

INTRODUZIONE

Oggetto del nostro studio sono operatori differenziali lineari ellittici del secondo ordine

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)D_iu(x) + c(x)u(x). \quad (1.1)$$

Assumiamo che i coefficienti a_{ij}, b_i e c siano funzioni reali limitate e uniformemente continue in Ω aperto di \mathbb{R}^N e, senza restrizione, che la matrice (a_{ij}) dei coefficienti del secondo ordine sia simmetrica (cioè $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j). Richiediamo inoltre che l'operatore soddisfi la condizione di ellitticità

$$\exists \nu_0 > 0 \quad \text{t.c.} \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu_0|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega. \quad (1.2)$$

Osserviamo che la (1.2) dà una stima dal basso sulla forma quadratica associata alla matrice (a_{ij}) , mentre la limitatezza dei coefficienti implica facilmente una stima dall'alto

$$\left| \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\xi_i\xi_j \right| \leq M \sum_{i,j=1}^N |\xi_i\xi_j| \leq MN^2|\xi|^2.$$

Un operatore che soddisfa le condizioni di sopra si dice **uniformemente ellittico**.

E' utile per il seguito richiamare la seguente definizione.

Definizione 1.0.1 Diciamo che un aperto Ω di \mathbb{R}^N è di **classe C^k** , con $k \in \mathbb{N}$, se per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono U intorno di x in \mathbb{R}^N e $H : \overline{B}_R \rightarrow \overline{U}$ diffeomorfismo di classe C^k , tali che

$$U \cap \Omega = H(B_R^+) \quad \text{e} \quad U \cap \partial\Omega = H(\overline{B}_R^+ \cap \{x_N = 0\}).$$

La coppia (U, H) è detta **carta locale** su Ω .

Osservazione 1.0.2 Componendo eventualmente con un'omotetia, si può sempre prendere $R = 1$ nella definizione precedente.

1.1 ALCUNI CONTROESEMPI ALL'ESISTENZA E ALLA REGOLARITÀ RISPETTO ALLA NORMA UNIFORME DI SOLUZIONI DI EQUAZIONI ELLITTICHE

L'interesse verso operatori come quello appena introdotto è legato soprattutto alla risoluzione di problemi al contorno del tipo

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

La scelta dello spazio funzionale al quale deve appartenere il dato f ed entro il quale cercare la soluzione è fondamentale per la risolubilità del problema. Per esempio, esso è mal posto in spazi di funzioni continue, nel senso che se $f \in C(\bar{\Omega})$ allora non è assicurata l'esistenza di una soluzione $u \in C^2(\bar{\Omega})$, neanche quando come A si considera il Laplaciano Δ . L'esempio che segue mira a chiarire questo punto, mostrando peraltro che il problema è di regolarità interna.

Esempio 1.1.1 Poniamoci in \mathbb{R}^2 e costruiamo intanto una funzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che u_{xx} e u_{yy} sono continue nell'origine, mentre u_{xy} non lo è. Definiamo

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{4^k} (\eta P)(2^k x, 2^k y) \quad (1.4)$$

dove $P(x, y) = xy$, $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ è tale che $\eta \equiv 1$ in $B_1(0)$, $\eta \equiv 0$ in $B_2(0)^c$ e $0 \leq \eta \leq 1$, e la successione (c_k) è infinitesima con $0 \leq c_k \leq 1$ e $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \infty$.

Per come sono stati scelti P ed η , il prodotto ηP è una funzione limitata con tutte le derivate limitate, perciò la serie (1.4) converge totalmente insieme alla serie delle derivate prime; ciò prova che $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Lo stesso argomento non si estende alla serie delle derivate seconde, perciò occorre fare un discorso locale: sia $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Posto $r_0 = |(x_0, y_0)|$, denotiamo con U la sfera di raggio $\frac{r_0}{2}$ centrata in (x_0, y_0) , (osserviamo che $(0, 0) \notin U$). In U la serie che definisce u risulta essere una somma finita (perchè da un certo k in poi vale $2^k r_0 \geq 2$), pertanto u è C^∞ al di fuori dell'origine.

A questo punto per studiare il comportamento delle derivate seconde di u vicino allo zero, dividiamo $B_1(0)$ in corone circolari aperte $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2^{r+2}} < |(x, y)| < \frac{1}{2^r}\}$ (non disgiunte). Per (x, y) in C_r risulta

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^{r+2} \frac{c_k}{4^k} (\eta P)(2^k x, 2^k y) \\ &= \sum_{k=0}^r \frac{c_k}{4^k} 4^k xy + \frac{c_{r+1}}{4^{r+1}} (\eta P)(2^{r+1} x, 2^{r+1} y) \\ &\quad + \frac{c_{r+2}}{4^{r+2}} (\eta P)(2^{r+2} x, 2^{r+2} y) \end{aligned}$$

e quindi

$$u_{xx}(x, y) = c_{r+1}(\eta P)_{xx}(2^{r+1}x, 2^{r+1}y) + c_{r+2}(\eta P)_{xx}(2^{r+2}x, 2^{r+2}y) \rightarrow 0$$

se $(x, y) \rightarrow 0$. Ne segue che esiste $u_{xx}(0, 0)$ ed è pari a 0.

Con le stesse argomentazioni si ottiene che $u_{yy}(0, 0) = 0$. Invece

$$u_{xy}(x, y) = \sum_{k=0}^r c_k + c_{r+1}(\eta P)_{xy}(2^{r+1}x, 2^{r+1}y) + c_{r+2}(\eta P)_{xy}(2^{r+2}x, 2^{r+2}y)$$

esplode per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ($r \rightarrow \infty$), perchè per ipotesi il primo termine tende a $+\infty$ e gli altri due sono limitati.

A questo punto poniamo $\Omega := B_r(0)$, $f = \Delta u \in C(\Omega)$. Allora non esiste alcuna funzione v in $C^2(B_r(0))$ tale che $\Delta v = f$.

Se per assurdo esistesse una tale v , si avrebbe $\Delta(u - v) = 0$ in $B_r(0) \setminus \{(0, 0)\}$. Quindi $u - v$ sarebbe armonica in $B_r(0) \setminus \{(0, 0)\}$ e limitata, come tale prolungabile ad una funzione armonica in tutto $B_r(0)$. Tale estensione sarebbe pertanto di classe $C^\infty(B_r(0))$ e ciò implicherebbe che la stessa u è $C^2(B_r(0))$, contro quanto provato in precedenza.

L'esempio appena illustrato mostra anche che la possibilità di tenere sotto controllo le singole derivate pure non permette di controllare la limitatezza della derivata mista e anticipa in parte il prossimo risultato generale.

Teorema 1.1.2 (Ornstein) *Siano B, A_1, \dots, A_r , operatori differenziali a coefficienti costanti, omogenei di grado m e linearmente indipendenti. Allora non esiste alcuna costante C tale che per ogni u in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ risulti:*

$$\|Bu\|_\infty \leq C \left(\sup_{1 \leq i \leq r} \|A_i u\|_\infty + \|u\|_\infty \right).$$

DIM. Definiamo per ogni intero positivo n la funzione

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{2^{mk}} (\eta P)(2^k x),$$

dove P è un polinomio omogeneo di grado m tale che $B(P) = 1$ e $A_i(P) = 0$ per ogni i (per la sua esistenza si veda l'Esercizio 1.1.4), mentre i coefficienti (c_k) e la funzione η sono presi come nell'esempio precedente. Poiché sono definite come somme finite di funzioni di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, le u_n sono in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dalla definizione di u_n si vede immediatamente che

$$|u_n(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{mk}} \right) \|\eta P\|_\infty =: K,$$

ossia la successione (u_n) è limitata uniformemente in n . Inoltre, se $|x| \geq 1$ allora $u_n(x) = 0$. Se $|x| < 1$, esiste $r \in \mathbb{N}_0$ tale che $\frac{1}{2^{r+2}} < |x| < \frac{1}{2^r}$. Ne segue che (convenendo di porre $c_k = 0$ se $n < r \leq r+2$)

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{k=0}^{r+2} \frac{c_k}{2^{mk}} (\eta P)(2^k x) \\ &= \sum_{k=0}^r \frac{c_k}{2^{mk}} 2^{mk} P(x) + \frac{c_{r+1}}{2^{(r+1)m}} (\eta P)(2^{r+1} x) \\ &\quad + \frac{c_{r+2}}{2^{(r+2)m}} (\eta P)(2^{r+2} x). \end{aligned}$$

Quindi, tenendo conto della scelta di P e del fatto che ogni A_i è un operatore differenziale omogeneo di grado m , otteniamo che

$$(A_i u_n)(x) = c_{r+1} A_i(\eta P)(2^{r+1} x) + c_{r+2} A_i(\eta P)(2^{r+2} x)$$

e analogamente

$$(B u_n)(x) = \sum_{k=0}^r c_k + c_{r+1} B(\eta P)(2^{r+1} x) + c_{r+2} B(\eta P)(2^{r+2} x).$$

Siccome ηP è una funzione limitata con tutte le derivate limitate e i coefficienti di A_i sono costanti, per ogni n, i , si ha

$$\|u_n\|_\infty + \|A_i u_n\|_\infty \leq K + 2C$$

dove $C = \max_{1 \leq i \leq r} \{\|A_i(\eta P)\|_\infty, \|B(\eta P)\|_\infty\}$, mentre per $n = r$ risulta

$$\|B u_r\|_\infty \geq \left(\sum_{k=0}^r c_k \right) - 2C.$$

Mandando $r \rightarrow +\infty$, deduciamo l'asserto. □

Esercizio 1.1.3 Provare che la funzione $f(x, y) = xy \lg(x^2 + y^2)$ in $B_1(0)$ ha le derivate seconde f_{xx} e f_{yy} limitate, mentre f_{xy} è illimitata.

Esercizio 1.1.4 Provare che dato X spazio vettoriale sul campo scalare K , se f_1, \dots, f_n, f sono funzionali lineari su X tali che $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$, allora esistono costanti $c_1, \dots, c_n \in K$ per cui $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$. Dedurre da qui l'esistenza del polinomio usato nella dimostrazione del teorema di Ornstein.

1.2 ALCUNE STIME A PRIORI PER IL LAPLACIANO IN L^2

Il teorema di Ornstein è un risultato negativo di regolarità interna. Osserviamo però che la norma considerata nelle stime è la norma $\|\cdot\|_\infty$. La situazione migliora considerando la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

Proposizione 1.2.1 Per ogni ϕ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$(a) \quad \|\nabla\phi\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Delta\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}},$$

$$(b) \quad \sum_{i,j=1}^N \|D_{ij}\phi\|_{L^2}^2 = \|\Delta\phi\|_{L^2}^2.$$

In particolare $\|\phi\|_{H^2} \leq C(\|\phi\|_{L^2} + \|\Delta\phi\|_{L^2})$.

DIM. Sia $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per dimostrare (a) è sufficiente usare l'identità

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi \Delta\phi = - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2$$

e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Integrando per parti risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_{ii}\phi D_{jj}\phi = \int_{\mathbb{R}^N} (D_{ij}\phi)^2,$$

da cui sommando su i, j si ha subito (b).

Infine tenendo conto della disuguaglianza $ab \leq 2^{-1}(a^2 + b^2)$ da (a) e (b) si deduce l'ultima stima. \square

La proposizione che segue rappresenta un primo risultato di regolarità ellittica in norma L^2 per il Δ .

Proposizione 1.2.2 Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto; supponiamo $\Delta u = f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ nel senso delle distribuzioni. Allora $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Sia $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \leq \varrho \leq 1$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varrho = 1$, ϱ pari (quest'ultima ipotesi serve per non avere problemi di segno nelle convoluzioni). Se $\varepsilon > 0$,

consideriamo le funzioni approssimanti $\varrho_\varepsilon = \varepsilon^{-N} \varrho(\frac{x}{\varepsilon})$. È noto che $u_\varepsilon := \varrho_\varepsilon * u$ appartiene a $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e che converge a u in norma L^2 , per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Siccome $\Delta u_\varepsilon = \varrho_\varepsilon * f$ (vedi Esercizio 1.2.3), si ha anche che Δu_ε converge a f in L^2 , quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ponendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e indicando con (u_n) la successione così ottenuta, si ha per la Proposizione 1.2.1

$$\|u_n - u_m\|_{H^2} \leq C (\|u_n - u_m\|_{L^2} + \|\Delta u_n - \Delta u_m\|_{L^2}).$$

Quindi (u_n) è una successione di Cauchy in $H^2(\mathbb{R}^N)$, come tale convergente ad un elemento di $H^2(\mathbb{R}^N)$ che è necessariamente u , perchè $u_n \rightarrow u$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ciò conclude la dimostrazione. \square

Esercizio 1.2.3 Provare che $\Delta(\varrho_\varepsilon * u) = \varrho_\varepsilon * f$ nel senso delle distribuzioni, se $\Delta u = f$ nel senso delle distribuzioni, $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$.

1.3 ALCUNE STIME INTERPOLATIVE IN L^2

In questa sezione proviamo alcune disuguaglianze interpolative che permettono di stimare la norma L^2 delle derivate prime di una funzione con le norme della funzione stessa e delle sue derivate seconde. Per dare un'idea, prima di procedere, consideriamo il caso semplice, unidimensionale con la norma uniforme.

Esempio 1.3.1 Per ogni $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ risulta

$$\|u'\|_\infty \leq 2 (\|u\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|u''\|_\infty^{\frac{1}{2}}). \quad (1.5)$$

Sia $u \in C_b^2(\mathbb{R})$; se $h > 0$, applicando la formula di Taylor si ha

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(\xi),$$

da cui

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{1}{2}hu''(\xi),$$

e quindi

$$|u'(x)| \leq \frac{2}{h}\|u\|_\infty + \frac{h}{2}\|u''\|_\infty \quad \forall h > 0. \quad (1.6)$$

Prendendo il valore di h che minimizza il secondo membro della (1.6) e sostituendolo nella stessa, si ha

$$|u'(x)| \leq 2\|u\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|u''\|_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Dall'arbitrarietà di x segue la tesi.

Esercizio 1.3.2 Migliorare la costante con $\sqrt{2}$ nella stima (1.5) prendendo $u(x+h) - u(x-h)$.

Esercizio 1.3.3 Supponiamo che per ogni $v \in C_b^3(\mathbb{R})$ valga la stima

$$\|v'\|_\infty \leq c \|v\|_\infty^\alpha \|v''\|_\infty^\beta \quad (1.7)$$

con $c > 0$ costante. Determinare α e β .

Osservazione 1.3.4 La stima (1.6) con $h = \varepsilon$ oppure $h = \varepsilon^{-1}$ fornisce

$$\|u'\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_\infty + \varepsilon \|u''\|_\infty$$

e

$$\|u'\|_\infty \leq \varepsilon \|u\|_\infty + \frac{1}{\varepsilon} \|u''\|_\infty.$$

Lemma 1.3.5 Per ogni u in $H^2(\mathbb{R}^N)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2. \quad (1.8)$$

DIM. Per densità, basta provare l'enunciato per funzioni u in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sia allora $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Tenendo conto della Proposizione 1.2.1 e della disuguaglianza $ab \leq 2^{-1}(a^2 + b^2)$, se $\eta > 0$ risulta

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\eta} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 \eta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2\eta} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 + \frac{\eta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2. \end{aligned}$$

Prendendo $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ si ottiene la tesi. \square

Osservazione 1.3.6 Se al posto di \mathbb{R}^N si considera un aperto qualunque Ω , allora la stessa tecnica dimostrativa consente di provare la (1.8) per $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (vedi Esercizio 1.3.15). Non è possibile, tuttavia, andare oltre e guadagnare una disuguaglianza simile in tutto $H^2(\Omega)$ (senza cioè alcuna condizione al bordo) anche se Ω è regolare. Per convincersene, basta considerare $\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$; allora una stima del tipo del tipo $\|u\|_{H^1} \leq C(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2})$ non può valere perchè la successione di funzioni armoniche $u_n(x, y) = z^n$ ne è un chiaro controesempio.

Proposizione 1.3.7 Sia Ω aperto limitato con bordo C^2 o $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Allora esiste una costante $c_\Omega > 0$ tale che per ogni $u \in H^2(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \|u\|_{H^2}^2 + \frac{c_\Omega}{\varepsilon} \|u\|_{L^2}^2. \quad (1.9)$$

DIM. Data la regolarità di Ω , esiste E , operatore di estensione, cioè $E : H^2(\Omega) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^N)$ lineare tale che

$$(Eu)|_\Omega = u \quad \text{e} \quad \|Eu\|_{H^k(\mathbb{R}^N)} \leq c \|u\|_{H^k(\Omega)}, \quad k = 0, 1, 2$$

dove $c = c(\Omega)$. Applicando il Lemma 1.3.5 a $v = Eu$, risulta

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &\leq \varepsilon \|\Delta v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &\leq \varepsilon \|v\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \varepsilon c^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{c^2}{4\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

da cui segue la tesi ponendo $\eta = \varepsilon c^2$ e $c_\Omega = c^4/4$. \square

Corollario 1.3.8 Nelle stesse ipotesi della proposizione precedente, per ogni $u \in H^2(\Omega)$ e per ogni $\eta \leq 1$ si ha

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \eta \int_\Omega |D^2 u|^2 + \frac{\tilde{c}_\Omega}{\eta} \int_\Omega |u|^2 \quad (1.10)$$

dove $(D^2 u)$ denota la matrice hessiana di u .

DIM. Tenendo conto della Proposizione 1.3.7 si ha

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \varepsilon \left(\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |D^2 u|^2 \right) + \frac{c_\Omega}{\varepsilon} \int_\Omega |u|^2 \\ &= \varepsilon \int_\Omega |D^2 u|^2 + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + \left(\frac{c_\Omega}{\varepsilon} + \varepsilon \right) \int_\Omega |u|^2, \end{aligned}$$

da cui, per $\varepsilon < 1$ segue

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \int_\Omega |D^2 u|^2 + \frac{c_\Omega + 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \int_\Omega |u|^2.$$

Se $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ allora $\frac{1}{1-\varepsilon} \leq 2$ e quindi

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 2\varepsilon \int_\Omega |D^2 u|^2 + \frac{2\tilde{c}_\Omega}{\varepsilon} \int_\Omega |u|^2$$

Ponendo $\eta = 2\varepsilon \leq 1$ si ha quanto richiesto dall'enunciato. \square

Il seguente lemma rappresenta un risultato di omogeneità: sottoponendo il dominio Ω ad un'omotetia, le costanti coinvolte rimangono sostanzialmente indipendenti dalla trasformazione. Consideriamo il caso della palla per semplicità.

Lemma 1.3.9 *Sia $k > 0$ costante tale che per ogni $\varepsilon \leq 1$ e per ogni $u \in H^2(B_1)$ valga la disuguaglianza*

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_1)} \leq \varepsilon \|D^2 u\|_{L^2(B_1)} + \frac{k}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(B_1)}. \quad (1.11)$$

Allora per ogni $\eta \leq R$ e $u \in H^2(B_R)$ risulta

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_R)} \leq \eta \|D^2 u\|_{L^2(B_R)} + \frac{k}{\eta} \|u\|_{L^2(B_R)}. \quad (1.12)$$

DIM. Presa $u \in H^2(B_R)$, definiamo $v(x) = u(Rx)$, per $|x| \leq 1$. Allora $v \in H^2(B_1)$ e

$$\nabla v(x) = R \nabla u(Rx) \quad \text{e} \quad D^2 v(x) = R^2 D^2 u(Rx).$$

Scrivendo la (1.11) per v e cambiando variabile negli integrali otteniamo

$$R \|\nabla u\|_{L^2(B_R)} \leq \varepsilon R^2 \|D^2 u\|_{L^2(B_R)} + \frac{k}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(B_R)},$$

da cui segue la tesi, dopo aver diviso per R e aver posto $\eta = \varepsilon R$. \square

Il seguente lemma sarà utile nella dimostrazione del Teorema 1.3.12.

Lemma 1.3.10 *Definiamo le seminorme*

$$\Phi_k(u) = \sup_{\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1} (1 - \sigma)^k R^k \|D^k u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \quad k = 0, 1, 2. \quad (1.13)$$

Allora esiste $k_1 = k_1(N)$ tale che per ogni $\varepsilon \leq 1$ e per ogni $u \in H^2(B_R)$ si ha

$$\Phi_1(u) \leq \varepsilon \Phi_2(u) + \frac{k_1}{\varepsilon} \Phi_0(u). \quad (1.14)$$

DIM. Fissato $\gamma > 0$, sia σ tale che

$$\Phi_1(u) \leq (1 - \sigma)R \|\nabla u\|_{L^2(B_{\sigma R})} + \gamma.$$

Allora dal Corollario 1.3.8 e dal Lemma 1.3.9 si ha

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \leq \varepsilon \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} + \frac{k}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \quad \forall \varepsilon \leq \sigma R.$$

Moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza precedente per $(1 - \sigma)R$ e ponendo $\varepsilon = (1 - \sigma)R\eta$, con $\eta \leq 1$ (così $\varepsilon \leq \sigma R$ siccome $\sigma \geq \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} (1 - \sigma)R \|\nabla u\|_{L^2(B_{\sigma R})} &\leq \eta(1 - \sigma)^2 R^2 \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} + \frac{k}{\eta} \|u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \\ &\leq \eta \Phi_2(u) + \frac{k}{\eta} \Phi_0(u), \end{aligned}$$

da cui

$$\Phi_1(u) \leq \eta \Phi_2(u) + \frac{k}{\eta} \Phi_0(u) + \gamma \quad \forall \gamma \text{ e } \forall \eta \leq 1.$$

Facendo tendere $\gamma \rightarrow 0$, si conclude. \square

La proposizione che segue generalizza la Proposizione 1.2.1 ad un operatore puro del secondo ordine a coefficienti costanti.

Proposizione 1.3.11 Sia $Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u$, con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\nu_0 > 0$ costante di ellitticità. Allora per ogni $u \in H_0^2(\Omega)$ risulta

$$\|u\|_{H^2} \leq \frac{1}{4\pi^2 \nu_0} \|Au\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}. \quad (1.15)$$

DIM. Per densità basta provare la stima per un'arbitraria funzione test. Sia pertanto $u \in C_0^\infty(\Omega)$; allora $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed è lecito usare la trasformata di Fourier definita da

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i \xi \cdot x} u(x) dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (1.16)$$

Tenendo conto delle proprietà di cui questa gode rispetto alla derivazione

$$\mathcal{F}(D^\beta u)(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta \mathcal{F}u(\xi) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0^N$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Au)(\xi) &= \mathcal{F}\left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u\right)(\xi) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \mathcal{F}(D_{ij} u)(\xi) \\ &= -4\pi^2 \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_i \xi_j\right) \mathcal{F}u(\xi). \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\mathcal{F}\left(u - \frac{1}{4\pi^2 \nu_0} Au\right)(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) \left(1 + \frac{1}{\nu_0} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_i \xi_j\right).$$

Prendendo i moduli segue che

$$\left| \mathcal{F}\left(u - \frac{1}{4\pi^2\nu_0} Au\right)(\xi) \right| = |\mathcal{F}u(\xi)| \left(1 + \frac{1}{\nu_0} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}\xi_i\xi_j\right) \geq |\mathcal{F}u(\xi)|(1 + |\xi|^2)$$

e quindi dal teorema di Plancherel otteniamo

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2} &= \|(1 + |\xi|^2) \mathcal{F}u(\xi)\|_{L^2} \leq \left\| \mathcal{F}\left(u - \frac{1}{4\pi^2\nu_0} Au\right)(\xi) \right\|_{L^2} \\ &= \left\| \left(u - \frac{1}{4\pi^2\nu_0} Au\right) \right\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} + \frac{1}{4\pi^2\nu_0} \|Au\|_{L^2} \quad (1.17) \end{aligned}$$

che è l'asserto. \square

Torniamo adesso a considerare un operatore generale come in (1.1). L'Osservazione 1.3.6 mostra che una stima del tipo $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Au\|_{L^2(\Omega)})$ con $u \in H^2(\Omega)$, fallisce anche quando Ω è regolare e A è il Laplaciano. Si possono però ottenere delle stime interne come quelle del teorema che segue.

Teorema 1.3.12 *Sia A l'operatore definito in (1.1) e sia $M = \max_{i,j} \{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\}$. Allora per ogni aperto Ω_1 a chiusura compatta contenuta in Ω (brevemente $\Omega_1 \subset\subset \Omega$), esiste una costante $c = c(\Omega, \Omega_1, \nu_0, M)$ tale che per ogni $u \in H^2(\Omega)$ risulta*

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \leq c(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Au\|_{L^2(\Omega)}). \quad (1.18)$$

DIM. Fissiamo $x_0 \in \Omega$ e introduciamo l'operatore

$$(A_0u)(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0)(D_{ij}u)(x).$$

Applicando la proposizione precedente ad A_0 otteniamo

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu_0} \|A_0u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega). \quad (1.19)$$

Sia R_0 tale che se $|x - y| \leq R_0$

$$\left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\nu_0}{2}$$

(l'esistenza di R_0 è garantita dall'uniforme continuità dei coefficienti); allora

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)(D_{ij}u)(x) - (A_0u)(x) \right| &\leq \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)| |D_{ij}u(x)| \\ &\leq \frac{\nu_0}{2} |(D^2u)(x)| \end{aligned}$$

quando $|x - x_0| \leq R_0$. Se $u \in H^2(\Omega)$ ha supporto contenuto in $B_R(x_0)$, dove $R \leq R_0$, allora

$$\left\| \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u - A_0 u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\nu_0}{2} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.20)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\nu_0} \|A_0 u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\nu_0} \left\| A_0 u - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\nu_0} \left(\left\| \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu_0}{2} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\nu_0} \left\| \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che per ogni $u \in H^2(\Omega)$ con supporto contenuto in $B_R(x_0)$, $R \leq R_0$ vale

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\nu_0} \left\| \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.21)$$

A questo punto, poniamo, per semplicità di notazione, $B(x_0, \rho) = B_\rho$; fissato σ con $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, sia $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})$ tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ su $B_{\sigma R}$ e

$$|\nabla \eta| \leq \frac{L}{R(1-\sigma)} \quad \text{e} \quad |D^2 \eta| \leq \frac{L}{R^2(1-\sigma)^2}$$

(L non dipende nè da σ nè da R). Se $u \in H^2(\Omega)$, applicando la (1.21) ad ηu si ottiene

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} &= \|D^2(\eta u)\|_{L^2(B_{\sigma R})} \leq \|D^2(\eta u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{2}{\nu_0} \left\| \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}(\eta u) \right\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\eta u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Siccome

$$D_{ij}(\eta u) = u D_{ij} \eta + D_i u D_j \eta + D_j u D_i \eta + \eta D_{ij} u$$

e $a_{ij} = a_{ji}$, si ha

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}(\eta u) = \eta A u - \eta \sum_{i=1}^N b_i D_i u - \eta c u + 2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i \eta D_j u + \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} \eta u$$

per cui, tenendo conto delle proprietà di η :

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}(\eta u) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \\ & + c_1(M) \left(\|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} + \|u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \right) \\ & + \frac{1}{R(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} + \frac{1}{R^2(1-\sigma)^2} \|u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \\ & \leq c_2(M, R) \left(\|A u\|_{L^2(B_R)} + \frac{1}{R(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2(1-\sigma)^2} \|u\|_{L^2(B_R)} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Usando la stima (1.22), otteniamo

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} & \leq c_3(\nu_0, M, R) \left(\|A u\|_{L^2(B_R)} + \frac{1}{R(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2(1-\sigma)^2} \|u\|_{L^2(B_R)} \right). \end{aligned}$$

Per eliminare a secondo membro il termine con ∇u , non si può interpolare immediatamente ∇u con u e $D^2 u$ perchè i domini di integrazione sono diversi. Il Lemma 1.3.10 consente di superare questa difficoltà. Moltiplichiamo la disuguaglianza di sopra per $R^2(1-\sigma)^2$ e otteniamo, con le notazioni del Lemma 1.3.10

$$\begin{aligned} R^2(1-\sigma)^2 \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} & \leq c_3(\nu_0, M, R) \left(R^2(1-\sigma)^2 \|A u\|_{L^2(B_R)} \right. \\ & \left. + \frac{2R(1-\sigma)}{2} \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} + \|u\|_{L^2(B_R)} \right) \\ & \leq c_3(\nu_0, M, R) \left(R^2(1-\sigma)^2 \|A u\|_{L^2(B_R)} \right. \\ & \left. + 2\Phi_1(u) + \Phi_0(u) \right). \end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore per $\sigma \in [1/2, 1]$, otteniamo

$$\begin{aligned} \Phi_2(u) & \leq c_4(\nu_0, M, R) \left(R^2 \|A u\|_{L^2(B_R)} + \Phi_1(u) + \Phi_0(u) \right) \\ & \leq c_4(\nu_0, M, R) \left(R^2 \|A u\|_{L^2(B_R)} + \varepsilon \Phi_2(u) + \frac{k_1}{\varepsilon} \Phi_0(u) \right). \end{aligned}$$

Prendendo ε in modo che $\varepsilon c_4 = \frac{1}{2}$ e tenendo conto del fatto che $\Phi_0(u) = \|u\|_{L^2(B_R)}$ si ha

$$\Phi_2(u) \leq c_5(\nu_0, M, R)(R^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)}).$$

Ricordando che $\Phi_2(u) = \sup_{\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1} R^2(1 - \sigma)^2 \|D^2u\|_{L^2(B_{\sigma R})}$, prendendo $\sigma = \frac{1}{2}$ si ottiene

$$\frac{R^2}{4} \|D^2u\|_{L^2(B_{\frac{R}{2}})} \leq \Phi_2(u) \leq c_5(\nu_0, M, R)(R^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)})$$

e quindi, dividendo per R^2

$$\|D^2u\|_{L^2(B_{\frac{R}{2}})} \leq \Phi_2(u) \leq c_6(\nu_0, M, R)(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)}).$$

Applicando infine la stima interpolativa del Corollario 1.3.8 per aperti regolari con $\Omega = B_R$, risulta

$$\|u\|_{H^2(B_{\frac{R}{2}})} \leq c_7(\nu_0, M, R)(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)}). \quad (1.24)$$

Sia ora Ω_1 un aperto a chiusura compatta contenuta in Ω . Ricopriamo $\overline{\Omega_1}$ con un numero finito m di palle $B_{\frac{R_i}{2}}(x_i)$, con $x_i \in \overline{\Omega_1}$, $R_i \leq R_0$ e $R_i < \text{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$ (in modo che siano tutte contenute in Ω). La (1.24) vale, dunque, in ogni palla $B_{R_i}(x_i)$ e quindi

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \leq \sum_{i=1}^m \|u\|_{H^2(B_{\frac{R_i}{2}}(x_i))} \leq c(\nu_0, M, \Omega_1, \Omega)(\|Au\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

cioè la tesi. □

Osservazione 1.3.13 Vale la pena di sottolineare la tecnica dimostrativa adottata nel teorema precedente, nota come *metodo di Korn*. Essa può essere schematizzata nei seguenti passi

- si considera dapprima il caso di un operatore a coefficienti costanti;
- si congelano i coefficienti del secondo ordine in un punto del dominio e si fanno stime per funzioni u con supporto compatto contenuto in una palla piccola;
- si applica il punto precedente a ηu , con η cut-off in una palla piccola;
- si conclude con un argomento di ricoprimento.

Osservazione 1.3.14 E' naturale chiedersi se il risultato appena provato si generalizza anche al caso $p \neq 2$. Per $p = \infty$, il Teorema 1.3.12 è falso, come testimoniano i controesempi della prima sezione, e così anche per $p = 1$.

Invece, quando $1 < p < +\infty$, l'asserto continua a valere esattamente negli stessi termini. Tuttavia è più difficile ottenere l'analogo per $p \neq 2$ della Proposizione 1.3.11, cioè

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq c(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}) \quad , \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (1.25)$$

(avere Δ o un operatore a coefficienti costanti con termini solo del secondo ordine è sostanzialmente la stessa cosa). La tecnica per dimostrare la (1.25) si basa su stime di integrali singolari ed è dovuta a Calderon e Zygmund. Superato questo punto, la dimostrazione del teorema con $1 < p < +\infty$ è invece identica a quella appena esposta.

Esercizio 1.3.15 Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^N . Provare che per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |u|^2.$$