Capitolo 6

Teoria dei residui

6.1 Residuo integrale di una funzione in un suo punto singolare isolato

Definizione 6.1.1 (Residuo di una funzione in un punto singolare isolato al finito)**.** Sia $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$, con z_0 singolarità isolata per f. Si definisce *residuo* (integrale) di f in z_0 il numero complesso:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma(z_0)} f(z)dz \quad \forall\, 0 < r < R \tag{6.1}$$

ove (per l'olomorfia) $\gamma(z_0)$ è una qualsiasi curva generalmente regolare, semplice e chiusa, contornante z_0 e con sostegno in $B_R(z_0)$.

Ricordiamo che a_{-1} è il coefficiente di $\dfrac{1}{\zeta - z_0}$ dello sviluppo in serie di Laurent di $f(\zeta)$ in un intorno di z_0 (cfr. (5.6)).

Osserviamo che se z_0 è singolarità eliminabile, il coefficiente a_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent della funzione f è nullo, perciò $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

Per le funzioni che sono olomorfe in un intorno dell'infinito complesso, si introduce la nozione di residuo all'infinito. Questa è indipendente dal fatto che la funzione possa essere regolare all'infinito, o avervi una singolarità isolata di tipo polare o essenziale.

Definizione 6.1.2 (Residuo all'infinito complesso)**.** Sia

$$\Omega_\infty = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

e sia $f \in H(\Omega_\infty)$. Si definisce *residuo di* f *all'infinito*:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\, dz = -a_1 \quad \forall\, r > R, \tag{6.2}$$

cioè $\operatorname{Res}(f,\infty)$ uguaglia il coefficiente a_1 di $\frac{1}{z}$ nello sviluppo di Laurent di $f(z)$ nell'intorno dell'infinito complesso, cambiato di segno.

Osserviamo che, anche se la funzione f è olomorfa all'infinito, il residuo di f all'infinito può essere diverso da zero (vedere l'esercizio **9** del paragrafo 6.2).

6.2 Calcolo dei residui

Proposizione 6.2.1 (calcolo del residuo per singolarità polari al finito)**.** *Sia* $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ *e sia* z_0 *un polo per* f.

(i) *Se* z_0 *è polo semplice per* f, *allora:*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\zeta \to z_0} f(\zeta)(\zeta - z_0) \tag{6.3}$$

(ii) *Se* z_0 *è polo semplice per* $f = \dfrac{1}{g}$, *allora:*

$$\operatorname{Res}\left(f = \frac{1}{g}, z_0\right) = \frac{1}{g'(z_0)} \tag{6.4}$$

(iii) *Se* $f = h/g$, *con* h *e* g *olomorfe in* z_0 *con* $h(z_0) \neq 0$, *e* g *ha uno zero semplice in* z_0, *allora:*

$$\operatorname{Res}\left(f = \frac{h}{g}, z_0\right) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \tag{6.5}$$

(iv) *Se* z_0 *è un polo di ordine* $p \geq 2$, *allora:*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\zeta \to z_0} \frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{d^{p-1}}{d\zeta^{p-1}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p\right] \tag{6.6}$$

Dimostrazione. Il punto (i) è conseguenza della proposizione 5.3.1. La (ii) segue dall'applicazione del teorema di L'Hôpital:

$$\text{Res}\left(f = \frac{1}{g}, z_0\right) = \lim_{\zeta \to z_0} \frac{\zeta - z_0}{g(\zeta)} = \lim_{\zeta \to z_0} \frac{1}{g'(\zeta)} = \frac{1}{g'(z_0)}.$$

Per provare (iii), osserviamo che per le ipotesi z_0 è un polo del primo ordine per f, pertanto :

$$\begin{aligned}\text{Res}\left(f = \frac{h}{g}, z_0\right) &= \lim_{\zeta \to z_0} \frac{h(\zeta)(\zeta - z_0)}{g(\zeta)} = \lim_{\zeta \to z_0} \frac{h'(\zeta)(\zeta - z_0) + h(\zeta)}{g'(\zeta)} = \\ &= \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.\end{aligned}$$

Sia ora z_0 polo di ordine $p \geq 2$ per f. Per ipotesi, in un intorno di z_0, f ha questo sviluppo in serie di Laurent:

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^{p} a_{-k} (\zeta - z_0)^{-k}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}f(\zeta)(\zeta - z_0)^p &= (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^{p} a_{-k} (\zeta - z_0)^{p-k} = \\ &= (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^k + a_{-1}(\zeta - z_0)^{p-1} + \\ &+ a_{-2}(\zeta - z_0)^{p-2} + \ldots + a_{-p}\end{aligned}$$

Da tale formula $f(\zeta)(\zeta - z_0)^p$ risulta essere la somma di una serie di potenze in un intorno di z_0. Perciò questa funzione è prolungabile ad una funzione olomorfa anche in z_0. Osserviamo che a_{-1} risulta essere il coefficiente del termine di grado $(p-1)$ dello sviluppo di Taylor della funzione $f(\zeta)(\zeta - z_0)^p$, e quindi segue la tesi (6.6). $\square$

Proposizione 6.2.2 (calcolo del residuo all'infinito)**.** *Sia*

$$\Omega_\infty = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

e sia $f \in H(\Omega_\infty)$. Risulta:

$$Res(f(z), \infty) = Res\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right) \tag{6.7}$$

Dimostrazione. Posto $w = \dfrac{1}{z}$, si ha, per ogni $r > R$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z),\infty) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{r}} f\left(\frac{1}{w}\right)\,d\left(\frac{1}{w}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{r}} -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)\,dw,\end{aligned}$$

da cui la (6.7). □

Osseviamo che, in alcuni casi, per calcolare il residuo di una funzione, è utile usare la serie geometrica e gli sviluppi in serie delle funzioni elementari.

Diamo esempi di calcolo dei residui.

1. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9}.$$

I poli di f sono gli zeri del denominatore, cioè:

$$z_1 = 3i, \quad z_2 = -3i;$$

z_1 e z_2 sono poli semplici. Calcoliamo i residui di f nei due punti di singolarità polare:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,3i) &= \lim_{z\to 3i}\frac{1}{z^2+9}\cdot(z-3i) = \lim_{z\to 3i}\frac{1}{z+3i} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6};\\ \operatorname{Res}(f,-3i) &= \lim_{z\to -3i}\frac{1}{z^2+9}\cdot(z+3i) = \lim_{z\to -3i}\frac{1}{z-3i} = -\frac{1}{6i} = \frac{i}{6}.\end{aligned}$$

2. Consideriamo

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

Risulta:

$$\sin z = 0 \iff z_k = k\pi \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}.$$

Tali z_k sono poli semplici isolati per f, perciò:

$$\operatorname{Res}(f,z_k) = \lim_{z\to k\pi}\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos k\pi} = \frac{1}{(-1)^k} \quad \forall\, k\in\mathbb{Z},$$

per la (6.4).

3. La funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$$

presenta due poli del secondo ordine, ovvero gli zeri del denominatore:

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i,$$

entrambi di molteplicità 2. Si ha, pertanto:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \cdot (z-i)^2 \right) = \\
&= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \cdot (z-i)^2 \right) = \\
&= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right) = -\frac{i}{2e}; \\
\operatorname{Res}(f, -i) &= \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \cdot (z+i)^2 \right) = \\
&= \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \cdot (z+i)^2 \right) = \\
&= \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z-i)^2} \right) = 0.
\end{aligned}$$

4. Consideriamo

$$f(z) = \frac{e^z}{1+e^z}.$$

Per trovare gli zeri del denominatore, e quindi i poli di f, bisogna calcolare il logaritmo in campo complesso di -1:

$$1 + e^z = 0 \;\Leftrightarrow\; z_k = \log^{[k]}(-1) = (2k+1)\pi i \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

Questi punti sono immaginari puri isolati e sono zeri semplici per il denominatore, quindi poli semplici per f. Dalla (6.5) si ottiene:

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = 1.$$

5. Non sempre si riesce a dedurre immediatamente l'ordine di un polo. Il denominatore della funzione

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^4}$$

ha in $z = 0$ uno zero del quarto ordine; ma per $z = 0$ si annulla anche la funzione al numeratore, perciò non possiamo affermare che $z = 0$ è polo di ordine 4 per f. Bisogna, pertanto, esplicitare la serie di Laurent di f per calcolarne il residuo in $z = 0$. Ricordando lo sviluppo di M^{c}Laurin di $\sin z$ otteniamo:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \Rightarrow \ z - \sin z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots \Rightarrow$$
$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} - \frac{z}{5!} + \dots$$

Da qui si vede che $z = 0$ è polo semplice per f (poiché la parte singolare dello sviluppo di Laurent di f ha il solo termine $\frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z}$), perciò

$$\mathrm{Res}(f, 0) = a_{-1} = \frac{1}{3!}.$$

6. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^4}$$

Gli unici punti di singolarità per f si trovano in corrispondenza degli zeri del denominatore. Pertanto l'unica singolarità si ha in $z_0 = -1$, che è uno zero del quarto ordine per $(z+1)^4$; da 5.3.2 segue che $z_0 = -1$ è polo del quarto ordine per f. Applicando 6.2.1 si ha:

$$\mathrm{Res}\,(f, -1) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3}{dz^3} \left[\frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^4} \cdot (z+1)^4 \right]_{z=-1} = \frac{\pi^3 \sin(-\pi)}{3!} = 0$$

7. Sia:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$$

Il denominatore ha in $z = 0$ uno zero del terzo ordine; ma ivi si annulla anche la funzione al numeratore. Bisogna, pertanto, esplicitare la serie di Laurent per dedurre l'ordine del polo $z = 0$ e calcolare in tale punto il residuo di f. Ricordando lo sviluppo di M^{c}Laurin di $\cos z$ otteniamo:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \Rightarrow \ 1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \dots \Rightarrow$$
$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{z}{4!} + \dots$$

Da qui si vede che $z = 0$ è polo semplice per f (poiché la parte singolare dello sviluppo di Laurent di f ha il solo termine $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$), perciò

$$\mathrm{Res}(f, 0) = a_{-1} = \frac{1}{2}.$$

8. Calcoliamo il residuo della funzione:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2 \mathrm{Log}(2+iz)}$$

nel punto di singolarità $z = i$.

Innanzitutto stabiliamo la natura del punto di singolarità considerato. $z = i$ è zero doppio per $(z^2+1)^2$; esso è anche uno zero di $\mathrm{Log}(2+iz)$ del primo ordine; infatti:

$$\left[\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(2+iz)\right]_{z=i} = \left[\frac{i}{2+iz}\right]_{z=i} = i \neq 0$$

Ne segue che i è uno zero del terzo ordine per $1/f$, ovvero, per 5.3.2, è un polo del terzo ordine per f. Dunque:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(f(z), i) &= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-i)^3 \cdot \frac{1}{(z^2+1)^2 \mathrm{Log}(2+iz)}\right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{z-i}{(z+i)^2 \mathrm{Log}(2+iz)}\right] \end{aligned} \tag{6.8}$$

Poiché:

$$\begin{aligned} (z+i)^2 &= ((z-i)+2i)^2 = (z-i)^2 - 4 + 4i(z-i); \\ \mathrm{Log}(2+iz) &= \mathrm{Log}(1+i(z-i)) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{[i(z-i)]^{k+1}}{k+1} = \\ &= i(z-i) + \frac{(z-i)^2}{2} - i \cdot \frac{(z-i)^3}{3} + o(|z-i|^3), \end{aligned}$$

sostituendo nella (6.8) otteniamo:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}\,(f(z), i) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{z-i}{-4i(z-i) - 6(z-i)^2 + \frac{13}{3} i(z-i)^3 + o(|z-i|^3)}\right] \end{aligned} \tag{6.9}$$

Usiamo ora la divisione delle serie di potenze. Osserviamo che basterà esplicitare i coefficienti della serie cercata fino a quello di secondo ordine, dovendo poi calcolare la derivata seconda di tale serie. I coefficienti a_k del numeratore sono:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_j = 0 \quad \forall j > 1$$

I coefficienti b_k della serie al denominatore sono:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -4i, \quad b_2 = -6, \quad b_3 = \frac{13}{3}i, \quad \dots$$

Detti c_k i coefficienti della serie cercata, troviamo c_0, c_1, c_2 risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} c_0 b_0 = a_0 \\ c_1 b_0 + c_0 b_1 = a_1 \\ c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2 = a_2 \\ c_3 b_0 + c_2 b_1 + c_1 b_2 + c_0 b_3 = a_3 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} -4ic_0 = 1 \\ -4ic_1 - 6c_0 = 0 \\ -4ic_2 - 6c_1 + \frac{13}{3}ic_0 = 0 \end{cases}$$

Ne segue:

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{i}{4} \\[2ex] c_1 = -\dfrac{3}{8} \\[2ex] c_2 = -\dfrac{7}{24}i \end{cases}$$

Dunque, sostituendo nella (6.9) otteniamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), i) &= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{i}{4} - \frac{3}{8}(z - i) - \frac{7}{24} i (z - i)^2 + o(|z - i|^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(-2 \cdot \frac{7}{24} i \right) = -\frac{7}{24} i \end{aligned}$$

9. La funzione

$$f(z) = 1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^5}$$

ha all'infinito una singolarità eliminabile e, come unica singolarità al finito, un polo del quinto ordine nel punto 0. Risulta:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -3$$

Questo esempio mette in luce il fatto che, all'infinito, il residuo di una funzione olomorfa può non essere nullo. Inoltre

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 3.$$

10. La funzione

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

non ha singolarità al finito, ma presenta una singolarità essenziale all'infinito. Il residuo di f all'infinito è zero.

11. Stabilire il tipo di singolarità in $z_0 = 0$ e calcolare il relativo residuo per le seguenti funzioni:

$$f(z) = \frac{1}{\sin^3 z}, \quad g(z) = \frac{e^z}{z^3} + z^3 e^{\frac{1}{z}}, \quad h(z) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}.$$

6.3 Primo e secondo Teorema dei residui

Le proprietà peculiari della teoria dei residui sono espresse dai teoremi seguenti.

Teorema 6.3.1 (Primo Teorema dei residui)**.** *Sia $f \in H(\Omega \setminus \Sigma)$, dove Σ è l'insieme dei punti di Ω singolari per f, tutti isolati. Allora per ogni dominio regolare $D \subset \Omega$, con $\partial D \cap \Sigma = \emptyset$, si ha:*

(i) *$\mathring{D} \cap \Sigma$ è un insieme finito;*

(ii) *posto $\mathring{D} \cap \Sigma := \{z_1, \dots, z_\nu\}$, risulta:*

$$\int_{+\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}(f, z_j). \tag{6.10}$$

Dimostrazione. Sia D un domino regolare come nelle ipotesi. La (i) è ovvia, in quanto l'insieme Σ non può avere punti d'accumulazione. Per dimostrare la (ii), siccome i punti z_j sono isolati, possiamo considerare, per ogni $j = 1, \dots, \nu$, un disco $B_{r_j}(z_j)$ tale che $\overline{B}_{r_j}(z_j) \subset \mathring{D}$ e $B_{r_j}(z_j) \cap B_{r_l}(z_l) = \emptyset$ per $j \neq l$. Definiamo l'insieme:

$$D_\nu := D \setminus \bigcup_{j=1}^{\nu} B_{r_j}(z_j).$$

Ora, D_ν è un dominio regolare e $f \in H(D_\nu)$; per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3 si ha:

$$\int_{+\partial D_\nu} f(z)\, dz = 0.$$

Osserviamo che:

$$+\partial D_\nu = +\partial D \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\nu} \left(-\partial B_{r_j}(z_j)\right) \right)$$

Perciò, per l'additività dell'integrale curvilineo:

$$0 = \int_{+\partial D_\nu} f(z)\, dz = \int_{+\partial D} f(z)\, dz - \sum_{j=1}^{\nu} \int_{+\partial B_{r_j}(z_j)} f(z)\, dz$$
$$\Rightarrow \int_{+\partial D} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{\nu} \int_{+\partial B_{r_j}(z_j)} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \mathrm{Res}(f, z_j),$$

per la (6.1). □

Questo teorema rappresenta una generalizzazione del Teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3 (valido nell'ipotesi che f sia olomorfa in Ω e quindi $\Sigma = \emptyset$).

Osservazione 6.3.2. Le applicazioni del Teorema 6.3.1 sono molteplici.

Osserviamo esplicitamente che il calcolo dell'integrale a primo membro della (6.10) è ricondotto a quello dei residui nei punti singolari contenuti in $\mathring{D}$. Ciò consente, come vedremo, di sviluppare una metodologia che sfrutta la variabilità del dominio D.

Teorema 6.3.3 (Secondo Teorema dei residui, sulla somma dei residui)**.** *Sia f olomorfa in tutto il piano complesso $\mathbb{C}$ privato di un numero finito di singolarità isolate $z_1, \dots, z_\nu$. Allora:*

$$\sum_{j=1}^{\nu} \mathrm{Res}(f, z_j) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0. \tag{6.11}$$

Dimostrazione. Sia $r > \max\{|z_1|, \dots, |z_\nu|\}$ e consideriamo $B_r(0)$. Allora $z_1, \dots, z_\nu \in B_r(0)$ e $f(z)$ è olomorfa in $\overline{B}_r(0) \setminus \{z_1, \dots, z_\nu\}$. Per il primo Teorema dei residui 6.3.1:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(0)} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{\nu} \mathrm{Res}(f, z_j).$$

Ma, dalla (6.2):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(0)} f(z)\, dz = -\mathrm{Res}(f, \infty)$$

da cui segue la tesi. □

Osservazione 6.3.4. Talvolta è possibile ridurre il numero dei residui da calcolare, grazie al Secondo Teorema dei Residui.

6.4 Indice di avvolgimento di una curva ed estensione del primo Teorema dei residui

Definizione 6.4.1 (indice di avvolgimento)**.** Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa contornante un punto $z_0 \notin \gamma([a, b])$. Definiamo *indice di avvolgimento* di γ rispetto a z_0 il numero (intero relativo) $n(\gamma, z_0)$ di giri di γ attorno a z_0, dove il segno dipende dal verso di percorrenza della curva.

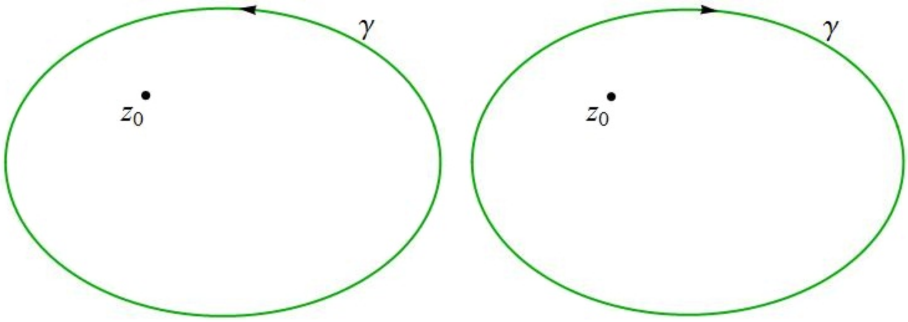

Figura 6.1: A sinistra, $n(\gamma, z_0) = 1$; a destra $n(\gamma, z_0) = -1$

La nozione introdotta di indice d'avvolgimento di una curva permette di generalizzare il Primo Teorema dei Residui.

Teorema 6.4.2 (Estensione del Primo Teorema dei residui)**.** *Siano Ω semplicemente connesso, $f \in H(\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_\nu\})$ e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva chiusa contornante i punti $z_j \notin \gamma([a, b])$ per ogni $j = 1, \ldots, \nu$. Allora:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} [\mathrm{Res}(f, z_j) \cdot n(\gamma, z_j)] .$$