

Capitolo 9

Esercizi proposti

Qui proponiamo al lettore alcuni esercizi risolvibili con i metodi presentati nei precedenti capitoli. Per invogliare maggiormente alla riflessione, gli esercizi non sono suddivisi per tipologia, starà al lettore studiare la tecnica risolutiva più opportuna tra quelle acquisite durante il corso (qualora non vi siano suggerimenti o richieste esplicite).

1. Calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{\cos^2 z}{(2\pi - z)^3}$$

in $z_0 = 2\pi$.

2. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sin^2 \frac{1}{z} dz \quad (r > 0).$$

3. Utilizzando il Teorema di Rouché, stabilire quante radici del polinomio

$$P(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$$

cadono in $|z| < 1$.

4. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} (v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{pe^{pt}}{p^2 + 1} dp \quad (a > 0, t > 0).$$

Analizzare poi il risultato, tenendo presente la formula di inversione della trasformata di Laplace.

5. Calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = z \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

nel punto singolare al finito (specificandone la natura) e all'infinito complesso.

6. Calcolare

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{z^2 + 1} dz.$$

7. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 4} dx.$$

8. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = 2e^{-t} \cos^2 t.$$

9. Calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z^2}}$$

nel punto singolare al finito (specificandone la natura) e all'infinito complesso.

10. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \vartheta} d\vartheta.$$

11. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx.$$

12. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = 2e^{-t} \sin^2(2t).$$

13. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{2}{z}} dz.$$

14. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

15. Risolvere, con il metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$f(t) = \cos t + \int_0^t f(\tau) \sin(2(t - \tau)) d\tau.$$

16. Scrivere la serie di Laurent associata alla funzione

$$f(z) = \frac{\cos z^2}{z}.$$

17. Stabilire se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x}} dx$$

esiste finito; in caso affermativo, calcolarlo.

18. Calcolare

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz.$$

19. Calcolare il residuo di

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}}{z^2 + 1}$$

in $z_0 = 0$.

20. Calcolare

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x^2 - 4x + 5)} dx.$$

21. Determinare la funzione generatrice $f(t)$ la cui trasformata di Laplace è

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p + 1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

22. Risolvere, con il metodo della trasformata di Laplace, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} f''(t) + 2f'(t) + f(t) = e^{-2t} \\ f(0^+) = 1 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

per $t > 0$.

23. Utilizzare il teorema (di Borel) sulla trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione per trovare la funzione generatrice di

$$F(p) = \frac{2}{p^3(p^2 + 1)}.$$

24. Calcolare

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \quad (\alpha > 0).$$

25. Calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

nei punti singolari al finito e all'infinito complesso.

26. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} (v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 + 1)} dp \quad (a > 0, t > 0).$$

27. Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{z+1}{(z-1)^2(z-2)^2} dz,$$

dove γ è la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 7\}$.