняются с конечной точностью [2]. Вследствие этого полностью скомпенсиро-

вать нули гребенчатого фильтра полюсами комплексных резонаторов не удастся (рисунок 5), и ФОЧВ имеет как нули, так и полюса, а его импульсная характеристика становится неограниченной. В результате шум округления со временем нарастает [1], искажая выходные отсчеты фильтра, и соответственно растет погрешность измерения спектра сигналов.

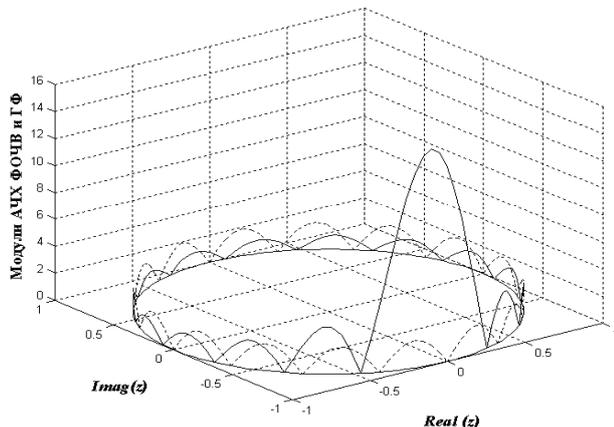


Рисунок 5 – Амплитудно-частотная характеристика гребенчатого фильтра (пунктирная линия) и фильтра на основе частотной выборки (сплошная линия) в  $z$ -плоскости вдоль единичной окружности,  $N = 16$ , рассогласование –  $1/4$

В работе [4] для борьбы с этим недостатком предложена модификация метода частотной выборки. Идея предлагаемой модификации заключается в следующем. В структуре, приведенной на рисунке 2, между гребенчатым фильтром и комплексными резонаторами дополнительно применяется процедура трансформации спектра сигнала. Трансформация осуществлялась стандартным методом – умножением сигнала на экспоненциальную функцию  $\exp[j2\pi/N]kn$ . Действительно, при этом проблема неточного представления весовых коэффициентов снимается, но появляется другая проблема – связанная с необходимостью увеличения памяти данных для обеспечения хранения промежуточных переменных [5, 6].

**Обобщение разностного уравнения нерекурсивного гребенчатого фильтра**

С целью разработки способа устранения указанных выше недостатков ФОЧВ рассмотрим разностное уравнение, описывающее стандартный нерекурсивный гребенчатый фильтр:

$$y(n) = x(n) - x(n - N), \tag{1}$$

где  $x(n)$ ,  $y(n)$  – входной и выходной сигнал нерекурсивного гребенчатого фильтра соответственно.

Передаточная функция гребенчатого фильтра имеет вид [1, 2]:

$$H(z) = Y(z) / X(z) = 1 - z^{-N},$$

а его частотная и импульсная характеристики описываются следующими соотношениями, соответственно [1, 2]:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega N - \pi)/2} [2 \sin(\omega N/2)], \tag{2}$$

$$h(n) = 1, \text{ при } n = 0; h(n) = 0, \text{ при } n = 1, N - 1;$$

$$h(n) = -1 \text{ при } n = N. \tag{3}$$

Проведем обобщение разностного уравнения, описывающего стандартный нерекурсивный гребенчатый фильтр, путем преобразования его импульсной характеристики. Умножив импульсную характеристику стандартного нерекурсивного гребенчатого фильтра на экспоненциальную функцию вида:

$$z(n) = \exp[(-j2\pi/N)\theta n]; n = \overline{0, N},$$

получим импульсную характеристику обобщенного нерекурсивного гребенчатого фильтра:

$$h(n) = 1, \text{ при } n = 0; h(n) = 0, \text{ при } n = \overline{1, N - 1};$$

$$h(n) = -\exp(-j2\pi\theta) \text{ при } n = N.$$

Следовательно, разностное уравнение обобщенного нерекурсивного гребенчатого фильтра будет иметь вид:

$$y_1(n) = x(n) - e^{-j2\pi\theta} x(n - N), \text{ где } 0 \leq \theta < 1, \tag{4}$$

и передаточную функцию обобщенного гребенчатого фильтра можно описать следующим выражением:

$$H_1(z) = Y_1(z) / X(z) = 1 - e^{-j2\pi\theta} z^{-N}. \tag{5}$$

Учитывая, что частотная характеристика фильтра представляет собой передаточную функцию  $H(z)$ , вычисленную на единичной окружности, получим:

$$H_1(e^{j\omega}) = H_1(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = (1 - e^{-j(N\omega + 2\pi\theta)}). \tag{6}$$

Используя тождество Эйлера:

$$2j \sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}, \quad (7)$$

преобразуем соотношение (6) к виду:

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j(N\omega+2\pi\theta)/2} \{2j \sin[(N\omega+2\pi\theta)/2]\}. \quad (8)$$

Заменяя в формуле (8)  $j$  в фигурных скобках на  $e^{j\pi/2}$ , окончательно получим:

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j(N\omega+2\theta\pi-\pi)/2} \{2j \sin[(N\omega+2\pi\theta)/2]\}. \quad (9)$$

Выражение (9) определяет частотную характеристику обобщенного гребенчатого фильтра. Импульсные характеристики обобщенного (при различных значениях параметра  $\theta$ ) и стандартного (параметр  $\theta$  равен нулю) гребенчатых фильтров приведены на рисунке 6.

Амплитудно-частотные характеристики обобщенного гребенчатого фильтра, соответствующие импульсным характеристикам, приведенным на рисунке 6, для  $\theta = 1/2, 1/4$  даны на рисунке 7.

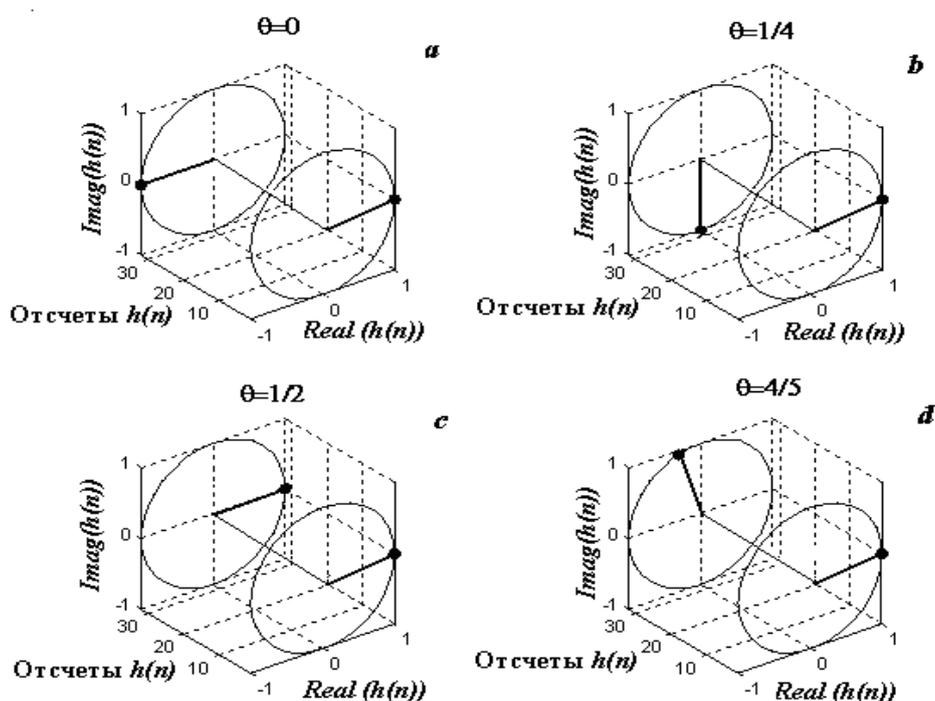


Рисунок 6 – Импульсные характеристики длительностью в 32 отсчета стандартного гребенчатого фильтра (а) и обобщенного гребенчатого фильтра (b, c, d) – при различных значениях параметра  $\theta$ .

На рисунке 8 приведена структурная схема одной из модифицированных секций такого обобщенного ФОЧВ.

В структурной схеме обобщенного гребенчатого фильтра, приведенной на рисунке 8, кроме параметра  $\theta$  присутствует и дополнительный параметр  $\delta$ . Введение данного параметра позволяет «подстраивать» нули обобщенного гребенчатого фильтра для компенсации полюсов комплексных резонаторов. При этом, как отмечалось выше, появляется возможность уменьшить погрешности измерения спектра сигналов, возникающие из-за шума округления при выполнении операций с конечной точностью в параллельной части структуры ФОЧВ (рисунок 2).

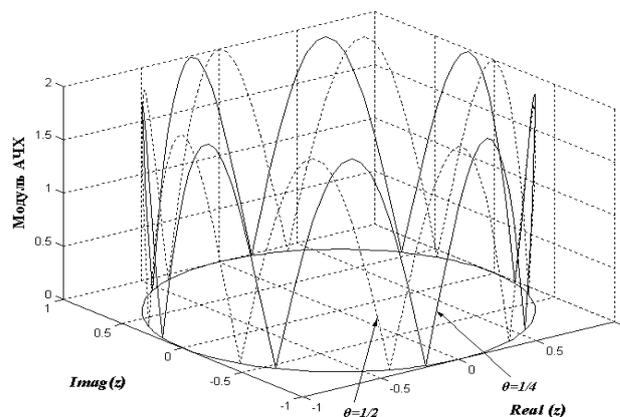


Рисунок 7 – Амплитудно-частотная характеристика обобщенного гребенчатого фильтра: пунктирная линия –  $\theta = 1/2$ , сплошная линия –  $\theta = 1/4$

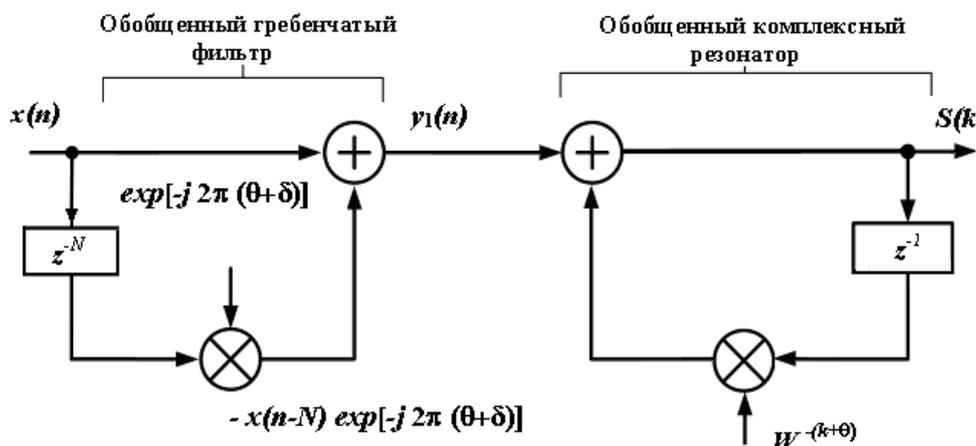


Рисунок 8 – Одна секция обобщенного фильтра на основе частотной выборки

### Заключение

«Согласованное» обобщение структур фильтра на основе частотной выборки и стандартного нерекурсивного гребенчатого фильтра позволило разрешить проблему фиксированности множества частот фильтра на основе частотной выборки.

Предложенный подход может найти широкое применение в приложениях, где используется цифровая обработка случайных сигналов, содержащих «скрытые» гармонические (тональные) компоненты (решение так называемых задач выявления скрытых периодичностей), например, в пассивной гидролокации при решении задачи обнаружения и классификации надводных и подводных судов; в машиностроении при виброакустическом функциональном диагностировании объектов (анализ виброакустических сигналов, структура которых характеризуется наличием гармонических рядов, порождаемых теми или иными дефектами); при функционировании различных узлов и механизмов; в телефонии при реализации тонального набора.

### Список использованных источников

1. Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание / Р. Лайонс ; пер. с англ. – М. : Бином-Пресс, 2007. – 656 с.
2. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Голд. – М. : Мир, 1978.
3. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер ; пер. с англ. – М. : Техносфера, 2009. – 856 с.

4. Витязев, В.В. Цифровая частотная селекция сигналов / В.В. Витязев. – М. : Радио и связь, 1993. – 240 с.
5. Пономарева, О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базе параметрических дискретных экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов / О.В. Пономарева. – 2010. – № 2. – С. 7–12.
6. Пономарев, В.А. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.
7. Пономарева, О.В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей / О.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С. 2–5.
8. Пономарева, О.В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев, Н.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2–7.
9. Пономарев, В.А. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Радиотехника и электроника. – АН СССР, 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561–1570.
10. Пономарев, В.А. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Автоматика. СО АН СССР, 1983. – № 4. – С. 39–45.
11. Пономарева, О.В. Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева //

Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10–15.

12. Пономарев, В.А. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифро-

выми методами / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18–21.

---

Ponomareva O.V., Ponomareva N.V.

**Increasing of accuracy and extending functionality of digital filters based on frequency sampling**

The method of expansion of set of analyzing frequencies with digital filters, based on frequency selection, was suggested. The way of increasing of measurement precision using this class of filters was investigated. The conformal generalization of structure of filters based on frequency selection and the standard nonrecursive comb filter are the base of this method. This method can be used in different fields of research where the task of determination of hide periodicities is actual. (E-mail: ponva@mail.ru)

**Key words:** comb filter, frequency selection filter, difference equation.

*Поступила в редакцию 10.04.2013.*