$$\lesssim \mathrm{st}\left\{\omega^{-\eta} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \nu_\eta} ||f|| + ||f||\right\} = \mathrm{st}\left\{\omega^{-\eta} \cdot \omega^{\eta-1} \cdot 2\,||f||\right\} =$$

$$= \mathrm{st}\left(\frac{2||f||}{\omega}\right) = 0$$

dove $||f||$ è la norma di f in $B(X)$.

Verifica di (ii). Se per ogni $T \in H$ si ha $L(f \circ T) = L(f)$, allora per ogni $S \in {}^*H$ si ha ${}^*L({}^*f \circ S) = {}^*L({}^*f)$, a causa del PT. Dunque

$${}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots S_\eta^{\nu_\eta}) = {}^*L({}^*f) .$$

Per cui

$$M(f) = \mathrm{st}\left[\omega^{-\eta} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_\eta} {}^*L({}^*f)\right] = \mathrm{st}\left[\omega^{-\eta} \cdot \omega^{\eta} L(f)\right] = L(f)$$

(Si noti il carattere combinatorio della dimostrazione!).

Dalla Proposizione 6 si può dedurre il noto risultato sull'estensione della misura di Lebesgue su $[0,1]$ ad una m.p.f.a. invariante per traslazioni (mod. 1). Infatti sia L un funzionale che estende $\int f d\lambda$, con λ misura di Lebesgue,(vedi parte I°); il resto segue dal fatto che il gruppo delle traslazioni è abeliano.

2.2. IL TEOREMA DI LOEB.

Nella I° parte si è visto come ogni m.p.f.a. su X possa essere "sollevata" ad una m.p.f.a. sull'algebra ${}^*\mathcal{P}(X)$ attraverso il diagramma (1.8).

Partiremo ora da una situazione un po' più generale, supponendo di avere una terna $(A, \mathcal{B}, m)$, dove A è un insieme interno, $\mathcal{B}$ un'algebra di sottoinsiemi interni di A e $m: \mathcal{B} \to {}^*R^+$ è una funzione interna tale che

(i) $\quad m(\emptyset) = 0$

(ii) $\quad m(Y_1 \cup Y_2) = m(Y_1) + m(Y_2) \quad$ per $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.

Attraverso m si può definire una misura finitamente additiva ${}^\circ m$ su $\mathcal{B}$, a valori in $\overline{R^+}$, con

$$
{}^\circ m(Y) = \begin{cases} st(m(Y)) & \text{se } m(Y) \text{ è finito} \\ + \infty & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

Si indichi con $L(\mathcal{B})$ la minima σ-algebra di sottoinsiemi (esterni) di A contenente $\mathcal{B}$.

<u>TEOREMA 4</u>: La m.f.a. ${}^\circ m$ si può estendere in modo <u>unico</u> ad una misura σ-additiva $L(m)$ definita sulla σ-algebra $L(\mathcal{B})$ tale che

(i) $\quad L(m)(B) = m(B) \quad$ per ogni $B \in \mathcal{B}$

(ii) $\quad L(m)(Y) = \inf \{{}^\circ m(B) : B \in \mathcal{B}, B \supseteq Y\}$

(iii) $\quad$ Se $L(m)(Y) < + \infty \Longrightarrow L(m)(Y) = \sup\{{}^\circ m(B) : B \in \mathcal{B}, B \subseteq Y\}$

Si può visualizzare con il diagramma commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "m"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "{}^\circ m"] & {}^*R^+ \arrow[d, "st"] \\
L(\mathcal{B}) \arrow[r, "L(m)"] & \overline{R^+}
\end{tikzcd}
$$

(Se x è infinito allora $st\ x = + \infty$)

La dimostrazione fa uso del teorema di estensione di Caratheodory e della seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 7. Dato $(A,\mathcal{B})$ con A interno e $\mathcal{B}$ collezione di sottoinsiemi interni di A e dato $B_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, allora esiste k per cui $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} B_n$.

Dimostrazione: Si definisca l'insieme interno (per il PDI)

$$E = \{\nu : \nu \in {}^*\mathbb{N} \quad , \quad B \subseteq \bigcup_{n=o}^{n=\nu} B_n\}.$$

Esso ammette minimo, che non può essere infinito poiché $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Sketch della dimostrazione del Teorema 4: Si formi con $°m$ la misura esterna $\overline{m}$ nel solito modo:

$$\overline{m}(Y) = \inf\{\sum_{n=o}^{\infty} °m(B_n) : \bigcup_{n=o}^{\infty} B_n \supseteq Y \ , \ B_n \in \mathcal{B}\}$$

La proposizione 7 serve a dimostrare che $\overline{m}$ è contabilmente subadditiva, il che dimostra (i).
Verifichiamo (ii). Dato $Y \in L(\mathcal{B})$ con $L(\mu)(Y) < +\infty$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $B_n \in \mathcal{B}$, $B_o \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$ tale che :

$$Y \subseteq C = \bigcup_{n=o}^{\infty} B_n \qquad \text{e} \qquad L(m)(C) < L(m)(Y) + \varepsilon.$$

Si estenda per il principio di comprensione la successione $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ad una successione interna $\{B_\nu : \nu \in {}^*\mathbb{N}\}$. Per l'osservazione 2.0.1 si può prendere un $\omega \in {}^*\mathbb{N} \smallsetminus \mathbb{N}$ tale che, per ogni λ, $0 \lesssim \lambda \lesssim \omega$, segue $B_\lambda \subseteq B_{\lambda+1}$, e inoltre $m(B_\omega) < L(m)(Y) + \varepsilon$. (Osservare che m è definita su B_ω perché m è interna).

Ma essendo $Y \subseteq C \subseteq B_\omega$, ne segue che $L(m)(Y) \leq L(m)(B_\omega) < L(m)(Y) + \varepsilon$.

(iii) è simile. Nel caso che $°m$ sia una misura di probabilità, l'unicità della estensione si dimostra abbastanza facilmente (cfr. [30]). Nel caso che $°m$ sia una misura non-limitata, tale dimostrazione è stata data da Henson [26].

2.3. PROBABILITA' FINITAMENTE ADDITIVA o σ-ADDITIVA?

La risposta a tale domanda sembra essere "finitamente additiva"; l'assioma di σ-additività, per una probabilità sembra pesante e innaturale, come de Finetti sostiene in [22]. Tra le motivazioni addotte c'è il fatto che una probabilità σ-additiva non può essere definita in generale per tutti gli eventi a causa del teorema di Ulam, e che non si può definire una probabilità uniforme σ-additiva su uno spazio numerabile.
D'altronde non si può escludere il vantaggio tecnico che si ha quando si lavora con una misura σ-additiva. Per ripetere le parole di Halmos([24]) pag. 187) "infinite additivity does not contradict our intuitive ideas, and the theory built on it is <u>sufficiently far developed to assert that the assumption is justified by its success</u>".

Il Teorema di Loeb e i risultati conseguenti ad esso (vedi [10][11][12][28][29]) sembrano dare un'alternativa alla disputa sopra ricordata. Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ una m.p.f.a.; essa, come abbiamo visto, può essere sollevata ad una funzione di insieme interna $m = {}^*\mu : {}^*\mathcal{P}(X) \to {}^*[0,1]$ per cui $°m = st \circ m$ è una m.p.f.a. su $\mathcal{B} = {}^*\mathcal{P}(X)$. Col teorema di Loeb si estenda $°m$ a $L(m) : L(\mathcal{B}) \to [0,1]$. Allora $L(m)$ è σ-additiva ed è una "buona" misura per lavorare tecnicamente. Dentro $L(\mathcal{B})$ ci sono tutti gli eventi standard; infatti questi sono dentro $\mathcal{B}$, per il fatto che

$\mathcal{B} \supseteq \{{}^*A : A \subseteq X\}$.