CAPITOLO 1

Alcuni teoremi classici di interpolazione

Questo capitolo è incentrato su due teoremi fondamentali della teoria classica di interpolazione: il Teorema di Riesz-Thorin ed il Teorema di Marcinkiewicz. Quest'ultimo in particolare sarà utile per la stima delle derivate seconde del potenziale newtoniano secondo l'approccio di Calderón e Zygmund.
Accanto a questi risultati, abbiamo ritenuto interessante presentare una serie di conseguenze e applicazioni che vanno dalla trasformata di Fourier agli operatori di convoluzione, dall'operatore massimale di Hardy-Littlewood ai potenziali di Riesz.

Nel seguito $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ denota uno spazio di misura dove $\mathcal{B}$ è una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di Ω e μ una misura positiva $\sigma-$finita su $\mathcal{B}$. Indichiamo poi con Σ l'insieme delle funzioni semplici

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i} \ : \ \begin{array}{l} k \in \mathbb{N}, A_i \text{ misurabile }, 0 \leq \mu(A_i) < \infty \\ \text{e } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j \end{array} \right\}$$

e con $\mathcal{M}(\Omega)$ quello delle funzioni misurabili in Ω. Le funzioni $p-$sommabili in Ω rispetto alla misura μ definiscono lo spazio $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Denotiamo con $\|\cdot\|_p$ la norma standard in $L^p(\Omega)$. Ricordiamo che Σ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, \infty]$. Inoltre, data $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ è possibile trovare una successione di funzioni semplici convergente a f sia in $L^p(\Omega)$ che in $L^q(\Omega)$.

1.1. Il Teorema di interpolazione di Riesz-Thorin

Sia dato un operatore lineare $T : \Sigma \to \mathcal{M}(\Omega)$ per cui esistano $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ con $(p_0, q_0) \neq (p_1, q_1)$ ed $M_0, M_1 > 0$ tali che $\|Tf\|_{q_0} \leq M_0\|f\|_{p_0}$ e $\|Tf\|_{q_1} \leq M_1\|f\|_{p_1}$ per ogni $f \in \Sigma$. Allora, per densità, si ha $T : L^{p_0}(\Omega) \to L^{q_0}(\Omega)$ e $T : L^{p_1}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega)$. Il Teorema di Riesz-Thorin permette di "interpolare" tra gli spazi intermedi, permette cioè di definire T anche da $L^{p_\vartheta}(\Omega)$ in $L^{q_\vartheta}(\Omega)$ con p_ϑ e q_ϑ compresi tra p_0 e p_1 (rispettivamente q_0 e q_1).

La dimostrazione di questo teorema si basa su due risultati di analisi complessa che enunciamo e proviamo di seguito. Il primo è un principio del massimo modulo per una funzione olomorfa limitata in una striscia.

LEMMA 1.1 (Phragmen-Lindelöf). *Sia $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1\}$ e sia f una funzione continua e limitata in S e olomorfa in $\overset{\circ}{S}$. Se $|f(z)| \le M$ per ogni $z \in \partial S$, allora $|f(z)| \le M$ per ogni $z \in S$.*

DIM. Supponiamo dapprima che $\lim_{|z|\to\infty,\ z\in S} |f(z)| = 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$|f(z)| \le \varepsilon$$
per ogni $z \in S \setminus Q_R$, dove $Q_R = \{z \in S : |Im\, z| \le R\}$. Per il teorema del massimo modulo applicato al limitato Q_R abbiamo che
$$\sup_{z\in Q_R} |f(z)| \le \max\{M, \varepsilon\},$$
da cui, mandando ε a zero e quindi R a $+\infty$, si ottiene la tesi.
Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la *funzione barriera*
$$f_n(z) = f(z)e^{\frac{z^2}{n}}, \quad z \in S.$$
Come si può facilmente osservare, risulta $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in S}} f_n(z) = 0$, sicché per il primo passo risulta
$$|f(z)e^{\frac{z^2}{n}}| \le Me^{\frac{1}{n}}$$
per ogni $z \in S$. Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene la tesi. □

OSSERVAZIONE 1.2. Il Lemma 1.1 vale in una qualsiasi striscia del piano complesso. La dimostrazione segue da quella già vista, componendo la funzione con opportune traslazioni e rotazioni.

Dalla dimostrazione del Lemma 1.1 si vede che l'ipotesi che $f \in L^\infty(S)$ può essere indebolita richiedendo ad esempio che per ogni $\varepsilon > 0$ si abbia
$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in S}} f(z)e^{\varepsilon z^2} = 0.$$
E' inevitabile tuttavia imporre una condizione di crescita come dimostra il controesempio seguente.

ESEMPIO 1.3. Consideriamo la funzione $f(z) = e^{e^{iz}}$ definita in $S = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \le Re\, z \le \frac{\pi}{2}\}$. La funzione f ha modulo 1 su ∂S, mentre per $Re\, z = 0$
$$|f(z)| = e^{e^{-Im\, z}}$$
esplode per $Im\, z \to -\infty$.

La prossima proposizione raffina la stima del Lemma 1.1.

PROPOSIZIONE 1.4 (Teorema delle tre rette). *Sia* $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$ *e sia* f *una funzione continua e limitata in* S *e olomorfa in* $\mathring{S}$. *Supponiamo che*

(a) $|f(z)| \le M_0$ *se* $\operatorname{Re} z = 0$,
(b) $|f(z)| \le M_1$ *se* $\operatorname{Re} z = 1$.

Allora per ogni $\vartheta \in [0,1]$ *risulta*

$$|f(z)| \le M_0^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta} \qquad \text{se } \operatorname{Re} z = \vartheta. \tag{1.1}$$

DIM. Supponiamo $M_0, M_1 > 0$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, sia $g(z) = M_0^{1-z} M_1^z = e^{(1-z)\log M_0} e^{z \log M_1}$. La funzione g è olomorfa in $\mathbb{C}$ e tale che

$$0 < m \le |g(z)| = M_0^{1-Re\,z} M_1^{Re\,z} \le M$$

per ogni $z \in S$, dove m ed M sono rispettivamente il minimo ed il massimo tra M_0 e M_1. A questo punto applichiamo il Lemma 1.1 alla funzione $h = \dfrac{f}{g}$ ed otteniamo che

$$|h(z)| = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} \le \sup_{\partial S} |h(z)| = 1$$

per ogni $z \in S$. In particolare per $Re\, z = \vartheta$ si ha la (1.1).
Supponiamo adesso che almeno una delle due costanti M_0, M_1 sia nulla. Se, per esempio, $M_0 = 0$, allora $|f(z)| \le \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ se $Re\, z = 0$. Dal passo precedente si ottiene

$$|f(z)| \le \varepsilon^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta}.$$

Facendo tendere $\varepsilon \to 0$ si ha $f \equiv 0$. □

Possiamo adesso dimostrare il risultato principale della sezione.

TEOREMA 1.5 (Riesz-Thorin). *Sia* $T : \Sigma \to \mathcal{M}(\Omega)$ *un operatore lineare e siano* $1 \le p_0, q_0, p_1, q_1 \le \infty$, *con* $(p_0, q_0) \ne (p_1, q_1)$, *tali che*

$$\|Tf\|_{q_0} \le M_0 \|f\|_{p_0} \quad e \quad \|Tf\|_{q_1} \le M_1 \|f\|_{p_1}$$

per ogni $f \in \Sigma$.
Per ogni $0 \le \vartheta \le 1$, *posti* $\dfrac{1}{p_\vartheta} = \dfrac{1-\vartheta}{p_0} + \dfrac{\vartheta}{p_1}$ *e* $\dfrac{1}{q_\vartheta} = \dfrac{1-\vartheta}{q_0} + \dfrac{\vartheta}{q_1}$, *si ha che*

$$\|Tf\|_{q_\vartheta} \le M_0^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta} \|f\|_{p_\vartheta}$$

per ogni $f \in \Sigma$.

OSSERVAZIONE 1.6. Notiamo innanzitutto che, data la densità di Σ in $L^{p_i}(\Omega)$, $i = 0, 1$, l'operatore T può essere esteso a tutto lo spazio $L^{p_i}(\Omega)$ ottenendo così un operatore continuo

$$T_{p_i, q_i} : L^{p_i}(\Omega) \to L^{q_i}(\Omega).$$

Il teorema di Riesz-Thorin dice che per ogni $\vartheta \in [0,1]$ l'operatore T può essere esteso ad un operatore continuo

$$T_{p_\vartheta,q_\vartheta} : L^{p_\vartheta}(\Omega) \to L^{q_\vartheta}(\Omega),$$

dove p_ϑ è compreso tra p_0 e p_1 e q_ϑ è compreso tra q_0 e q_1.

DIM. Fissiamo $\vartheta \in [0,1]$.
(Passo 1) Supponiamo che $1 < p_0, q_0, p_1, q_1 < \infty$. Per ottenere la tesi è sufficiente provare che

$$\left| \int_\Omega Tf \cdot g \, d\mu \right| \leq M_0^{1-\vartheta} M_1^\vartheta \|f\|_{p_\vartheta} \|g\|_{q'_\vartheta}$$

per ogni f e g funzioni semplici, dove con q'_ϑ indichiamo l'esponente coniugato di q_ϑ.
Siano allora $f = \sum_{k=1}^r c_k \chi_{A_k}$ e $g = \sum_{j=1}^s d_j \chi_{B_j}$, con $c_k, d_j \neq 0$, due funzioni semplici non nulle tali che $\|f\|_{p_\vartheta}, \|g\|_{q'_\vartheta} \leq 1$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $0 \leq Re\, z \leq 1$ poniamo

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q'_z} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}.$$

Se $c_k = |c_k| e^{iu_k}$ e $d_j = |d_j| e^{iv_j}$, definiamo

$$f_z = \sum_{k=1}^r |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_z}} e^{iu_k} \chi_{A_k} \quad \text{e} \quad g_z = \sum_{j=1}^s |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_z}} e^{iv_j} \chi_{B_j}. \tag{1.2}$$

Osserviamo che $f_\vartheta = f$ e $g_\vartheta = g$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ poniamo

$$\Phi(z) = \int_\Omega T f_z \cdot g_z \, d\mu = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_z}} e^{iu_k} |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_z}} e^{iv_j} \int_\Omega T(\chi_{A_k}) \cdot \chi_{B_j} \, d\mu \, .$$

Evidentemente Φ è olomorfa in $\mathbb{C}$. Inoltre Φ è limitata in $S = \{0 \leq Re\, z \leq 1\}$ poiché

$$\left| |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_z}} \right| = |c_k|^{p_\vartheta \left(\frac{1-Re\, z}{p_0} + \frac{Re\, z}{p_1} \right)} \quad \text{e} \quad \left| |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_z}} \right| = |d_j|^{q'_\vartheta \left(\frac{1-Re\, z}{q'_0} + \frac{Re\, z}{q'_1} \right)}.$$

Al fine di applicare il teorema delle tre rette stimiamo Φ al bordo di S.
Sia $z \in \mathbb{C}$, $Re\, z = 0$, allora $|f_z| = \sum_{k=1}^r |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_0}} \chi_{A_k}$, $|g_z| = \sum_{j=1}^s |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_0}} \chi_{B_j}$ e quindi

$$\|f_z\|_{p_0} = \|f\|_{p_\vartheta}^{\frac{p_\vartheta}{p_0}} \quad \text{e} \quad \|g_z\|_{q'_0} = \|g\|_{q'_\vartheta}^{\frac{q'_\vartheta}{q'_0}}, \quad Re\, z = 0. \tag{1.3}$$

Analogamente, se $z \in \mathbb{C}$ con $Re\, z = 1$, si ha $|f_z| = \sum_{k=1}^r |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_1}} \chi_{A_k}$, $|g_z| = \sum_{j=1}^s |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_1}} \chi_{B_j}$ e quindi

$$\|f_z\|_{p_1} = \|f\|_{p_\vartheta}^{\frac{p_\vartheta}{p_1}} \quad \text{e} \quad \|g_z\|_{q'_1} = \|g\|_{q'_\vartheta}^{\frac{p'_\vartheta}{q'_1}}, \quad Re\, z = 1. \tag{1.4}$$

Da (1.3) discende che se $Re\, z = 0$

$$|\Phi(z)| \leq \|Tf_z\|_{q_0}\|g_z\|_{q_0'} \leq M_0\|f\|_{p_\vartheta}^{\frac{p_\vartheta}{p_0}}\|g\|_{q_\vartheta'}^{\frac{q_\vartheta'}{q_0'}} \leq M_0,$$

mentre da (1.4) si ha che se $Re\, z = 1$

$$|\Phi(z)| \leq \|Tf_z\|_{q_1}\|g_z\|_{q_1'} \leq M_1\|f\|_{p_\vartheta}^{\frac{p_\vartheta}{p_1}}\|g\|_{q_\vartheta'}^{\frac{q_\vartheta'}{q_1'}} \leq M_1.$$

Per la Proposizione 1.4, ricordando che $f_\vartheta = f$ e $g_\vartheta = g$, abbiamo che

$$\left|\int_\Omega Tf \cdot g\, d\mu\right| = |\Phi(\vartheta)| \leq M_0^{1-\vartheta}M_1^\vartheta$$

che è proprio quello che ci proponevamo di dimostrare.

(Passo 2) Passiamo ora al caso generale in cui p_0, p_1, q_0, q_1 possono assumere i valori $1, \infty$. La dimostrazione presenta delle differenze rispetto al primo passo solo nei casi in cui $p_0 = p_1 = \infty$ o $q_0 = q_1 = 1$. Nel primo caso perde di significato la definizione di f_z per via dell'esponente p_ϑ che vale ∞. Prendiamo allora $f_z = f$ e g_z come in (1.2) e ripetiamo la dimostrazione del primo passo. Similmente, nel secondo caso, cioè il caso in cui $q_\vartheta' = \infty$, prendiamo f_z come in (1.2) e $g_z = g$. □

OSSERVAZIONE 1.7. La dimostrazione del teorema di Riesz-Thorin nel caso in cui $p_0 = p_1$ si può semplificare. E' sufficiente infatti applicare la disuguaglianza di Hölder ed ottenere

$$\|Tf\|_{q_\vartheta} \leq \|Tf\|_{q_0}^{1-\vartheta}\|Tf\|_{q_1}^\vartheta \leq M_0^{1-\vartheta}M_1^\vartheta\|f\|_{p_0}.$$

Osserviamo inoltre che le estensioni dell'operatore T sono tali che se $f \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$, con $p_0 \leq r, s \leq p_1$, allora $T_r f = T_s f$, dove con T_r e T_s indichiamo rispettivamente l'estensione di T a $L^r(\Omega)$ e l'estensione di T a $L^s(\Omega)$. Infatti, presa $f \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ esiste una successione di funzioni semplici $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a f in $L^r(\Omega)$ e in $L^s(\Omega)$. Per continuità e a meno di estratte si ha che $T_r f_n$ converge a $T_r f$ e $T_s f_n$ converge a $T_s f$ quasi ovunque. Ma $T_r f_n = T_s f_n = T f_n$ perché f_n è semplice e quindi $T_r f = T_s f$ quasi ovunque.

1.2. Applicazioni del Teorema di Riesz-Thorin

1.2.1. Trasformata di Fourier. In questa sezione assumiamo che la misura μ sia la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Richiamiamo la definizione di trasformata di Fourier ed alcune delle sue proprietà principali. Data una funzione f in $L^1(\mathbb{R}^N)$ indichiamo con $\mathcal{F}f$ o con $\hat{f}$ la trasformata di Fourier di f definita da

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\, dx\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N\,. \tag{1.5}$$

La trasformata di Fourier è un isomorfismo da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, dove $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è la classe di Schwarz delle funzioni a decrescenza rapida all'infinito, con inverso dato dall'antitrasformata di Fourier, che indichiamo con $\mathcal{F}^{-1}f$ o con $\check{f}$, definita da

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N\,.$$

Inoltre per ogni $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ valgono le seguenti proprietà:

(a) $\mathcal{F}(u * v)(\xi) = \mathcal{F}u(\xi)\cdot\mathcal{F}v(\xi)$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$;
(b) $D^\beta\mathcal{F}u(\xi) = \mathcal{F}v(\xi)$ per ogni multiindice $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$, dove $v(x) = (-2\pi i x)^\beta u(x)$;
(c) $\mathcal{F}\big(D^\beta u\big)(\xi) = (2\pi i\xi)^\beta\mathcal{F}u(\xi)$ per ogni multiindice $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$.

E' ben noto che

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{con } \|\mathcal{F}\|_{1,\infty} \le 1$$

e che (Teorema di Plancherel) la trasformata di Fourier si estende ad un'isometria di $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{con } \|\mathcal{F}\|_{2,2} = 1.$$

Il teorema di Riesz-Thorin permette di dimostrare la continuità di $\mathcal{F}$ tra altri spazi funzionali.

TEOREMA 1.8 (Hausdorff-Young). *Se $1 \le p \le 2$, allora per ogni $f \in \Sigma$*

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \le \|f\|_p.$$

DIM. Sia $1 \le p \le 2$ e sia $\vartheta \in [0,1]$ tale che $\dfrac{1}{p} = (1-\vartheta) + \dfrac{\vartheta}{2} = 1 - \dfrac{\vartheta}{2}$. Per il teorema di Riesz-Thorin, per ogni $f \in \Sigma$

$$\|\mathcal{F}f\|_{q_\vartheta} \le \|f\|_p$$

dove $\dfrac{1}{q_\vartheta} = \dfrac{1-\vartheta}{\infty} + \dfrac{\vartheta}{2} = \dfrac{\vartheta}{2}$. Ma allora q_ϑ è proprio l'esponente coniugato di p e quindi la tesi è provata. □

Possiamo allora estendere la trasformata di Fourier ad ogni L^p con $1 \le p \le 2$, ottenendo un operatore continuo

$$\mathcal{F} : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega), \quad \text{con } \|\mathcal{F}\|_{p,p'} \le 1.$$

Facciamo vedere adesso che queste sono le uniche estensioni possibili della trasformata di Fourier nell'ambito degli spazi L^p.

PROPOSIZIONE 1.9. *Siano* $1 \leq p, q \leq \infty$ *tali che* $\|\mathcal{F}f\|_q \leq C\|f\|_p$ *per ogni* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$; *allora* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

DIM. Fissata $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ non nulla, per ogni $\lambda > 0$ poniamo $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. La trasformata di Fourier di f_λ è

$$\mathcal{F}f_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f_\lambda(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\frac{\xi}{\lambda}} f(x)\lambda^{-N}\, dx = \lambda^{-N}\mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Siccome $\|\mathcal{F}f_\lambda\|_q = \lambda^{-N+\frac{N}{q}}\|\mathcal{F}f\|_q$ e $\|f_\lambda\|_p = \lambda^{\frac{-N}{p}}\|f\|_p$, l'ipotesi implica immediatamente

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq C\lambda^{-N(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)}\|f\|_p.$$

Se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 > 0$ allora mandando $\lambda \to \infty$ si otterrebbe $\mathcal{F}f = 0$, da cui $f = 0$ contro l'ipotesi. Analogamente se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 < 0$ (mandando $\lambda \to 0$). Allora necessariamente $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. □

La proposizione appena vista prova che la trasformata di Fourier può essere un operatore limitato solo da $L^p(\mathbb{R}^N)$ in $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, con p' esponente coniugato di p. Ora vogliamo vedere che la condizione $p \leq 2$ non può essere rimossa. A questo scòpo, consideriamo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, non nulla, tale che $supp\, \hat{u} \subset B(0,1)$ (data $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ con $supp v \subset B(0,1)$, sia $u = \hat{v}$).
Per ogni $t > 0$ definiamo u_t tramite la sua trasformata di Fourier

$$\hat{u}_t(\xi) = \hat{u}(\xi)e^{it|\xi|^2}. \tag{1.6}$$

Siccome $\hat{u}_t \in C_c^\infty(B(0,1)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, si ha $u_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

LEMMA 1.10. *Per ogni* $t > 0$

(a) $\|u_t\|_2 = \|u\|_2$
(b) $\|u_t\|_\infty \leq c\, t^{-\frac{N}{2}}\|u\|_1$.

DIM. (a) Applicando il teorema di Plancherel si ha immediatamente che $\|u_t\|_2 = \|\hat{u}_t\|_2 = \|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$.
(b) Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo $u_{t,\varepsilon}$ tramite $\hat{u}_{t,\varepsilon}(\xi) = \hat{u}(\xi)e^{-(\varepsilon - it)|\xi|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$u_{t,\varepsilon} = u * (\varepsilon - it)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{-\pi^2|\cdot|^2}{(\varepsilon - it)}}$$

e

$$\|u_{t,\varepsilon}\|_\infty \leq \|u\|_1\, |\varepsilon - it|^{\frac{N}{2}}. \tag{1.7}$$

Per il teorema di convergenza dominata $\hat{u}_{t,\varepsilon} \to \hat{u}_t$ in L^2 per $\varepsilon \to 0$ e quindi, per il teorema di Plancherel, $u_{t,\varepsilon} \to u_t$ in L^2 per $\varepsilon \to 0$. Possiamo allora estrarre una successione $(u_{t,\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ da $u_{t,\varepsilon}$ che converge quasi ovunque a u e passare al limite per $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$ nella stima (1.7) ottenendo la (b). $\square$

PROPOSIZIONE 1.11. *Supponiamo che la trasformata di Fourier si estenda ad un operatore continuo*

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^{p'}(\mathbb{R}^N),$$

allora $p \leq 2$.

DIM. Supponiamo per assurdo che $p > 2$ e per ogni $t > 0$ condideriamo la funzione u_t definita in (1.6). Allora, applicando il Lemma 1.10, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p-2}|u_t|^2 \leq \|u_t\|_\infty^{p-2}\|u_t\|_2^2 \\ &\leq \frac{c^{p-2}\|u\|_1^{p-2}}{t^{\frac{N}{2}(p-2)}}\|u\|_2^2 = c_1 t^{-\frac{N}{2}(p-2)}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

dove $c_1 = c_1(p, u)$. Per la disuguaglianza di Hölder e data la continuità di $\mathcal{F}$ da L^p in $L^{p'}$, abbiamo che

$$\|\hat{u}_t\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_t||\hat{u}_t| \leq \|\hat{u}_t\|_{p'}\|\hat{u}_t\|_p \leq C\|u_t\|_p\|\hat{u}_t\|_p. \tag{1.9}$$

Per il Lemma 1.10 e per le disuguaglianze (1.8) e (1.9)

$$\|u\|_2^2 = \|\hat{u}_t\|_2^2 \leq c_2\, \|\hat{u}_t\|_p\, t^{-\frac{N}{2}\frac{p-2}{p}} \leq c_2\, \|\hat{u}\|_\infty\, t^{-\frac{N}{2}\frac{p-2}{p}}, \tag{1.10}$$

dove $c_2 = c_2(p, u)$. Data l'ipotesi $p > 2$, l'esponente di t in (1.10) è strettamente minore di zero. Mandando $t \to +\infty$ otteniamo $u = 0$ contro l'ipotesi. $\square$

1.2.2. Operatori di convoluzione. Fissiamo $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. E' ben noto che per ogni $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ il prodotto di convoluzione $f * g$ appartiene a $L^p(\mathbb{R}^N)$ e vale la disuguaglianza di Young

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p\, \|g\|_1.$$

Se $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, allora dalla disuguaglianza di Hölder segue che $f * g$ è in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p\, \|g\|_{p'}.$$

TEOREMA 1.12 (Hausdorff-Young). *Siano* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $1 \leq q \leq \infty$ *tale che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. *Allora, posto* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, *per ogni* $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ *si ha che* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\, \|g\|_q.$$

DIM. Posto $T_f g = f * g$, per quanto richiamato prima, si ha

$$T_f : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$$

con norma $\|T_f\|_{1,p} \leq \|f\|_p$ e

$$T_f : L^{p'}(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

con norma $\|T_f\|_{p',\infty} \leq \|f\|_p$. Osserviamo che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \geq 0$ equivale a $1 \leq q \leq p'$. Sia allora $\vartheta \in [0,1]$ tale che $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\vartheta}{1} + \dfrac{\vartheta}{p'} = 1 - \dfrac{\vartheta}{p}$. Posto $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1-\vartheta}{p} + \dfrac{\vartheta}{\infty} = \dfrac{1-\vartheta}{p}$, per il Teorema di Riesz-Thorin si ha che

$$T_f : L^q(\mathbb{R}^N) \to L^s(\mathbb{R}^N)$$

è un operatore continuo con norma $\|T_f\|_{q,s} \leq \|f\|_p$. A questo punto la tesi segue dal fatto che $r = s$, come si può facilmente verificare. □

Anche stavolta il risultato ottenuto è ottimale, nel senso precisato dal seguente esercizio.

ESERCIZIO 1.13. Provare che se $\|f * g\|_r \leq c\|f\|_p \; \|g\|_q$ per una costante $c > 0$ ed ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ allora $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.
(Suggerimento: Per ogni $\lambda > 0$ si applichi la disuguaglianza alle funzioni $f_\lambda \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g_\lambda \in L^q(\mathbb{R}^N)$ definite da $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ e $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$ e se ne deduca la tesi come nella dimostrazione della Proposizione 1.9).

1.2.3. Interpolazione di operatori compatti. Nelle ipotesi del Teorema di Riesz-Thorin vediamo che se uno degli operatori T_0, T_1 è compatto, allora T_ϑ è compatto per ogni $0 < \vartheta < 1$.

TEOREMA 1.14. *Siano $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, con $(p_0, q_0) \neq (p_1, q_1)$ e siano*

$$T_0 : L^{p_0}(\Omega) \to L^{q_0}(\Omega) \quad e \quad T_1 : L^{p_1}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega)$$

due operatori limitati, tali che $T_1 = T_0$ su Σ. Se uno dei due operatori è compatto allora per ogni $0 < \vartheta < 1$ l'operatore

$$T_\vartheta : L^{p_\vartheta}(\Omega) \to L^{q_\vartheta}(\Omega),$$

dato dal Teorema 1.5, è compatto.

DIM. Per semplicità di dimostrazione supponiamo che $\mu(\Omega) < \infty$. Supponiamo che T_0 sia compatto. Allora $K = T_0(B_{L^{p_0}})$ è relativamente compatto in $L^{q_0}(\Omega)$, dove $B_{L^{p_0}}$ è la palla chiusa di $L^{p_0}(\Omega)$. Siccome $\overline{K}$ è compatto, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \Sigma$ tali che

$$\overline{K} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(f_i, \varepsilon). \tag{1.11}$$

Possiamo scrivere le f_i nel modo seguente

$$f_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, \chi_{A_j}$$

con A_j insiemi misurabili a due a due disgiunti e tali che $0 < \mu(A_j) < \infty$. Siano $1 \le p \le \infty$ e $g \in L^p(\Omega)$. Posto $span\{\chi_{A_j} : j = 1, \cdots, s\}$ l'inviluppo lineare delle funzioni caratteristiche χ_{A_j}, consideriamo l'operatore di rango finito $P : L^p(\Omega) \to span\{\chi_{A_j} : j = 1, \cdots, s\}$ definito per ogni $g \in L^p(\Omega)$ da

$$Pg = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{1}{\mu(A_j)} \int_{A_j} g\, d\mu \right) \chi_{A_j}.$$

Stimiamo la norma L^p di Pg. Per la disuguaglianza di Jensen,

$$|Pg|^p = \sum_{j=1}^{s} \left| \int_{A_j} g\, \frac{d\mu}{\mu(A_j)} \right|^p \chi_{A_j} \le \sum_{j=1}^{s} \left(\int_{A_j} |g|^p\, \frac{d\mu}{\mu(A_j)} \right) \chi_{A_j}$$

e quindi

$$\int_{\Omega} |Pg|^p\, d\mu \le \sum_{j=1}^{s} \int_{A_j} |g|^p\, d\mu \le \int_{\Omega} |g|^p d\mu.$$

Allora $P : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ ha norma ≤ 1 e in quanto operatore di rango finito è compatto. Inoltre per ogni funzione semplice del tipo $s = \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{A_j}$ si ha che $Ps = s$.
Da (1.11) segue che per ogni $f \in B_{L^{p_0}}$ esiste f_i tale che $\|T_0 f - f_i\| < \varepsilon$. Pertanto

$$\begin{aligned} \|T_0 f - PT_0 f\| &\le \|T_0 f - f_i\| + \|f_i - PT_0 f\| \\ &= \|T_0 f - f_i\| + \|Pf_i - PT_0 f\| \le 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Consideriamo allora gli operatori $T_0 - PT_0 : L^{p_0}(\Omega) \to L^{q_0}(\Omega)$ di norma $\|T_0 - PT_0\| \le 2\varepsilon$ e $T_1 - PT_1 : L^{p_1}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega)$ di norma $\|T_1 - PT_1\| \le 2M_1$, dove $M_1 = \|T_1\|$. Per il Teorema di Riesz-Thorin, per ogni $0 \le \vartheta \le 1$

$$\|T_\vartheta - PT_\vartheta\|_{p_\vartheta, q_\vartheta} \le (2\varepsilon)^{1-\vartheta} (2M_1)^{\vartheta},$$

dove T_ϑ, p_ϑ e q_ϑ sono quelli dell'enunciato del Teorema di Riesz-Thorin. Quest'ultima stima ci dice che per $0 \le \vartheta < 1$ possiamo approssimare in norma T_ϑ con operatori di rango finito e quindi che T_ϑ è un operatore compatto. □

1.3. Il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz

Sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Per ogni $\alpha > 0$ poniamo $\lambda(\alpha) = \lambda_f(\alpha) = \mu\{|f| > \alpha\}$. Notiamo che λ è una funzione decrescente in $(0, \infty)$. Nei prossimi due lemmi presentiamo le proprietà di base di λ.

LEMMA 1.15. *Sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$; allora*

$$\int_\Omega |f| \, d\mu = \int_0^\infty \lambda(\alpha) \, d\alpha.$$

DIM. Sia $G = \{(t,x) \in (0,\infty) \times \Omega : 0 \leq t \leq |f(x)|\}$ e indichiamo con m la misura di Lebesgue sull'intervallo $(0,\infty)$; allora

$$\begin{aligned}(m \times \mu)(G) &= \int_\Omega |f(x)| \, d\mu(x) = \int_\Omega d\mu(x) \int_0^{|f(x)|} dt \\ &= \int_0^\infty dt \int_{\{|f|>t\}} d\mu(x) = \int_0^\infty \lambda(t) \, dt.\end{aligned}$$

□

LEMMA 1.16. *Sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$; allora*

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) \, d\alpha.$$

DIM. Per il lemma precedente

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^p \, d\mu &= \int_0^\infty \mu\{|f|^p > \alpha\} \, d\alpha = \int_0^\infty \mu\{|f| > \alpha^{\frac{1}{p}}\} \, d\alpha \\ &= p \int_0^\infty \mu\{|f| > \beta\} \, \beta^{p-1} d\beta.\end{aligned}$$

□

Introduciamo gli spazi L^p deboli così definiti

$$L^p_w(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega) : \exists A > 0 \quad \lambda(\alpha) \leq \frac{A^p}{\alpha^p} \right\}.$$

Se $f \in L^p(\Omega)$ con $p < \infty$, allora per la disuguaglianza di Chebychev

$$\lambda(\alpha) = \mu\{|f| > \alpha\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{\alpha^p} \tag{1.12}$$

e quindi $L^p(\Omega) \subset L^p_w(\Omega)$. I due spazi sono però diversi, per esempio la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{p}}}$ appartiene a $L^p_w(0,1)$ ma non a $L^p(0,1)$.

Dati $p_1 < p_2$ consideriamo lo spazio vettoriale

$$L^{p_1} + L^{p_2} = \{f = f_1 + f_2 : f_i \in L^{p_i}\}.$$

Se $p_1 < p < p_2$ allora

$$L^{p_1} \cap L^{p_2} \hookrightarrow L^p \subset L^{p_1} + L^{p_2}.$$

Proviamo la prima immersione.
Essendo $p_1 < p < p_2$, si ha $\frac{1}{p_2} < \frac{1}{p} < \frac{1}{p_1}$ e quindi esiste $t \in (0,1)$ tale che

$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_2} + \frac{1-t}{p_1}$. Osserviamo che $|u|^{p(1-t)} \in L^{\frac{p_1}{p(1-t)}}$ e $|u|^{pt} \in L^{\frac{p_2}{pt}}$. Inoltre $\frac{p(1-t)}{p_1} + \frac{pt}{p_2} = 1$. Allora, presa $u \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$, per la disuguaglianza di Hölder, vale

$$\int_\Omega |u|^p = \int_\Omega |u|^p(1-t)|u|^pt \leq \|u\|_{p_1}^{p(1-t)} \|u\|_{p_2}^{pt} < \infty.$$

Dimostriamo la seconda inclusione. Sia $f \in L^p$ e sia $\gamma > 0$. Definiamo

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| > \gamma \\ 0 & \text{se } |f(x)| \leq \gamma \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |f(x)| > \gamma \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq \gamma \end{cases}.$$

$f_1 \in L^{p_1}$ ed $f_2 \in L^{p_2}$, come risulta dalle seguenti disuguaglianze

$$\int |f_1|^{p_1} = \int_{\{|f|>\gamma\}} |f|^{p_1-p}|f|^p \leq \gamma^{p_1-p} \int |f|^p,$$

$$\int |f_2|^{p_2} = \int_{\{|f|\leq\gamma\}} |f|^{p_2-p}|f|^p \leq \gamma^{p_2-p} \int |f|^p.$$

Chiaramente $f = f_1 + f_2$.

DEFINIZIONE 1.17. *Sia $T : L^p(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ un operatore (non necessariamente lineare).*
Se $1 \leq p < \infty$, T di dice di tipo debole (p,p) se esiste $A_p > 0$ tale che per ogni $f \in L^p(\Omega)$

$$\mu\{|Tf| > \alpha\} \leq \left(\frac{A_p\|f\|_p}{\alpha}\right)^p$$

per ogni $\alpha > 0$.
Se $p = \infty$, T si dice di tipo debole (∞, ∞) se esiste $A_\infty > 0$ tale che per ogni $f \in L^\infty(\Omega)$

$$\|Tf\|_\infty \leq A_\infty \|f\|_\infty.$$

In particolare se T è lineare allora T è continuo da $L^\infty(\Omega)$ in sé.

OSSERVAZIONE 1.18. Un'operatore limitato da $L^p(\Omega)$ in sé è in particolare di tipo debole (p,p) come si verifica facilmente usando la (1.12).

Fatte queste premesse siamo ora in grado di enunciare e dimostrare il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz che generalizza quello di Riesz-Thorin, ma è meno preciso nelle stime di alcune costanti.

TEOREMA 1.19 (Marcinkiewicz). *Siano $1 \leq p < r \leq \infty$ e sia $T : L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ tale che*

(i) $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$, *per ogni $f, g \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$;*
(ii) *T è di tipo debole (p,p);*
(iii) *T è di tipo debole (r,r).*

Allora per ogni $p < q < r$ *esiste* $A_q > 0$ *tale che*

$$\|Tf\|_q \leq A_q \|f\|_q$$

per ogni $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$.

DIM. Prendiamo $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ e fissiamo $\alpha > 0$. Definiamo

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| > \alpha \\ 0 & \text{se } |f(x)| \leq \alpha \end{cases} \qquad f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Osserviamo che $|f_i| \leq |f|$ e quindi $f_i \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ per $i = 1, 2$.
(Caso $r < \infty$) Per (i) $|Tf| \leq |Tf_1| + |Tf_2|$, sicché

$$\{|Tf| > \alpha\} \subset \left\{|Tf_1| > \frac{\alpha}{2}\right\} \bigcup \left\{|Tf_2| > \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Da quest'ultima inclusione e da (ii) e (iii) discende che

$$\begin{aligned} \mu\{|Tf| > \alpha\} &\leq \mu\left\{|Tf_1| > \frac{\alpha}{2}\right\} + \mu\left\{|Tf_2| > \frac{\alpha}{2}\right\} \\ &\leq \left(\frac{2A_p\|f_1\|_p}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{2A_r\|f_2\|_r}{\alpha}\right)^r. \end{aligned}$$

Per il Lemma 1.16

$$\begin{aligned} \int_\Omega |Tf|^q \, d\mu &= q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \mu\{|Tf| > \alpha\} \, d\alpha \\ &\leq q 2^p A_p^p \int_0^\infty \alpha^{q-1-p} \int_\Omega |f_1|^p \, d\mu \, d\alpha \\ &\qquad + q 2^r A_r^r \int_0^\infty \alpha^{q-1-r} \int_\Omega |f_2|^r \, d\mu \, d\alpha \\ &= q 2^p A_p^p \int_0^\infty \alpha^{q-1-p} \, d\alpha \int_{\{|f| > \alpha\}} |f(x)|^p \, d\mu(x) \\ &\qquad + q 2^r A_r^r \int_0^\infty \alpha^{q-1-r} \, d\alpha \int_{\{|f| \leq \alpha\}} |f(x)|^r \, d\mu(x) \\ &= q 2^p A_p^p \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \int_0^{|f(x)|} \alpha^{q-1-p} \, d\alpha \\ &\qquad + q 2^r A_r^r \int_\Omega |f(x)|^r \, d\mu(x) \int_{|f(x)|}^\infty \alpha^{q-1-r} \, d\alpha \\ &= \left(\frac{q 2^p A_p^p}{q-p} + \frac{q 2^r A_r^r}{r-q}\right) \int_\Omega |f|^q \, d\mu \,. \end{aligned}$$

(Caso $r = \infty$) Per la (iii) esiste $A_\infty > 0$ tale che $\|Tf_2\|_\infty \leq A_\infty \|f_2\|_\infty \leq A_\infty \alpha$. Perciò, posto $\beta = 2A_\infty \alpha$, abbiamo che

$$\{|Tf| > \beta\} \subset \left\{|Tf_1| > \frac{\beta}{2}\right\}.$$

Da questa inclusione e da (ii) discende che

$$\mu\{|Tf| > \beta\} \leq \left(\frac{2A_p\|f_1\|_p}{\beta}\right)^p.$$

Come nel passo precedente, per il Lemma 1.16 si ha che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Tf|^q \, d\mu &= q\int_0^\infty \beta^{q-1}\mu\{|Tf| > \beta\} \, d\beta \\
&\leq q2^pA_p^p\int_0^\infty \beta^{q-1-p}\int_{\{|f|>\frac{\beta}{2A_\infty}\}} |f|^p \, d\mu \\
&= q2^pA_p^p\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x)\int_0^{2A_\infty|f(x)|} \beta^{q-1-p} \, d\beta \\
&= \frac{q2^qA_p^pA_\infty^{q-p}}{q-p}\int_\Omega |f|^q \, d\mu.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 1.20. (a) Supponiamo che T sia lineare. Allora T si estende ad un operatore lineare limitato da $L^q(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$.
(b) Sia sempre T lineare. Nell'enunciato del teorema di Marcinkiewicz abbiamo considerato un operatore T definito su $L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$. Spesso però in letteratura T è definito su $L^p(\Omega) + L^r(\Omega)$. Ciò non cambia di fatto il teorema in quanto le due ipotesi su T sono equivalenti.
Infatti, dato $T : L^p(\Omega) + L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$, possiamo definire gli operatori $T_p : L^p(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ e $T_r : L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ come le restrizioni di T a $L^p(\Omega)$ e ad $L^r(\Omega)$ rispettivamente. Allora se prendiamo $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ si ha che $T_pf = T_rf = Tf$.
Viceversa se ho due operatori $T_p : L^p(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ e $T_r : L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ che coincidono su $L^p(\Omega)\cap L^r(\Omega)$, allora presa $f = f_1+f_2 \in L^p(\Omega)+L^r(\Omega)$ definiamo l'operatore $T : L^p(\Omega)+L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ ponendo $Tf = T_pf_1+T_rf_2$. Verifichiamo solo che la definizione di T non dipenda dalla scelta di f_1 ed f_2. Siano $g_1 \in L^p(\Omega)$ e $g_2 \in L^r(\Omega)$ tali che $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ allora $f_1 - g_1 = g_2 - f_2 \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, ma poiché T_p coincide con T_r nell'intersezione degli spazi, abbiamo che $T_pf_1 - T_pg_1 = -T_rf_2 + T_rg_2$ e quindi $T_pf_1 + T_rf_2 = T_pg_1 + T_rg_2$.

1.4. Applicazioni del Teorema di Marcinkiewicz

1.4.1. La funzione massimale di Hardy-Littlewood.

Definizione 1.21. *Data $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si definisce funzione massimale di Hardy-Littlewood di f la funzione $Mf : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ così definita*

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Vediamo quali sono le proprietà di base della funzione massimale.

PROPOSIZIONE 1.22. *Sia* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *allora*

1) $Mf = M|f|$;
2) $M(f+g) \leq Mf + Mg$;
3) *se* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *allora* $Mf \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e* $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$;
4) Mf *è semicontinua inferiormente;*
5) *se* $Mf \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *allora* $f = 0$.

DIM. Le proprietà 1), 2) e 3) si verificano facilmente.
4) Per ogni $r > 0$ la funzione $f_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$ è continua in x. Allora Mf è semicontinua inferiormente perché estremo superiore di funzioni continue.
5) Supponiamo $f \neq 0$; allora esiste $R > 0$ tale che $\int_{B(0,R)} |f(x)|\, dx = a > 0$. Sia $|x| \geq R$, allora

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|}\int_{B(x,2|x|)} |f(y)|\, dy \\ &\geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|}\int_{B(0,R)} |f(y)|\, dy = \frac{a}{2^N \omega_N |x|^N}. \end{aligned}$$

Siccome la funzione $x \mapsto |x|^{-N}$ non è sommabile in $\mathbb{R}^N$ risulta $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^N)$. □

Un'utile conseguenza della semicontinuità inferiore della funzione massimale di Hardy-Littlewood è il seguente

COROLLARIO 1.23. *Per ogni* $\alpha > 0$ *l'insieme* $\{Mf > \alpha\}$ *è un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^N$.

Ogni funzione semicontinua inferiormente ha soprallivelli aperti, quindi il corollario precedente è di fatto dimostrato. Presentiamo tuttavia una dimostrazione che sfrutta direttamente la definizione della funzione massimale.

DIM. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tale che $Mf(x_0) > \alpha$. Fissiamo $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $Mf(x_0) > \beta > \alpha$. Data la definizione di $Mf(x_0)$, in corrispondenza di β esiste $r > 0$ tale che

$$\int_{B(x_0,r)} |f| > \beta|B(x_0,r)| > \alpha|B(x_0,r)|.$$

Prendiamo allora $\delta > 0$ tale che $\dfrac{(r+\delta)^N}{r^N} < \dfrac{\beta}{\alpha}$. Un tale δ esiste perché $\dfrac{\beta}{\alpha} > 1$ e $\dfrac{(r+\delta)^N}{r^N} \to 1$ per $\delta \to 0$.
Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ tale che $|x - x_0| < \delta$ risulta che $B(x_0, r) \subset B(x, r+\delta)$ e quindi, data la scelta di δ, si ha che

$$\int_{B(x,r+\delta)} |f| \geq \int_{B(x_0,r)} |f| > \beta\, \omega_N\, r^N > \alpha\, \omega_N\, (r+\delta)^N = \alpha|B(x, r+\delta)|.$$

Quest'ultima disuguaglianza ci dice allora che $Mf(x) > \alpha$ per ogni $x \in B(x_0, \delta)$ e ciò prova che l'insieme $\{Mf > \alpha\}$ è aperto. □

Per ogni $1 \leq p < \infty$ possiamo definire l'operatore

$$M : L^p(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \qquad f \mapsto Mf.$$

Per la Proposizione 1.22 (punti 2 e 3) M è sublineare e di tipo debole (∞, ∞). Nel Teorema 1.25 proveremo che M è di tipo debole $(1,1)$. Concluderemo pertanto, grazie al teorema di Marcinkiewicz, che $M : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ è un operatore limitato per ogni $1 < p \leq \infty$.

Il seguente lemma di ricoprimento sarà utilizzato nella dimostrazione della disuguaglianza massimale.

Lemma 1.24 (di ricoprimento di Vitali). *Sia $W \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r_i)$. Allora esiste $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ tale che*

(i) *$B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset$ per ogni $i, j \in S$ con $i \neq j$;*
(ii) *$W \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 3r_i)$.*

Dim. Consideriamo preliminarmente due palle $B(x, r)$ e $B(y, s)$, con $r \geq s$, tali che $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset$. Allora $|x - y| < r + s \leq 2r$ e quindi $B(y, s) \subset B(x, s + 2r) \subset B(x, 3r)$.
Supponiamo che $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_m$. Partiamo da r_1 e poniamo $B_1 = B(x_1, r_1)$ e $i_1 = 1$. Quindi, posto i_2 il primo degli $i > 1$ tale che $B(x_i, r_i) \cap B(x_1, r_1) = \emptyset$, poniamo $B_2 = B(x_{i_2}, r_{i_2})$. Procedendo in questo modo dopo un numero finito di passi avremo individuato l'insieme di indici $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ le cui rispettive palle $B_j = B(x_{i_j}, r_{i_j})$ sono a due a due disgiunte e, per quanto osservato nella prima parte della dimostrazione, verificano la (ii). □

Teorema 1.25 (Disuguaglianza massimale di Hardy-Littlewood). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora per ogni $\alpha > 0$ si ha*

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq 3^N \frac{\|f\|_1}{\alpha}, \tag{1.13}$$

ossia M è di tipo debole $(1,1)$.

DIM. Sia K un compatto contenuto in $\{Mf > \alpha\}$. Per ogni $x \in K$, $Mf(x) > \alpha$ e quindi esiste un $r(x) > 0$ tale che

$$\int_{B(x,r(x))} |f| > \alpha |B(x, r(x))|. \tag{1.14}$$

Siccome K è compatto esistono $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset K$ tali che K è contenuto nell'insieme $\bigcup_{i=1}^m B(x_i, r(x_i))$. Per il Lemma 1.24 esiste $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ tale che $K \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 3r(x_i))$ e le palle $B(x_i, r(x_i))$, al variare di i in S, sono a due a due disgiunte. La (1.14) implica che

$$\begin{aligned} |K| &\leq \sum_{i \in S} |B(x_i, 3r(x_i))| = 3^N \sum_{i \in S} |B(x_i, r(x_i))| \\ &\leq \frac{3^N}{\alpha} \sum_{i \in S} \int_{B(x_i, r(x_i))} |f| = \frac{3^N}{\alpha} \int_{\bigcup_{i \in S} B(x_i, r(x_i))} |f| \leq \frac{3^N}{\alpha} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Siccome $|\{Mf > \alpha\}| = \sup \Big\{ |K| : K \text{ compatto }, K \subset \{Mf > \alpha\} \Big\}$ si ha la tesi. □

COROLLARIO 1.26. *Se $1 < p \leq \infty$ allora esiste $A_p > 0$ tale che*

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

DIM. La tesi segue immediatamente dal teorema di Marcinkiewicz. □

La Proposizione 1.22(5) mostra che il Corollario 1.26 non è vero per $p = 1$. Vale tuttavia il seguente semplice risultato

COROLLARIO 1.27. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora $Mf(x) < \infty$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$.*

DIM. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $\{Mf = \infty\} \subset \{Mf > n\}$. Allora per la (1.13)

$$|\{Mf = \infty\}| \leq |\{Mf > n\}| \leq \frac{3^N \|f\|_1}{n}.$$

Se mandiamo $n \to \infty$ abbiamo che $|\{Mf = \infty\}| = 0$ e quindi la tesi. □

1.4.2. Punti di Lebesgue.

DEFINIZIONE 1.28. *Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Un punto $x \in \mathbb{R}^N$ si dice punto di Lebesgue di f (scriveremo $x \in \mathcal{L}(f)$) se*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dy = 0.$$

OSSERVAZIONE 1.29. (*i*) Se x è un punto di Lebesgue di f allora

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy.$$

Infatti,

$$\left| f(x) - \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy \right| \le \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)| dy \to 0.$$

(*ii*) Se f è continua in x allora $x \in \mathcal{L}(f)$. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $r_0 > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $|x - y| < r_0$. Allora per ogni $r < r_0$

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy < \varepsilon.$$

TEOREMA 1.30 (Lebesgue). *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *allora* $|R^N \setminus \mathcal{L}(f)| = 0$

DIM. Fissato $r > 0$ poniamo

$$T_r f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy$$

e $Tf(x) = \limsup_{r\to 0^+} T_r f(x)$. Dobbiamo provare che $Tf = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^N$. Per la densità di $L^1(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$, dato $\varepsilon > 0$ esiste $g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Per l'Osservazione 1.29(ii)

$$Tg = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N. \tag{1.15}$$

Poniamo $h = f - g$,

$$\begin{aligned} T_r h(x) &= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y) - h(x)|\, dy && (1.16) \\ &\le \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y)|\, dy + |h(x)| \le Mh(x) + |h(x)|, \end{aligned}$$

dove Mh è la funzione massimale di Hardy-Littlewood. E' evidente che T_r è sublineare, quindi $T_r f \le T_r g + T_r h$. Passando al limsup per $r \to 0$, da (1.15) e (1.16) otteniamo che

$$Tf \le Tg + Th = Th \le Mh + |h|.$$

Da quest'ultima disuguaglianza discende che per ogni $\alpha > 0$

$$\{Tf \ge \alpha\} \subset \left\{ Mh \ge \frac{\alpha}{2} \right\} \cup \left\{ |h| \ge \frac{\alpha}{2} \right\}$$

e quindi per il Teorema 1.25 e per la disuguaglianza di Chebychev

$$\begin{aligned} |\{Tf \ge \alpha\}| &\le \left| \left\{ Mh \ge \frac{\alpha}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ |h| \ge \frac{\alpha}{2} \right\} \right| \\ &\le \frac{2\, 3^N}{\alpha} \|h\|_1 + \frac{2}{\alpha} \|h\|_1 \\ &\le \left(\frac{2\, 3^N}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Mandiamo ε a zero ed otteniamo che $|\{Tf \geq \alpha\}| = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Allora $\{Tf > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{Tf > \frac{1}{n}\}$ ha misura nulla e quindi $Tf = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^N$. □

OSSERVAZIONE 1.31. Il Teorema 1.30 vale anche per funzioni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Infatti per ogni $R > 0$ la funzione $f\chi_{B(0,R)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e quindi q.o. $x \in B(0, \frac{R}{2})$ è un punto Lebesgue di f.

Vediamo alcune conseguenze del teorema di Lebesgue.

DEFINIZIONE 1.32. *Sia* $\{E_h\}_{h\geq 0}$ *una famiglia di sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $x \in \mathbb{R}^N$. *Diciamo che* $\{E_h\}$ *converge a* x *per* $h \to 0$ *se esistono* $\alpha > 0$ *e numeri reali* $r_h \to 0$ *tali che per ogni* h *risulti*

$$E_h \subset B(x, r_h) \quad e \quad |E_h| \geq \alpha |B(x, r_h)|.$$

COROLLARIO 1.33. *Siano* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathcal{L}(f)$ *e* $\{E_h\} \to x$, *allora*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|E_h|} \int_{E_h} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

DIM. Infatti

$$\frac{1}{|E_h|} \int_{E_h} |f(y) - f(x)|\, dy \leq \frac{1}{\alpha |B(x, r_h)|} \int_{B(x,r_h)} |f(y) - f(x)|\, dy$$

che tende a zero al tendere di $h \to 0$ perché x è un punto di Lebesgue di f. □

Dal corollario precedente segue un risultato di derivazione dell'integrale di Lebesgue in dimensione 1.

COROLLARIO 1.34. *Per ogni* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *la funzione* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ *è derivabile q.o. con* $F' = f$ *q.o.*

DIM. Sia $x \in \mathcal{L}(f)$. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, ed $x \in \mathbb{R}$, poniamo $E_h = [x, x+h]$ se $h > 0$ e $E_h = [x+h, x]$ se $h < 0$. Secondo la Definizione 1.32 $\{E_h\} \to x$ per $h \to 0$. Allora per il Corollario 1.33

$$\frac{1}{h} F(x+h) - F(x) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, dt}{h} = \frac{1}{|E_h|} \int_{E_h} f(t)\, dt \tag{1.17}$$

converge a $f(x)$. Questo prova che F è derivabile q.o. e che $F' = f$ q.o. □

COROLLARIO 1.35. *Sia* $f = \chi_E$ *con* E *sottoinsieme misurabile di* $\mathbb{R}^N$. *Allora*

$$\frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} \longrightarrow \begin{cases} 1 & q.o.\ in\ E \\ 0 & q.o.\ in\ E^c. \end{cases} \tag{1.18}$$

I punti $x \in \mathbb{R}^N$ *per cui vale (1.18) si chiamano punti di densità per* E.

DIM.

$$\frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \chi_E(y)\, dy$$

che per l'Osservazione 1.31 converge q.o. a χ_E. □

I punti interni di E sono punti di densità per E. Infatti preso x interno in E basta prendere una palla $B(x, r_0) \subset E$ e per ogni $r < r_0$

$$\frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = \frac{|B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 1 .$$

Il viceversa è falso. Si consideri ad esempio un insieme E di misura non nulla con interno vuoto.

La definizione di punto di Lesbegue si generalizza in modo naturale a quella di p-punto di Lebesgue.

DEFINIZIONE 1.36. *Siano* $1 \le p < \infty$; $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *ed* $x \in \mathbb{R}^N$, x *si dice* p*-punto di Lebesgue di* f *e scriviamo* $x \in p\text{-}\mathcal{L}(f)$, *se esiste*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p\, dy = 0$$

Applicando la disuguaglianza di Jensen si vede subito che se x è un p-punto di Lebesgue per una funzione $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ per qualche $p > 1$, allora x è un punto di Lebesgue per f. Infatti risulta

$$\left(\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \frac{dy}{|B(x,r)|} \right)^p \le \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \frac{dy}{|B(x,r)|} .$$

COROLLARIO 1.37. *Se* $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *con* $1 \le p < \infty$, *allora* $|\mathbb{R}^N \setminus p\text{-}\mathcal{L}(f)| = 0$.

DIM. Sia $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme denso di $\mathbb{C}$. Siccome $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha che $|f - q_i|^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Allora, per il Teorema 1.30, per ogni i esiste $N_i \subset \mathbb{R}^N$ di misura nulla tale che se $x \notin N_i$ risulta

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - q_i|^p\, dy = |f(x) - q_i|^p. \tag{1.19}$$

Poniamo $N = \bigcup_i N_i$. Evidentemente N ha misura nulla. L'identità (1.19) vale allora per ogni $x \notin N$ e per ogni $i \in \mathbb{N}$.
Prendiamo adesso $x \notin N$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Data la densità dei q_i in $\mathbb{C}$ esiste

un indice i tale che $|f(x) - q_i| < \varepsilon$. Si ha allora che

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(x,r)|}&\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \, dy \\ &= \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - q_i + q_i - f(x)|^p \, dy \\ &\leq \frac{2^{p-1}}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - q_i|^p \, dy \\ &\quad + \frac{2^{p-1}}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(x) - q_i|^p \, dy \\ &\leq \frac{2^{p-1}}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - q_i|^p \, dy + 2^{p-1}\varepsilon^p.\end{aligned}$$

Tenendo conto della (1.19), si ha

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|^p \, dy \leq 2^{p-1}|f(x)-q_i|^p + 2^{p-1}\varepsilon^p \leq 2^p\varepsilon^p.$$

Data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ x è un p-punto di Lebesgue per f. □

1.4.3. Convergenza puntuale di operatori di convoluzione. Come noto una funzione $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, con $1 \leq p < \infty$, p uò essere approssimata in norma L^p da funzioni più regolari, usando prodotti di convoluzione. In questa sezione vedremo sotto quali ipotesi tale approssimazione diventa puntuale quasi ovunque. Ricordiamo che, presa $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi = 1$ e posto per ogni $\varepsilon > 0$ $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, si ha

$$\varphi_\varepsilon * f \to f$$

per $\varepsilon \to 0$ in norma L^p.

Assumendo inoltre che $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $supp\,\varphi \subset B(0,1)$ si dimostra facilmente che

$$\varphi_\varepsilon * f \to f \quad \text{q.o.},$$

infatti

$$\begin{aligned}|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| &\leq \varepsilon^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right| |f(x-y) - f(x)| \, dy \\ &= \varepsilon^{-N}\int_{B(0,\varepsilon)} \left|\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right| |f(x-y) - f(x)| \, dy \\ &\leq \varepsilon^{-N}\|\varphi\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)| \, dy \\ &= \frac{\|\varphi\|_\infty \omega_N}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| \, dy.\end{aligned}$$

Da questa stima segue subito che $\varphi_\varepsilon * f(x)$ converge ad $f(x)$ per $\varepsilon \to 0$ in tutti i punti di Lebesgue di f e quindi quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$.

Le ipotesi su φ affinchè la convergenza quasi ovunque sia verificata possono essere indebolite, come vedremo nel prossimo teorema. Premettiamo un lemma tecnico.

LEMMA 1.38. *Sia $\psi(x) = g(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, con $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}^+$ funzione decrescente e sia $f \geq 0$. Allora*

$$(\psi * f)(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \psi \right) Mf(x).$$

DIM. Per ipotesi $\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)dx = N\omega_N \int_0^\infty r^{N-1} g(r)\, dr < \infty.$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e definiamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(t). \tag{1.20}$$

Osserviamo che, fissato t, la serie che definisce $g_n(t)$ si riduce ad un unico termine. Risulta inoltre $0 \leq g_n \leq g$ e $g_n(t) \to g(t)$ nei punti t in cui g è continua. Dato che g è monotona, è continua q.o. e quindi

$$g_n(t) \to g(t)$$

per q.o. $t \in \mathbb{R}$.
Fissato t riscriviamo $g_n(t)$ come segue,

$$\begin{aligned}
g_n(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]0, \frac{k+1}{n}]}(t) - g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]0, \frac{k}{n}]}(t) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[g\left(\frac{k}{n}\right) \chi_{]0, \frac{k}{n}]}(t) - g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]0, \frac{k}{n}]}(t) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k+1}{n}\right) \right] \chi_{]0, \frac{k}{n}]}(t).
\end{aligned}$$

Siccome g è decrescente, il termine generale della serie $a_{k,n} = g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k+1}{n}\right)$ è positivo.

Definiamo a meno di un insieme di misura nulla

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}\, \chi_{B\left(0,\frac{k}{n}\right)}(x)$$

e stimiamo il seguente prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned}
\psi_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n(y) f(x-y)\, dy = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \int_{B\left(x,\frac{k}{n}\right)} f(y)\, dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \int_{B\left(x,\frac{k}{n}\right)} f(y)\, dy \cdot \frac{\left|B\left(0,\frac{k}{n}\right)\right|}{\left|B\left(x,\frac{k}{n}\right)\right|} \\
&\leq Mf(x) \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \left|B\left(0,\frac{k}{n}\right)\right| = Mf(x) \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n.
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\psi * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) f(x-y)\, dy \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n(y) f(x-y)\, dy \\
&\leq Mf(x) \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n(y)\, dy = Mf(x) \int_{\mathbb{R}^N} \psi,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il teorema di convergenza dominata dato che $\psi_n(x) = g_n(|x|) \leq g(|x|) = \psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Il lemma precedente ci permette di sostituire l'ipotesi di limitatezza e la condizione sul supporto di φ con ipotesi più deboli. E' sufficiente infatti che φ sia dominata in valore assoluto da una funzione sommabile, radiale e decrescente.

TEOREMA 1.39. *Sia* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi = 1$, $|\varphi(x)| \leq g(|x|)$ *con* $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ *decrescente e supponiamo che* $\psi(x) = g(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Allora*

$$\varphi_\varepsilon * f \to f \quad q.o. \text{ in } \mathbb{R}^N$$

per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, *con* $1 \leq p < \infty$.

DIM. Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$G_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))|\, dy$$

e $Gf(x) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+} G_\varepsilon f(x)$. Per ottenere la tesi è sufficiente provare che $Gf = 0$ quasi ovunque.
Osserviamo che se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed è continua in x_0 allora $Gf(x_0) = 0$.

Infatti, scelto $r > 0$ tale che $|f(x_0 - y) - f(x_0)| < \varepsilon$, per ogni $y \in B(0, r)$

$$\begin{aligned}
|G_\varepsilon f(x_0)| &\leq \int_{B(0,r)} |\varphi_\varepsilon(y)(f(x_0 - y) - f(x_0))|\, dy \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |\varphi_\varepsilon(y)(f(x_0 - y) - f(x_0))|\, dy \\
&\leq \varepsilon \int_{B(0,r)} |\varphi_\varepsilon(y)|\, dy + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |\varphi_\varepsilon(y)|\, dy \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)|\, dy + 2\|f\|_\infty \int_{|y| \geq \frac{r}{\varepsilon}} |\varphi(y)|\, dy \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

In generale se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|f - h\|_p < \frac{1}{n}. \tag{1.21}$$

$Gh = 0$ perché h è continua e limitata in $\mathbb{R}^N$. Poniamo $r = f - h$, allora per la sublinearità di G_ε

$$G_\varepsilon f \leq G_\varepsilon h + G_\varepsilon r$$

e, passando al limsup per $\varepsilon \to 0$,

$$Gf \leq Gh + Gr = Gr. \tag{1.22}$$

Per il Lemma 1.38

$$\begin{aligned}
G_\varepsilon r(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon(y)||r(x - y) - r(x)|\, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\varepsilon(y)||r(x - y) - r(x)|\, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\varepsilon(y)||r(x - y)|\, dy + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|\right) |r(x)| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|\right) (Mr(x) + |r(x)|),
\end{aligned}$$

e quindi

$$Gr(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|\right) (Mr(x) + |r(x)|). \tag{1.23}$$

Posto $C = \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|$, per ogni $\alpha > 0$, da (1.22) e (1.23) risulta

$$\{Gf \geq \alpha\} \subset \left\{Mr \geq \frac{\alpha}{2C}\right\} \cap \left\{|r| \geq \frac{\alpha}{2C}\right\}$$

e quindi, per il Corollario 1.26 e per la (1.21)

$$|\{Gf \geq \alpha\}| \leq \frac{A_p^p\, \|r\|_p^p\, (2C)^p}{\alpha^p} + \frac{\|r\|_p^p\, (2C)^p}{\alpha^p} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

per $n \to \infty$. Quindi $|\{Gf \geq \alpha\}| = 0$ per ogni $\alpha > 0$ e $Gf = 0$ q.o. $\square$

1.4.4. Potenziali di Riesz. Siano $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $0 < Re\,\gamma < N$. Posto $\varphi(x) = \dfrac{1}{|x|^{N-\gamma}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, definiamo potenziale di Riesz di densità f la funzione $I_\gamma f$ definita da

$$I_\gamma f(x) = f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-\gamma}} f(y)\, dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Lemma 1.40. *Sia* $1 \le p < \infty$. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $0 < \mathrm{Re}\,\gamma < \frac{N}{p}$ *allora l'integrale che definisce* $I_\gamma f$ *converge assolutamente per q.o.* $x \in \mathbb{R}^N$.

Dim. Dato che dobbiamo provare la convergenza assoluta dell'integrale, possiamo supporre senza perdita di generalità che $f \geq 0$ e che $0 < \gamma < \frac{N}{p}$. Fissato $R > 0$ spezziamo l'integrale in due parti

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\, dy &= \int_{B(0,R)} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\, dy \\ &\quad + \int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\, dy.\end{aligned}$$

Il primo integrale converge per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ perché prodotto di convoluzione di $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e di $\varphi\chi_{B(0,R)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, dove $\varphi(x) = |x|^{\gamma-N}$. La convergenza del secondo integrale discende dalla disuguaglianza di Hölder. Infatti, indicato con p' l'esponente coniugato di p, per l'ipotesi $0 < \gamma < \frac{N}{p}$, risulta $\varphi \in L^{p'}(B(0,R)^c)$ e quindi

$$\int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\, dy \le \|f\|_p \left(\int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{(N-\gamma)p'}}\, dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. □

Fissato $1 \le p < \infty$, supponiamo che esistano $1 \le q < \infty$ ed una costante $C > 0$ tali che per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ risulti

$$\|I_\gamma f\|_q \le C \|f\|_p, \tag{1.24}$$

cioè che $I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^q(\mathbb{R}^N)$ sia un operatore limitato, e vediamo che relazione deve sussistere fra p, q e γ.
Fissata $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, per ogni $\lambda > 0$ consideriamo la funzione f_λ definita da $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Si verifica facilmente che $f_\lambda \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $\|f_\lambda\|_p = \lambda^{-\frac{N}{p}} \|f\|_p$ e che

$$(I_\gamma f_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(\lambda x - \lambda y)\, dy = \lambda^{-\gamma} (I_\gamma f)(\lambda x).$$

Allora $I_\gamma f_\lambda \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con $\|I_\gamma f_\lambda\|_q = \lambda^{-Re\,\gamma - \frac{N}{q}} \|I_\gamma f\|_q$ e per la (1.24) con f_λ al posto di f

$$\|I_\gamma f\|_q \leq C\lambda^{-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}+Re\,\gamma}\,\|f\|_p.$$

L'arbitrarietà di λ implica che $-\dfrac{N}{p} + \dfrac{N}{q} + Re\,\gamma = 0$.
Possiamo concludere allora che se esiste un q per cui il potenziale di Riesz risulta un operatore limitato da $L^p(\mathbb{R}^N)$ in $L^q(\mathbb{R}^N)$, allora necessariamente

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{Re\,\gamma}{N}.$$

Osserviamo inoltre che q risulta strettamente maggiore di p e che $\dfrac{Re\,\gamma}{N} < \dfrac{1}{p}$. Quest'ultima condizione, come visto nel Lemma 1.40, garantisce l'assoluta convergenza dell'integrale che definisce I_γ.

TEOREMA 1.41. *Siano* $1 < p < \infty$ *e* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\mathrm{Re}\,\gamma}{N}$, *con* $0 < \mathrm{Re}\,\gamma < \dfrac{N}{p}$. *Il potenziale di Riesz definisce un operatore limitato*

$$I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^q(\mathbb{R}^N).$$

DIM. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Fissato $R > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ stimiamo $|I_\gamma f(x)|$ nel modo seguente

$$|I_\gamma f(x)| \leq \int_{B(0,R)} \frac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}} |f(x-y)|\,dy + \int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}} |f(x-y)|\,dy. \tag{1.25}$$

Per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ poniamo $\psi(y) = |y|^{Re\,\gamma - N}\chi_{B(0,R)}(y)$. Risulta che $\psi(y) = g(|y|)$ con $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ funzione decrescente così definita

$$g(t) = \begin{cases} t^{Re\,\gamma - N} & \text{se } |t| < R \\ 0 & \text{se } |t| \geq R\,. \end{cases}$$

Per il Lemma 1.38 risulta

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} \frac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}} |f(x-y)|\,dy &= \psi * |f|(x) \\ &\leq \left(\int_{B(0,R)} \psi(y)\,dy \right) Mf(x) = \frac{N\omega_N}{Re\,\gamma} R^{Re\,\gamma}\, Mf(x). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Siccome $0 < Re\,\gamma < \frac{N}{p}$ la funzione $y \mapsto \dfrac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}}$ è p'-sommabile e quindi possiamo stimare il secondo integrale in (1.25) per mezzo della disuguaglianza di Hölder, ottenendo

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}} |f(x-y)|\,dy \\
&\leq \left(\int_{B(0,R)^c} |f(x-y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{(N-Re\,\gamma)\frac{p}{p-1}}}\,dy\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \|f\|_p \left(N\omega_N \int_R^\infty \frac{1}{r^{(N-Re\,\gamma)\frac{p}{p-1}}}\, r^{N-1} dr\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\frac{N\omega_N(p-1)}{N-pRe\,\gamma}\right)^{\frac{p-1}{p}} R^{Re\,\gamma-\frac{N}{p}}\, \|f\|_p
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Mettendo assieme (1.26) e (1.27) si ha

$$|I_\gamma f(x)| \leq C\big[Mf(x)R^{Re\,\gamma} + \|f\|_p R^{Re\,\gamma-\frac{N}{p}}\big]$$

dove C è una costante che dipende solo da N, p e γ. Questa stima vale per ogni $R > 0$. Scegliamo in particolare R in modo tale che risulti $Mf(x)R^{Re\,\gamma} = \|f\|_p R^{Re\,\gamma-\frac{N}{p}}$, quindi prendiamo $R = \left(\dfrac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right)^{\frac{p}{N}}$. Per tale valore di R allora si ha

$$|I_\gamma f(x)| \leq 2CMf(x)R^{Re\,\gamma} = 2C\big(Mf(x)\big)^{1-\frac{pRe\,\gamma}{N}} \|f\|_p^{\frac{pRe\,\gamma}{N}}.$$

Ma per ipotesi $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{Re\,\gamma}{N}$ e quindi $\dfrac{pRe\,\gamma}{N} = 1 - \dfrac{p}{q}$. Allora

$$|I_\gamma f(x)| \leq 2C\big(Mf(x)\big)^{\frac{p}{q}} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}.$$

Infine per il Corollario 1.26

$$\int_{\mathbb{R}^N} |I_\gamma f(x)|^q\,dx \leq 2^q C^q \|f\|_p^{q-p} \int_{\mathbb{R}^N} \big(Mf(x)\big)^p\,dx \leq 2^q C^q A_p^p\, \|f\|_p^q$$

da cui discende che

$$\|I_\gamma f\|_q \leq C' \|f\|_p$$

dove C' è una costante dipendente da N, p e γ. □

OSSERVAZIONE 1.42. L'ipotesi $p > 1$ non è dovuta alla tecnica dimostrativa adoperata, ma è una restrizione essenziale.
Infatti se $p = 1$, allora q sarà dato dalla relazione $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{\gamma}{N}$. Supponiamo per assurdo che $I_\gamma : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^q(\mathbb{R}^N)$ sia limitato, ossia esista $C > 0$ tale che $\|I_\gamma f\|_q \leq C\|f\|_1$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Sia ora $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$ con $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi = 1$. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi(x/_\varepsilon)$. Posta

$\psi(x) = \dfrac{1}{|x|^{N-\gamma}}$, $I_\gamma \varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * \psi \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e per l'ipotesi di limitatezza di I_γ risulta

$$\|\varphi_\varepsilon * \psi\|_q = \|I_\gamma \varphi_\varepsilon\|_q \leq C\|\varphi_\varepsilon\|_1 = C.$$

Siccome (φ_ε) è una famiglia di mollificatori, $I_\gamma \varphi_\varepsilon$ converge a ψ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ per $\varepsilon \to 0$ e possiamo quindi estrarre una successione φ_{ε_n} tale che

$$\varphi_{\varepsilon_n} * \psi(x) \to \psi(x)$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$. Per il lemma di Fatou

$$\|\psi\|_q \leq \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_{\varepsilon_n} * \psi\|_q \leq C$$

ma questo è assurdo perché

$$\|\psi\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^N}\, dx = \infty.$$

1.4.5. Potenze frazionarie del Laplaciano. Presa una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, per le note formule che legano derivazione e trasformata di Fourier richiamate nel Paragrafo 1.2.1 risulta

$$(-\Delta f)\hat{}(\xi) = (2\pi|\xi|)^2 \hat{f}(\xi)$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$.
Da questa identità nasce l'idea di definire le potenze frazionarie dell'operatore di Laplace per mezzo della trasformata di Fourier. Presi $\beta \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, definiamo $(-\Delta)^\beta f$ come quella funzione la cui trasformata di Fourier è data da

$$((-\Delta)^\beta f)\hat{}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2\beta} \hat{f}(\xi)$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$.
In questa sezione proveremo che se $0 < Re\,\gamma < N$, allora esiste una costante $c(\gamma) > 0$ tale che

$$(-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} = c(\gamma) I_\gamma.$$

Il senso in cui va intesa questa identità verrà chiarito nel Teorema 1.44.

LEMMA 1.43. *Se $0 < \mathrm{Re}\,\gamma < N$, posto $c(\gamma) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{N-\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\, \pi^{\frac{N}{2}}\, 2^\gamma}$, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N-\gamma}} \overline{\varphi(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)}\, \frac{1}{|\xi|^\gamma} \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, d\xi$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. In altre parole $\dfrac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)}\, \dfrac{1}{|\xi|^\gamma}$ è la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni temperate) di $\dfrac{1}{|x|^{N-\gamma}}$.

DIM. Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Preso $\delta > 0$, consideriamo la funzione $\psi(x) = e^{-\pi\delta|x|^2}$. E' ben noto che $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e che $\hat{\psi}(\xi) = \delta^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}}$. Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi\delta|x|^2} \overline{\varphi(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \delta^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}} \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, d\xi.$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $\delta^{\frac{N-\gamma}{2}-1}$ ed integriamo formalmente in δ

$$\int_0^\infty d\delta \int_{\mathbb{R}^N} \delta^{\frac{N-\gamma}{2}-1} e^{-\pi\delta|x|^2} \overline{\varphi(x)}\, dx = \int_0^\infty d\delta \int_{\mathbb{R}^N} \delta^{-\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}} \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, d\xi. \tag{1.28}$$

Perché l'uguaglianza (1.28) sia vera, dobbiamo provare che gli integrali a primo e secondo membro convergono.
Integriamo il modulo della funzione integranda del primo integrale prima in δ e poi in x. Integrando in δ, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\infty & \left|\delta^{\frac{N-\gamma}{2}-1}\right| e^{-\pi\delta|x|^2} \left|\overline{\varphi(x)}\right| d\delta \\ &= \frac{|\varphi(x)|}{\pi^{\frac{N-Re\,\gamma}{2}} |x|^{N-Re\,\gamma}} \int_0^\infty s^{\frac{N-Re\,\gamma}{2}-1} e^{-s}\, ds \\ &= \frac{|\varphi(x)|}{\pi^{\frac{N-Re\,\gamma}{2}} |x|^{N-Re\,\gamma}} \Gamma\left(\frac{N-Re\,\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

dove l'integrale che definisce $\Gamma(\frac{N-Re\,\gamma}{2})$ converge perché per ipotesi $Re\,\gamma < N$. Se poi integriamo in x, allora

$$\frac{\Gamma\left(\frac{N-Re\,\gamma}{2}\right)}{\pi^{\frac{N-Re\,\gamma}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N-Re\,\gamma}} |\varphi(x)|\, dx < \infty$$

perché localmente $\dfrac{1}{|x|^{N-Re\,\gamma}}$ è sommabile e all'infinito φ è a decrescenza rapida. Per il Teorema di Tonelli allora l'integrale a primo membro della (1.28) converge assolutamente.
Integriamo allo stesso modo il modulo della funzione integranda dell'integrale a secondo membro della (1.28). Ponendo $s = \frac{\pi|\xi|^2}{\delta}$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \delta^{\frac{-Re\,\gamma}{2}-1} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}} \left|\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\right| d\delta &= \frac{|\hat{\varphi}(\xi)|}{\pi^{\frac{Re\,\gamma}{2}} |\xi|^{Re\,\gamma}} \int_0^\infty s^{\frac{Re\,\gamma}{2}-1} e^{-s}\, ds \\ &= \frac{|\hat{\varphi}(\xi)|}{\pi^{\frac{Re\,\gamma}{2}} |\xi|^{Re\,\gamma}} \Gamma\left(\frac{Re\,\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

dove l'integrale che definisce $\Gamma(\frac{Re\,\gamma}{2})$ converge perché per ipotesi $Re\,\gamma > 0$. Come per il primo integrale

$$\frac{\Gamma\left(\frac{Re\,\gamma}{2}\right)}{\pi^{\frac{Re\,\gamma}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|\xi|^{Re\,\gamma}} |\hat{\varphi}(\xi)|\, d\xi < \infty$$

e quindi, ancora una volta per il Teorema di Tonelli, l'integrale a secondo membro della (1.28) risulta assolutamente convergente.
Allora la (1.28) è soddisfatta e per il Teorema di Fubini abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi(x)}\,dx \int_0^\infty \delta^{\frac{N-\gamma}{2}-1}\, e^{-\pi\delta|x|^2}\,d\delta = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\hat\varphi(\xi)}\,d\xi \int_0^\infty \delta^{-\frac{\gamma}{2}-1}\, e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}}\,d\delta$$

e quindi

$$\frac{\Gamma\left(\frac{N-\gamma}{2}\right)}{\pi^{\frac{N-\gamma}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N-\gamma}}|\varphi(x)|\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\pi^{\frac{\gamma}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|\xi|^\gamma}|\hat\varphi(\xi)|\,d\xi.$$

Da quest'ultima discende immediatamente la tesi. □

TEOREMA 1.44. *Siano $0 < \operatorname{Re}\gamma < N$ e $c(\gamma)$ definito come nel Lemma precedente. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, allora*

$$c(\gamma) I_\gamma f = (-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} f,$$

cioè $c(\gamma)(I_\gamma f)\hat{}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\gamma}\hat f(\xi)$ nel senso delle distribuzioni temperate.

DIM. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Per il Lemma 1.43

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N-\gamma}}\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)}\,\frac{1}{|\xi|^\gamma}\overline{\hat\varphi(\xi)}\,d\xi \tag{1.29}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Fissato $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo $\varphi = \overline{f(x-\cdot)}$, sostituiamo in (1.29) ed otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)}\,\frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}}{|\xi|^\gamma}\hat f(\xi)\,d\xi. \tag{1.30}$$

Osserviamo che il primo membro della (1.30) è $I_\gamma f(x)$.
Prendiamo adesso $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, moltiplichiamo ambo i membri della (1.30) per $\hat g(x)$ ed integriamo in x. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_\gamma f(x)\,\hat g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat g(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)}\,\frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}}{|\xi|^\gamma}\hat f(\xi)\,d\xi.$$

Come si può facilmente verificare entrambi gli integrali a primo e a secondo membro convergono assolutamente. Possiamo perciò usare il teorema di Fubini e invertire l'ordine di integrazione, ottenendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_\gamma f(x)\,\hat g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)}\,\frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}}{|\xi|^\gamma}\hat f(\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

Quest'ultima uguaglianza, valida per ogni $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, afferma che la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni temperate di $I_\gamma f$ è la funzione $\dfrac{(2\pi|\xi|)^{-\gamma}\hat f}{c(\gamma)}$, ossia la tesi. □

1.4.6. Immersioni di Sobolev. Una dimostrazione dei teoremi di immersione di Sobolev per $1 < p \leq \infty$ può essere fatta con l'ausilio dei potenziali di Riesz. Il Teorema 1.41 ci permette infatti di dedurre le disuguaglianze di Sobolev, dopo aver osservato che vale la seguente rappresentazione per funzioni $C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

LEMMA 1.45. *Sia $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^N$*

$$f(x) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla f(x-y) \cdot \frac{y}{|y|^N}\, dy. \tag{1.31}$$

DIM. Sia $x \in \mathbb{R}^N$. Fissato $\omega \in S^{N-1}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ poniamo $g(t) = f(x - t\omega)$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f(x) = g(0) = -\int_0^\infty g'(t)\, dt = \int_0^\infty \nabla f(x - t\omega) \cdot \omega\, dt.$$

Integriamo l'identità precedente rispetto a ω su S^{N-1} ed otteniamo

$$\begin{aligned} |S^{N-1}| f(x) &= \int_{S^{N-1}} d\sigma(\omega) \int_0^\infty \nabla f(x - t\omega) \cdot \frac{t\omega}{t^N}\, t^{N-1} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla f(x-y) \cdot \frac{y}{|y|^N}\, dy, \end{aligned}$$

dove $|S^{N-1}| = N\omega_N$ è la misura (N-1)-dimensionale della sfera S^{N-1}. □

Proviamo dapprima le disuguaglianze di Sobolev in tutto $\mathbb{R}^N$ per $1 < p < N$. Osserviamo che questa tecnica dimostrativa non consente di ottenere le stime nel caso $p = 1$.

TEOREMA 1.46 (Sobolev). *Siano $1 < p < N$ e $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$. Allora esiste $C > 0$ tale che*

$$\|f\|_{p^*} \leq C \|\nabla f\|_p \tag{1.32}$$

per ogni $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, cioè $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Per la densità di $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ è sufficiente provare la stima (1.32) per le funzioni di $C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sia allora $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Per il lemma precedente

$$|f(x)| \leq \frac{1}{N\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla f(x-y)|}{|y|^{N-1}}\, dy = \frac{1}{N\omega_N} I_1(|\nabla f|), \tag{1.33}$$

dove $I_1(|\nabla f|)$ è il potenziale di Riesz di densità $|\nabla f|$ di parametro $\gamma = 1$. Per il Teorema 1.41, I_1 è continuo da $L^p(\mathbb{R}^N)$ a $L^{p*}(\mathbb{R}^N)$. Questo fatto insieme alla (1.33) implica che

$$\|f\|_{p*} \leq \frac{1}{N\omega_N} \|I_1(|\nabla f|)\|_q \leq C_{N,p} \|\nabla f\|_p,$$

dove $C_{N,p}$ è una costante che dipende da N e da p. □

E' immediato verificare che le stime provate sopra continuano a valere per spazi di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^N$.

COROLLARIO 1.47 (Sobolev). *Siano Ω aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$ e $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Allora esiste $C > 0$ tale che*

$$\|f\|_{p^*} \leq C\|\nabla f\|_p \tag{1.34}$$

per ogni $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, cioè $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

DIM. Presa $f \in C_c^1(\Omega)$, possiamo estenderla a zero fuori di Ω ed ottenere una funzione, che indichiamo ancora con f, che appartiene a $C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Per il Teorema 1.46, esiste una costante $C_{N,p} > 0$ indipendente da f tale che

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_{N,p}\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Poiché la f ha supporto compatto in Ω si ha che $\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ e $\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$. La tesi segue allora per densità. □

Vediamo adesso come dal Lemma 1.45 si possa ricavare anche la disuguaglianza di Morrey.

OSSERVAZIONE 1.48. Con un semplice cambio di variabili, riscriviamo la (1.31) per un aperto qualsiasi di $\mathbb{R}^N$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto non vuoto e sia $f \in C_c^1(\Omega)$; allora

$$f(x) = \frac{1}{N\omega_N}\int_\Omega \nabla f(y) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|^N}\,dy$$

per ogni $x \in \Omega$.
Infatti, se prendiamo $f \in C_c^1(\Omega)$ e la estendiamo a zero al di fuori di Ω, allora, per il Lemma 1.45,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{N\omega_N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla f(x-y) \cdot \frac{y}{|y|^N}\,dy = \frac{1}{N\omega_N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla f(y) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|^N}\,dy \\ &= \frac{1}{N\omega_N}\int_\Omega \nabla f(y) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|^N}\,dy \end{aligned}$$

per ogni $x \in \Omega$.

LEMMA 1.49. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto non vuoto, $g :]0,\infty[\to [0,\infty[$ funzione decrescente e $\psi(x) = g(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Se $|\Omega| = |B(0,R)|$ per qualche $R > 0$, allora*

$$\int_\Omega \psi(x)\,dx \leq \int_{B(0,R)} \psi(x)\,dx.$$

DIM. Valgono le seguenti identità

$$|\Omega \backslash B(0,R)| = |\Omega| - |\Omega \cap B(0,R)| \quad \text{e} \quad |B(0,R) \backslash \Omega| = |B(0,R)| - |\Omega \cap B(0,R)|,$$

dalle quali, tenuto conto che $|\Omega| = |B_R(0)|$, segue che

$$|\Omega \setminus B_R(0)| = |B_R(0) \setminus \Omega|.$$

Siccome

$$\int_{B(0,R)} \psi = \int_{B(0,R)\backslash\Omega} \psi + \int_{B(0,R)\cap\Omega} \psi \quad \text{e} \quad \int_\Omega \psi = \int_{\Omega\backslash B(0,R)} \psi + \int_{\Omega \cap B(0,R)} \psi \tag{1.35}$$

risulta

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} \psi - \int_\Omega \psi &= \int_{B(0,R)\backslash\Omega} g(|x|) - \int_{\Omega\backslash B(0,R)} g(|x|) \\ &\geq g(R)\,|B(0,R) \setminus \Omega| - g(R)\,|\Omega \setminus B(0,R)| = 0. \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.50 (Morrey). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato e sia $p > N$. Allora*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

DIM. Sia $f \in C_c^1(\Omega)$. Per l'Osservazione 1.48 per ogni $x \in \Omega$ risulta

$$|f(x)| \leq \frac{1}{N\omega_N} \int_\Omega \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy.$$

L'ipotesi $p > N$ implica che $\dfrac{1}{|x-y|^{N-1}}$ appartiene ad $L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, sicché applicando la disuguaglianza di Hölder si ha

$$|f(x)| \leq \frac{1}{N\omega_N} \left(\int_\Omega |\nabla f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{(N-1)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \tag{1.36}$$

per ogni $x \in \Omega$.
Sia adesso $R > 0$ tale che $|\Omega| = |B(0,R)| = \omega_N R^N$. Per il Lemma 1.49

$$\left(\int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{(N-1)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_{B(0,R)} \frac{dy}{|y|^{(N-1)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} = c\, R^{1-\frac{N}{p}}, \tag{1.37}$$

dove $c = c(N,p) > 0$ è una costante che dipende da N e da p. Mettendo assieme (1.36) e (1.37) otteniamo che

$$\|f\|_\infty \leq c(N,p)\, \|\nabla f\|_p\, R^{1-\frac{N}{p}} = c(N,p,\Omega)\, \|\nabla f\|_p.$$

La tesi segue per densità. □

COROLLARIO 1.51. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato di classe C^1. Allora*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

DIM. Sia Ω' aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ tale che $\Omega \subset\subset \Omega'$. Allora esiste un operatore di estensione

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega')$$

$$u \mapsto Eu$$

tale che $\|Eu\|_{W_0^{1,p}(\Omega')} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e qualche $C > 0$ (vedi ad esempio [**1**, Teorema III.3.16, Teorema IV.4.26].) Per il Teorema 1.50 $Eu \in L^\infty(\Omega')$ ed esiste $C' > 0$ tale che

$$\|Eu\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C'\|Eu\|_{W_0^p(\Omega')}.$$

Pertanto

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C''\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Proviamo ora le immersioni degli spazi di Sobolev con $p > N$ in spazi di funzioni hölderiane.

LEMMA 1.52. *Siano Ω un aperto convesso limitato di $\mathbb{R}^N$, $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $S \subset \Omega$ di misura non nulla. Posti $u_S = \dfrac{1}{|S|}\displaystyle\int_S u$ e $d = \mathrm{diam}(\Omega)$ risulta per ogni $x \in \Omega$*

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{d^N}{N|S|}\int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy.$$

DIM. Siano x, y due distinti elementi di Ω. Poniamo $\omega = \dfrac{y-x}{|y-x|}$ e $g(t) = u(x+t\omega)$ per $0 \leq t \leq |y-x|$. La convessità di Ω assicura che la funzione g è ben definita. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) &= g(|y-x|) - g(0) = \int_0^{|y-x|} g'(t)\,dt \\ &= \int_0^{|y-x|} \nabla u(x+t\omega)\cdot\omega\,dt\,. \end{aligned}$$

Integrando rispetto a y su S e dividendo per $|S|$ ambo i membri di quest'ultima uguaglianza risulta

$$u_S - u(x) = \frac{1}{|S|}\int_S dy \int_0^{|y-x|} \nabla u(x+t\omega)\cdot\omega\,dt.$$

Posto

$$V = \begin{cases} |\nabla u| & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{fuori,} \end{cases} \tag{1.38}$$

risulta

$$\begin{aligned}
|u_S - u(x)| &\leq \frac{1}{|S|}\int_{|y-x|\leq d} dy \int_0^\infty V(x+t\omega)\,dt \\
&= \frac{1}{|S|}\int_0^d \rho^{N-1}\,d\rho \int_{S^{N-1}} d\sigma(\omega)\int_0^\infty V(x+t\omega)\,dt\cdot\frac{t^{N-1}}{t^{N-1}} \\
&= \frac{d^N}{N|S|}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{V(x+z)}{|z|^{N-1}}\,dz = \frac{d^N}{N|S|}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{V(x-z)}{|z|^{N-1}}\,dz \\
&= \frac{d^N}{N|S|}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{V(y)}{|x-y|^{N-1}}\,dy = \frac{d^N}{N|S|}\int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy.
\end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 1.53. *Siano $u \in W^{1,p}(B(x_0,R))$ e $N < p \leq \infty$; allora*

(i) $u \in C(\overline{B}(x_0,R))$
(ii) $\|u\|_\infty \leq c(N,R,p)\|u\|_{W^{1,p}(B(x_0,R))}$
(iii) $|u(x) - u_{B(x_0,R)}| \leq c(N,p)\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))}R^{1-\frac{N}{p}}$ *per* $x \in B(x_0,R)$.

OSSERVAZIONE 1.54. Dalla (iii) discende immediatamente che

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c(N,p)\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))}R^{1-\frac{N}{p}}$$

per ogni $x, y \in B(x_0,R)$.

DIM. (Proposizione 1.53) (Passo 1) Supponiamo $p < \infty$.
Sia $u \in C^1(\overline{B(x_0,R)})$. Per il Lemma 1.52, posti $S = \Omega = B(x_0,R)$, abbiamo che

$$|u(x) - u_{B(x_0,R)}| \leq \frac{2^N}{N\omega_N}\int_{B(x_0,R)}\frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy \tag{1.39}$$

per ogni $x \in B(x_0,R)$. Siccome $p > N$ la funzione $\psi(y) = \dfrac{1}{|x-y|^{N-1}} \in L^{p'}(B(x_0,R))$ e per il Lemma 1.49 $\int_{B(x_0,R)}\psi(y)dy \leq \int_{B(x,R)}\psi(y)dy$. Per la disuguaglianza di Hölder, dalla (1.39) discende

$$
\begin{aligned}
|u(x) - u_{B(x_0,R)}| &\le \frac{2^N}{N\omega_N} \left(\int_{B(x_0,R)} |\nabla u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \times \left(\int_{B(x_0,R)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}} \, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\le \frac{2^N}{N\omega_N} \|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))} \left(\int_{B(0,R)} \frac{1}{|z|^{(N-1)p'}} \, dz \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \frac{2^N}{N\omega_N} \|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))} \left(N\omega_N \int_0^R r^{N-1-(N-1)\frac{p}{p-1}} \, dr \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{2^N}{N\omega_N} \|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))} \left(N\omega_N \, \frac{R^{N-(N-1)\frac{p}{p-1}}}{N-(N-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \frac{2^N \, (N\omega_N)^{-\frac{1}{p}}}{\left(N-(N-1)\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}} \, R^{1-\frac{N}{p}} \, \|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))}.
\end{aligned}
$$

Posto

$$
c(N,p) = \frac{2^N \, (N\omega_N)^{-\frac{1}{p}}}{\left(N-(N-1)\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}} > 0 \tag{1.40}
$$

abbiamo provato la (iii) per funzioni di classe $C^1(\overline{B(x_0,R)})$. Dalla (iii) discende immediatamente la (ii), infatti per ogni $x \in B(x_0,R)$

$$
|u(x)| \le u_{B(x_0,R)} + c(N,p) R^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))} \le c(N,R,p) \, \|u\|_{W^{1,p}(B(x_0,R))},
$$

dove abbiamo posto

$$
c(N,R,p) = \omega_N^{\frac{p-1}{p}} R^{N-\frac{N}{p}} + c(N,p) R^{1-\frac{N}{p}}. \tag{1.41}
$$

Sia ora $u \in W^{1,p}(B(x_0,R))$. Poiché $C^1(\overline{B(x_0,R)})$ è denso in $W^{1,p}(B(x_0,R))$ esiste $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{B(x_0,R)})$ che converge ad u in $W^{1,p}(B(x_0,R))$. Dalla (ii) ricaviamo che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

$$
\|u_n - u_m\|_\infty \le c(N,R,p) \, \|u_n - u_m\|_{1,p}
$$

e cioè che la successione (u_n) è di Cauchy per la norma $\|\cdot\|_\infty$. Questo prova la (i), infatti (u_n) converge ad u uniformemente in $\overline{B(x_0,R)}$ ed u risulta perciò continua in $\overline{B(x_0,R)}$. Per ciascuna u_n valgono sia la (ii) che la (iii). Da queste, per $n \to \infty$, si ricavano la (ii) e la (iii) per la funzione u.
(Passo 2) Supponiamo $p = \infty$.
Sia $u \in W^{1,\infty}(B(x_0,R))$. Allora per ogni $p > N$ $u \in W^{1,p}(B(x_0,R))$ e per

il primo passo $u \in C(\overline{B(x_0, R)})$ e valgono le stime

$$\|u\|_\infty \leq c(N, R, p)\|u\|_{W^{1,p}(B(x_0,R))} \tag{1.42}$$

$$|u(x) - u_{B(x_0,R)}| \leq c(N, p)\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))}R^{1-\frac{N}{p}} \tag{1.43}$$

per ogni $x \in B(x_0, R)$. Osserviamo che le costanti $c(N, R, p)$ e $c(N, p)$ definite rispettivamente in (1.40) ed in (1.41) non esplodono al tendere di p all'infinito. Facciamo tendere allora p ad infinito in (1.42) e (1.43) ed otteniamo le stime

$$|u(x) - u_{B(x_0,R)}| \leq 2^N \, R \, \|\nabla u\|_{L^\infty(B(x_0,R))}$$
$$\|u\|_\infty \leq c(N, R) \, \|u\|_{W^{1,\infty}(B(x_0,R))},$$

che sono proprio rispettivamente la (iii) e la (ii) dell'enunciato. □

TEOREMA 1.55 (Morrey). *Sia $N < p < \infty$; allora, posto $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, risulta*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^N) \cap C^\alpha(\mathbb{R}^N).$$

DIM. Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Fissiamo una palla $B(x_0, 1)$. Per la Proposizione 1.53

$$\|u\|_\infty \leq c(N, p) \, \|u\|_{W^{1,p}(B(x_0,1))} \leq c(N, p) \, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

per ogni $x \in B(x_0, 1)$. Data l'arbitrarietà della palla $B(x_0, 1)$ e data l'indipendenza della costante $c(N, p)$ da quest'ultima abbiamo che

$$\|u\|_{L^\infty(B(x_0,1))} \leq c(N, p) \, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.44}$$

Sia ora $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni di $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ che converge ad u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Applicando la disuguaglianza (1.44) alla differenza $u_n - u$ e facendo tendere n all'infinito ricaviamo che $u \in C_0(\mathbb{R}^N)$.
Prendiamo $x, y \in \mathbb{R}^N$ e consideriamo la palla $B(x, |x - y|)$. Per l'Osservazione 1.54

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c(N, p) \, \|\nabla u\|_{L^p(B(x,|x-y|))} \, |x - y|^{1-\frac{N}{p}}$$

e quindi

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c(N, p) \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \, |x - y|^{1-\frac{N}{p}}.$$

Questa prova che $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$, con $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$. □

Grazie a quanto visto finora si può agevolmente provare la seguente caratterizzazione dello spazio $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

TEOREMA 1.56. *Risulta*

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) = L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap Lip(\mathbb{R}^N).$$

DIM. "$\subset$" : Sia $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Allora $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $u \in W^{1,p}(B(x_0,R))$ per ogni $p \geq 1$ e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ed $R > 0$. Presi $x, y \in \mathbb{R}^N$ consideriamo la palla $B(x, |x-y|)$ e per l'Osservazione 1.54 abbiamo che

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c(N,p)\ \|\nabla u\|_{L^p(B(x,|x-y|))}\ |x-y|^{1-\frac{N}{p}}.$$

Mandando p ad infinito nella disuguaglianza precedente e ricordando che la costante $c(N,p)$ non esplode al tendere di p all'infinito, si ha

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq 2c(N)\ \|\nabla u\|_{L^\infty(B(x,|x-y|))}\ |x-y| \\ &\leq 2c(N)\ \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\ |x-y|. \end{aligned}$$

Quest'ultima stima ci dice che $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$.
Vediamo un altro modo per provare questa implicazione. Consideriamo una famiglia di mollificatori $(\varphi_\varepsilon) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e poniamo $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_\infty = \|\nabla u * \varphi_\varepsilon\|_\infty \leq \|\nabla u\|_\infty.$$

Siccome $u_\varepsilon \to u$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ possiamo estrarre una successione u_{ε_n} che converge ad u quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$. Per il Teorema di Lagrange

$$|u_{\varepsilon_n}(y) - u_{\varepsilon_n}(x)| \leq \|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_\infty\ |x-y| \leq \|\nabla u\|_\infty\ |x-y|$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$. Da questa stima se mandiamo $n \to \infty$ otteniamo che $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$.
"$\supset$" : Sia $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$. Esiste allora $L > 0$ tale che $|u(x) - u(y)| \leq L\ |x-y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$. Per ogni $h > 0$ poniamo

$$\tau_h u(x) = \frac{u(x_1+h, x_2, \ldots, x_N) - u(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{|h|}$$

per ogni $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$. Per l'ipotesi di lipschitzianità di u risulta

$$|\tau_h u(x)| \leq L \tag{1.45}$$

per ogni $h > 0$ ed $x \in \mathbb{R}^N$. Fissata allora la palla $B(0,R)$ si ha

$$\int_{B(0,R)} |\tau_h u|^2 \leq L^2\ |B(0,R)|.$$

Per la riflessività di $L^2(B(0,R))$ esistono $h_n \to 0$ e $v \in L^2(B(0,R))$ tali che $\tau_{h_n} u \to v$ per $n \to \infty$ debolmente in $L^2(B(0,R))$. Ne segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v\ \phi &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tau_{h_n} u\ \phi = -\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u\ \tau_{-h_n}\phi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} u\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \end{aligned}$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(B(0,R))$. Allora u ammette derivata nel senso delle distribuzioni $D_1 u = v$ in $B(0,R)$. Siccome $R > 0$ è arbitrario u ammette derivata debole $D_1 u$ in $\mathbb{R}^N$.
Rimane da provare che $D_1 u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sia E un insieme misurabile tale

che $|E| > 0$, $E \subset B(0,R)$ per qualche $R > 0$. Allora dalla (1.45) discende che

$$\left|\frac{1}{|E|}\int_E D_1 u\right| = \frac{1}{|E|}|< D_1 u, \chi_E >| = \frac{1}{|E|}\left|\lim_{n\to\infty} < \tau_{h_n} u, \chi_E >\right| \leq L$$

e quindi, data l'arbitrarietà di E, segue che $\|D_1 u\|_\infty \leq L$. □

Proviamo infine che se $N < p \leq \infty$ le funzioni in $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ sono quasi ovunque differenziabili. In particolare ciò si applica alle funzioni lipschitziane.

TEOREMA 1.57. *Siano $N < p \leq \infty$ ed $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Allora u è differenziabile quasi ovunque.*

DIM. Possiamo supporre $p < \infty$. Sia $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e sia $x_0 \in p\text{-}\mathcal{L}(\nabla u)$ (cioè un p-punto di Lebesgue per ciascuna componente di ∇u). Poniamo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$g(x) = u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)\cdot(x - x_0).$$

La funzione g così definita appartiene a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $g(x_0) = 0$ e $\nabla g(x) = \nabla u(x) - \nabla u(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Fissata la palla $B(x_0, |x - x_0|)$, per l'Osservazione 1.54 si ha

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - g(x_0)| \\ &\leq 2c(N,p)\left(\int_{B(x_0,|x-x_0|)} |\nabla g(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} |x - x_0|^{1-\frac{N}{p}} \\ &= 2c(N,p)\,|x - x_0|^{1-\frac{N}{p}}\left(\int_{B(x_0,|x-x_0|)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Dividiamo primo e secondo membro della disuguaglianza precedente per $|x - x_0| \neq 0$ ed otteniamo

$$\frac{|u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)\cdot(x - x_0)|}{|x - x_0|}$$
$$\leq 2c(N,p)\left(\frac{1}{|x - x_0|^N}\int_{B(x_0,|x-x_0|)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

che converge e zero per $x \to x_0$. Quindi u è differenziabile nel punto x_0. Per il Corollario 1.37 quasi ogni punto di $\mathbb{R}^N$ è un p-punto di Lebesgue per una funzione localmente p-sommabile e da qui segue la tesi. □

TEOREMA 1.58 (Rademacher). *Le funzioni Lipschitziane sono differenziabili quasi ovunque.*

DIM. Basta usare i Teoremi 1.56 e 1.57. □