ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-ТЭХНІЧНЫХ НАВУК

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ, МЕТАЛЛУРГИЯ

УДК 621.74.536

Р. И. ЕСЬМАН, Е. И. МАРУКОВИЧ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В ПРОЦЕССАХ ГИДРОДИНАМИКИ РАСПЛАВОВ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 22.05.2014)

Введение. В теории подобия, как известно, на основании анализа дифференциальных уравнений математической физики и краевых условий находится связь между отдельными группами величин, существенных для изучаемого процесса, которые соединяются в комплексы определенного вида. Таким образом, осуществляется переход от обычных физических величин к величинам комплексного типа. Это создает ряд важных преимуществ для анализа процесса. Сокращается число переменных благодаря объединению физических величин в комплексы. При рассмотрении задачи в новых переменных исследуется не единичное явление, а множество явлений, объединенных некоторой общностью свойств. Новые переменные, по сути, являются обобщенными величинами.

Вследствие сложности уравнений, описывающих течение вязкой жидкости и газов, ограничиваются возможности теоретического исследования. Достаточно широко применяются экспериментальные методы, которые, как правило, сводятся к моделированию изучаемого движения расплавов на основе полученных результатов натурных испытаний, выводятся соотношения, которые позволяют осуществить перенос закономерностей, полученных на одной модели, на геометрическую подобную модель.

Физическое подобие можно рассматривать как обобщение геометрического. Последнее, как известно, состоит в следующем: сходные линейные размеры L_1, L_2 пропорциональны, сходственные площади S_1, S_2 и объемы V_1, V_2 относятся как квадрат и куб коэффициента пропорциональности соответственно, а сходственные углы равны между собой:

$$L_1/L_2 = \lambda, \quad S_1/S_2 = \lambda^2, \quad V_1/V_2 = \lambda^3.$$

Физическое подобие в гидродинамике включает кинематическое и динамическое подобие.

Кинематическое подобие заключается в том, что в геометрически подобных потоках в сходственных точках скорости частиц жидкости должны быть параллельны, а их абсолютные величины пропорциональны друг другу. Если в геометрически подобных системах одинаковый режим течения и движение жидкости устойчивое, то кинематические подобие, как правило, соблюдается.

Динамическое подобие – это подобие сил: в геометрически подобных потоках на элементарные частицы жидкости, расположенные в сходственных точках, действуют силы, одинаково направленные и пропорциональные по абсолютной величине. Поскольку силы, действующие в гидродинамической системе, связаны между собой уравнением количества движения [1], то оно может быть использовано для вывода основных чисел подобия.

Числа и уравнения подобия. Введем безразмерные переменные. Для этого все линейные размеры отнесем к некоторым характерным величинам: длине L, времени t_0, скорости v_0, давлению p_0. Таким образом, безразмерные переменные вводятся по следующим формулам:

$$\overline{x} = x/L;\ \overline{y} = y/L;\ \overline{z} = z/L;\ \overline{v}_x = v_x/v_0;\ \overline{v_y} = v_y/v_0;\ \overline{v_z} = v_z/v_0;\ \overline{p} = p/p_0;\ \overline{\rho} = \rho/\rho_0 .$$

Согласно закону Ньютона, касательные напряжения могут быть выражены через соответствующие градиенты скорости: $\tau_{xy} = \mu(\partial v_x / \partial v_y + \partial v_y / \partial x)$ или, переходя к безразмерным переменным, имеем $\tau_{xy} = \mu v_0 / L\left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial x}\right) = \frac{\mu v_0}{L}\overline{\tau}_{xy}$.

После некоторых преобразований получим следующее равенство:

$$\frac{L}{v_0 t_0}\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \left(\nabla \vec{v}\right)\rho\vec{v} = \frac{L}{v_0^2}\rho F - \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}\nabla p + \frac{\mu}{\rho_0 v_0 L}\left(\frac{\partial \vec{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\tau}_z}{\partial z}\right).$$

Для подобных потоков безразмерные уравнения количества движения должны совпадать, а для этого безразмерные коэффициенты, составленные из характерных величин, должны иметь одинаковое значение:

$$\frac{L}{v_0 t_0},\ \ \frac{L\left|\vec{F}\right|}{v_0^2},\ \ \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2},\ \ \frac{\mu}{\rho_0 v_0 L}.$$

Данные безразмерные комплексы называются *числами подобия.* К ним относятся:

1. Число Струхаля или безразмерная частота: $\mathrm{Sh} = \frac{L}{v_0 t_0}$. Для установившегося течения характерное время t_0 стремится к бесконечности и $\mathrm{Sh} = 0$.

2. Число Фруда – мера отношения силы тяжести к силам инерции: $\mathrm{Fr} = \frac{gL}{{v_0}^2}$.

Термическое число Фруда $\mathrm{Fr}_t = \frac{gL}{{v_0}^2}\beta\Delta T$ для неизотермического течения жидкости. Поскольку подъемные силы, вызванные температурной неравновесностью, играют важную роль в свободной конвекции, вместо критерия Fr_t применяется критерий, который не содержит масштаба скорости и получается умножением Fr_t на безразмерный комплекс $v_0^2 L^2 / \nu^2$, который называется числом Грасгофа.

3. Число Грасгофа – мера отношения подъемной силы, возникающей в жидкости вследствие различия плотностей отдельных слоев, и силы молекулярного трения:

$$\mathrm{Gr} = \beta g L^3 \Delta T / \nu^2 ,$$

где g – ускорение свободного падения; β – коэффициент объемного расширения жидкости; ΔT – разность характерных температур жидкости и стенки; ν– кинематический коэффициент вязкости жидкости.

4. Число Эйлера – мера отношения давления к силам инерции:

$$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho_0 v_0^2},$$

где ΔP – перепад давления между начальным и заданным сечением (искомая величина $\Delta P = P - P_0$); ρ_0 – плотность жидкости; v_0 – характерное значение скорости потока.

5. Число Рейнольдса – мера отношения характерных сил инерции к силам вязкости:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_0 v_0 L}{\mu} = \frac{v_0 L}{\nu},$$

где μ – динамический коэффициент вязкости жидкости; v_0 – характерное значение скорости потока.

6. Число Фурье – соответствие между скоростью изменения условий в окружающей среде и скоростью перестройки температурного поля внутри тела:

$$\mathrm{Fo} = a\tau / L^2,$$

где a – коэффициент температуропроводности, τ – текущее время.

Гидродинамическое подобие также предполагает подобие граничных условий, т. е. пропорциональность скоростей и напряжений на граничных поверхностях. Это приводит к дополнительным соотношениям и критериям, которые необходимо выполнить при моделировании двух потоков.

Таким образом, для подобия двух потоков помимо геометрического подобия должно быть равенство соответствующих критериев кинематического и динамического подобия. Последние образуются как безразмерные комплексы из характерных для данного вида движения геометрических и гидродинамических величин и физических констант. Кроме того, метод подобия используется и при теоретическом изучении явления как способ представления внутренней структуры переменных и параметров, входящих в выводимые из теории аналитические соотношения, и при обработке экспериментальных результатов в виде эмпирических формул.

Исследуем также тепловое подобие при наличии теплопередачи. Рассмотрим уравнение энергии, описывающее течение вязкой несжимаемой жидкости [1]. Представим данное уравнение в безразмерном виде.

Для этого помимо безразмерных величин, указанных выше, введем безразмерную температуру $\theta = (T - T_0)/T_0 = \Delta T / T_0$, которая характеризует относительное изменение температуры в данной точке в сравнении с характерной температурной T_0 или в сравнении с некоторыми характерным перепадом температур $(\Delta T)_0$ (в последнем варианте $\theta = (T - T_0)/T_0$). В предположении постоянства теплофизических свойств в безразмерном виде уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\rho c v_0 (\Delta T)_0}{L}\left(\frac{L}{v_0 t_0}\frac{\partial\theta}{\partial t} + v_x\frac{\partial\theta}{\partial x} + v_y\frac{\partial\theta}{\partial y} + v_z\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = \frac{\lambda(\Delta T)_0}{L^2}\Delta\theta,$$

где Δ – безразмерный оператор Лапласа.

Из коэффициентов в данном равенстве можно составить два отличных от ранее введенных безразмерных комплекса

$$\lambda/(\rho c u_0 L),\ \ \mu u_0 / \left(\rho c L (\Delta T)_0\right),$$

величина, обратная первому соотношению

$$\mathrm{Pe} = \frac{\rho\, c\, u_0\, L}{\lambda},$$

называется числом Пекле и представляет собой отношение конвективного потока теплоты к диффузионному потоку, переносимому за счет теплопроводности.

Второй комплекс преобразуется к виду

$$\frac{\mu u_0}{\rho\, c\, L(\Delta T)_0} = \frac{\mu}{\rho\, u_0\, L}\frac{u_0^2}{c(\Delta T)_0} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_0^2}{c(\Delta T)_0}.$$

Безразмерная величина $\mathrm{Ec} = \dfrac{u_0^2}{c(\Delta T)_0}$ называется числом Эккерта и определяет повышение температуры за счет диссипации механической энергии. При течении несжимаемой жидкости величина Ec обычно пренебрежимо мала.

Представим число Pe в виде произведения двух безразмерных сомножителей:

$$\mathrm{Pe}=\frac{\rho\,c_p\,u_0\,L}{\lambda}=\frac{\rho\,u_0\,L}{\mu}=\frac{c_p\,\mu}{\lambda}=\mathrm{Re}\frac{c_p\mu}{\lambda}=\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}.$$

Безразмерный комплекс $\mathrm{Pr}=\dfrac{c_p\mu}{\lambda}=\dfrac{\nu}{a}$, где $a=\lambda/\rho\,c_p$ – коэффициент температуропроводности, называется числом Прандтля и характеризует собой подобие динамических и тепловых полей. Величина числа Pr зависит только от физических свойств среды. Например, для воздуха $\mathrm{Pr}\approx 0,7$, а для жидких металлов $\mathrm{Pr}\approx 0,05–0,005$.

При обработке результатов численных экспериментов получено достаточно простое для практического использования в инженерных расчетах уравнение подобия, описывающее конвективный теплообмен в расплавах (для алюминиевых сплавов):

$$\mathrm{Nu} = 12{,}5 + 0{,}0055\mathrm{Pe}.$$

Рассмотрим теплообмен на границе твердое тело – жидкость при граничном условии третьего рода. В безразмерных переменных эти условия перепишутся в виде

$$\frac{\partial\,\theta_f}{\partial\,n}=\frac{\alpha L}{\lambda_f}=\mathrm{Nu},\qquad \theta_f=\frac{T-T_{f\infty}}{T_\omega-T_{f\infty}},$$

$$\frac{\partial\theta_\omega}{\partial n}=\frac{\alpha L}{\lambda_\omega}\left[\theta_\omega+\left(1-\frac{T_{f\infty}}{T_0}\right)\right]=\mathrm{Bi}\left[\theta_\omega+\left(1-\frac{T_{f\infty}}{T}\right)\right],$$

$$\theta_\omega=\frac{T-T_0}{T_0},$$

где T_0 – начальная температура твердого тела.

Безразмерные комплексы $\mathrm{Nu}=\alpha L/\lambda$, $\mathrm{Bi}=\alpha L/\lambda$ называются соответственно числами Нуссельта и Био. Пользуясь числом Нуссельта, тепловой поток на границе жидкость – твердое тело можно представить в виде

$$q=-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_f=\frac{\lambda}{L}\mathrm{Nu}\left(T_\omega-T_{f\infty}\right).$$

Число Nu фактически представляет собой безразмерный коэффициент теплоотдачи.

Поскольку критерии Re, Pr, Gr определяют динамические и тепловые свойства потока, то, очевидно, существуют функциональные зависимости, определяющие поля скорости, температуры, а также числа Нуссельта. Последнюю зависимость можно записать в виде

$$\overline{\mathrm{Nu}}=f\left(\mathrm{Re},\mathrm{Pr},\mathrm{Gr}\right),$$

где $\overline{\mathrm{Nu}}$ – средний по граничной поверхности коэффициент теплоотдачи.

Зависимость теплоотдачи от числа Gr уже при умеренных скоростях движения потока становится пренебрежимо малой, так как подъемные силы, обусловленные разностью температур, становятся малыми в сравнении с силами инерции и трения. Для такого рода течений, называемых вынужденными конвективными течениями, имеем

$$\overline{\mathrm{Nu}}=f\left(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\right).$$

Если движение жидкости обусловлено перепадом температуры, например между двумя стенками, нагретыми до разной температуры, то такое течение называется свободным и для него критериальная зависимость имеет вид

$$\overline{\mathrm{Nu}}=f\left(\mathrm{Gr},\mathrm{Pr}\right).$$

В качестве примера рассмотрим теплопередачу на контактной границе отливка – металлическая форма. В процессе затвердевания отливки между отливкой и формой возникает газовый зазор, толщина которого изменяется во времени и пространстве. Исследования показывают, что теплопередача через газовую прослойку осуществляется механизмами теплопроводности и радиационного теплообмена. Установлено, что при

$$\mathrm{Gr} < 124\,\mathrm{Pr}^{-2}\left(\frac{20}{21} + \mathrm{Pr}\right)\frac{h}{\delta}$$

распределение температуры в зазоре следует линейному закону и перенос теплоты происходит путем теплопроводности и теплового излучения. Для определения максимальной величины газовой прослойки, для которой справедливы эти условия, подставим значения параметров в последнее выражение. При средней температуре газов в зазоре, равной 300 °С, находим, что Pr = 0,674; кинематическая вязкость $\nu = 48{,}33 \cdot 10^{-6}$ м^2/с; δ = 0,002; высота отливки h = 0,25 м; $T_1 + T_2$ = 1000 °С; $T_1 - T_2$ = 100 °С; число Gr подсчитывается по толщине зазора:

$$\mathrm{Gr} = g\beta\left(T_1 - T_2\right)\delta^3 / \nu^2.$$

После подстановки всех расчетных параметров в данное выражение, находим величину газовой прослойки для случая $\delta_{\max} = 2$ мм. При $\delta \leq 2$ мм конвективной составляющей в зазоре можно пренебречь.

Заключение. Применение методов теории подобия для расчета теплофизики литейных процессов позволяет осуществить моделирование движущихся расплавов, а также рассчитать теплопередачу через термоизоляционное покрытие и газовую прослойку в процессах затвердевания отливки из алюминиевых сплавов в металлической форме.

Литература

1. *Есьман Р. И., Шуб Л. И.* // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2010. № 6. С. 53–59.
2. *Есьман Р. И., Жмакин Н. П., Шуб Л. И.* Расчеты процессов литья. Мн., 1977.

R. I. ESMAN, E. I. MARUKOVICH

METHODS OF THE THEORY OF SIMILARITY AT THE PROCESSES OF HYDRODYNAMICS OF MELTS AND HEAT TRANSFER

Summary

A technique of application of methods of the theory of similarity for calculation of thermal physics of casting processes is suggested. It allows modelling of processes of solidification and cooling of castings from aluminium alloys in metallic moulds.

Computation methods for heat transfer at the contact boundary: metallic mould – casting, are developed taking into account the gas gap, which changes in time and space. A similarity equation is obtained for the processes of filling of molds with liquid metal.