CAPITOLO 6

STIME DI SCHAUDER PER IL PROBLEMA CON DERIVATA OBLIQUA

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Consideriamo l'operatore differenziale

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_i + c(x). \tag{6.1}$$

In questo capitolo ci proponiamo di studiare il problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.2}$$

sotto opportune ipotesi di regolarità per l'aperto Ω, per i coefficienti di A, per quelli dell'operatore al bordo e per i dati f e g.

6.1 PRINCIPI DEL MASSIMO

In questa sezione supponiamo che Ω sia un aperto limitato di classe C^1 oppure il semispazio $\mathbb{R}^N_+$, che $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c$ siano funzioni continue e limitate in $\overline{\Omega}$ con $c \leq 0$. Inoltre assumiamo che a, b siano funzioni continue e limitate su $\partial\Omega$ e siano tali che $|b| = 1$ e, denotata con ν la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, sia soddisfatta la condizione di non tangenzialità

$$b \cdot \nu \geq \varepsilon_0 > 0. \tag{6.3}$$

Assumiamo anche che $a \geq 0$. Questa ulteriore ipotesi sarà completamente rimossa nel teorema finale 6.4.7.

Proposizione 6.1.1 *Sia Ω un aperto limitato di classe C^1 e sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione di (6.2) con $\lambda > 0$, $f \in C(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Se $a \geq a_0 > 0$ allora*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty,$$

se $a \geq 0$ e $g \equiv 0$ allora

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty.$$

DIM. Per il teorema di Weierstrass, u ammette massimo in qualche $x_0 \in \overline{\Omega}$. Senza perdere di generalità, assumiamo che $u(x_0) = \|u\|_\infty > 0$. Se $x_0 \in \Omega$, allora $Au(x_0) \leq 0$ (cfr. la dimostrazione del Teorema 3.1.2) e quindi

$$\lambda\|u\|_\infty = \lambda u(x_0) \leq \lambda u(x_0) - Au(x_0) \leq \|f\|_\infty.$$

Se $x_0 \in \partial\Omega$, allora $\frac{\partial u}{\partial b}(x_0) \geq 0$, perchè x_0 è punto di massimo e vale la condizione di non tangenzialità $b \cdot \nu > 0$. Quindi, se $a \geq a_0 > 0$ segue che

$$a_0\|u\|_\infty = a_0 u(x_0) \leq a(x_0)u(x_0) + \frac{\partial u}{\partial b}(x_0) = g(x_0) \leq \|g\|_\infty$$

e la tesi è provata nel primo caso.

Assumiamo ora che $a \geq 0$ e che $g \equiv 0$. Se $x_0 \in \partial\Omega$ e $a(x_0) > 0$ l'equazione

$$a(x_0)u(x_0) + \frac{\partial u}{\partial b}(x_0) = 0$$

è impossibile e quindi necessariamente $x_0 \in \Omega$. Se $a(x_0) = 0$ allora la stessa equazione implica che $\frac{\partial u}{\partial b}(x_0) = 0$. Siccome $u_{|\partial\Omega}$ ha un massimo relativo in x_0 anche $\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_0) = 0$ per ogni vettore τ tangente a $\partial\Omega$. Ne segue che $\nabla u(x_0) = 0$ e come prima $Au(x_0) \leq 0$. Pertanto $\lambda\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. □

Proviamo adesso alcuni principi del massimo nel semispazio.

Lemma 6.1.2 *Siano $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ una soluzione limitata di (6.2), con $\lambda > 0$, $f \in C(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ e $g \in C(\partial\mathbb{R}^N_+)$. Assumiamo che $a \geq a_0 > 0$. Allora*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty.$$

DIM. Introduciamo la funzione ausiliaria $v(x) = \gamma + |x|^2$ e scegliamo il parametro $\gamma > 0$ affinchè $\lambda v - Av \geq 0$. Poniamo $w = u - \frac{\|u\|_\infty}{\gamma + R^2} v$ in $B_R^+ = \mathbb{R}^N_+ \cap B_R$. Risulta

$$\begin{cases} \lambda w - Aw \leq f & \text{in } B_R^+ \\ w \leq 0 & \text{su } \partial B_R \cap \mathbb{R}^N_+ \\ aw + \dfrac{\partial w}{\partial b} = g - \dfrac{\|u\|_\infty}{\gamma + R^2}\left(av + \dfrac{\partial v}{\partial b}\right) \leq g + C\dfrac{R}{\gamma + R^2}\|u\|_\infty & \text{su } B_R \cap \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

Con argomenti analoghi a quelli della proposizione precedente si trova che

$$w(x) \leq \frac{1}{\lambda}\,\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty + \frac{C}{a_0}\,\frac{R}{\gamma+R^2}\|u\|_\infty\,, \quad x \in B_R^+$$

e quindi

$$u(x) \leq \frac{1}{\lambda}\,\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty + \frac{\|u\|_\infty}{\gamma+R^2}\,v(x) + \frac{C}{a_0}\,\frac{R}{\gamma+R^2}\|u\|_\infty\,, \quad x \in B_R^+.$$

Mandando $R \to \infty$ si ottiene $u(x) \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty$ e scambiando u con $-u$ la dimostrazione è completa. □

Se l'estremo inferiore della funzione a risulta nullo, il risultato seguente non è preciso come nel caso di un aperto limitato.

Proposizione 6.1.3 *Sia $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ una soluzione limitata di (6.2). Allora esiste $\lambda_0 > 0$ tale che per ogni $\lambda > \lambda_0$, $f \in C(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ e $g \in C(\partial\mathbb{R}^N_+)$ risulta*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{2}{\lambda-\lambda_0}\|f\|_\infty + \frac{2}{\varepsilon_0}\|g\|_\infty,$$

dove ε_0 è dato in (6.3).

Dim. Sia $\phi(x) = 1 - \dfrac{1}{x_N+2}$, $x \in \mathbb{R}^N_+$. Chiaramente

$$\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1, \quad \phi(x',0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x',0) = \frac{1}{4}\,.$$

Posto $v = \phi u$, è facile verificare che

$$\begin{aligned} Av &= \phi Au + \frac{2}{\phi}\sum_{i=1}^N a_{iN}D_N\phi D_i v \\ &\quad + \frac{v}{\phi}\left(a_{NN}D_{NN}\phi + b_N D_N\phi - \frac{2}{\phi}a_{NN}(D_N\phi)^2\right). \end{aligned}$$

Pertanto se

$$\tilde{A} = A - \frac{2}{\phi}\sum_{i=1}^N a_{iN}D_N\phi D_i + \frac{1}{\phi}\left(a_{NN}D_{NN}\phi + b_N D_N\phi - \frac{2}{\phi}a_{NN}(D_N\phi)^2\right)$$

risulta che $\tilde{A}v = \phi Au$ e quindi

$$\lambda v - \tilde{A}v = \phi f.$$

Per quanto riguarda la condizione la bordo soddisfatta da v, osserviamo che $\dfrac{\partial\phi}{\partial b} = b_N\dfrac{\partial\phi}{\partial x_N} = \dfrac{1}{4}b_N$ su $\partial\mathbb{R}^N_+$. Siccome $\phi(x',0) = 1/2$, risulta

$$\frac{\partial v}{\partial b} = \phi\frac{\partial u}{\partial b} + u\frac{\partial\phi}{\partial b} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{1}{2}b_N v, \quad \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+$$

Otteniamo così

$$au + \frac{\partial u}{\partial b} = 2av + \left(2\frac{\partial v}{\partial b} - b_N v\right) = (2a - b_N)\, v + 2\frac{\partial v}{\partial b} \quad \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+$$

ossia

$$\begin{cases} \lambda v - \tilde{A} v = \phi f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ \left(a - \dfrac{1}{2}\, b_N\right) v + \dfrac{\partial v}{\partial b} = \dfrac{1}{2}\, g & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

Il coefficiente di ordine zero di $\tilde{A}$ è dato da

$$\tilde{c} = c - \frac{1}{\phi}\left(a_{NN} D_{NN}\phi + b_N D_N \phi - \frac{2}{\phi} a_{NN} (D_N\phi)^2\right).$$

Sia $\lambda_0 := \sup \tilde{c}$. Se dunque $\lambda > \lambda_0$, tenendo conto che $a - \frac{1}{2} b_N \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0 > 0$ e applicando il Lemma 6.1.2 a v, otteniamo

$$\|v\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_0}\|\phi f\|_\infty + \frac{1}{\varepsilon_0}\|g\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_0}\|f\|_\infty + \frac{1}{\varepsilon_0}\|g\|_\infty,$$

e quindi

$$\|u\|_\infty \leq \frac{2}{\lambda - \lambda_0}\|f\|_\infty + \frac{2}{\varepsilon_0}\|g\|_\infty.$$

□

Osservazione 6.1.4 Il numero λ_0 dipende solamente dalla norma del sup dei coefficienti di A. In particolare, λ_0 è lo stesso per tutti gli operatori i cui coefficienti soddisfano la stima $\|a_{NN}\|_\infty, \|b_N\|_\infty \leq k_0$.

6.2 Problema con derivata obliqua per il Δ in $\mathbb{R}^N_+$

In questa sezione ci proponiamo di studiare il problema con derivata obliqua nel caso del Δ nel semispazio $\mathbb{R}^N_+$. I punti cruciali sono:

1. risolvere il problema di Neumann,
2. provare delle stime a priori con un operatore al bordo della forma $au + \dfrac{\partial u}{\partial b}$, con a e b costanti, $a \geq 0$, $b_N < 0$.

Mediante il metodo di continuità dedurremo esistenza ed unicità per il problema relativo al Δ con un operatore al bordo del tipo considerato al punto 2.

Cominciamo a provare un risultato di estensione.

Lemma 6.2.1 *Data $g \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$, esiste $h \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $h(x',0)=0$ e $D_N h(x',0) = g(x')$. Inoltre $\|h\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$, con $C = C(N)$.*

DIM. Sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$, con $0 \leq \eta \leq 1$ e $\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \eta = 1$. Consideriamo la funzione

$$\tilde{h}(x', x_N) = x_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(x' - x_N y')\eta(y')dy'.$$

È chiaro che $\tilde{h}(x',0) = 0$ e che $|\tilde{h}(x',x_N)| \leq x_N\|g\|_\infty$. Inoltre se $i < N$, risulta

$$D_i\tilde{h}(x', x_N) = x_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(x' - x_N y')\eta(y')dy'$$

e quindi $|D_i\tilde{h}(x',x_N)| \leq x_N\|D_i g\|_\infty$. Siccome

$$\begin{aligned} D_N\tilde{h}(x', x_N) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(x' - x_N y')\eta(y')dy' \\ &\quad -x_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y'\eta(y')dy' \end{aligned} \tag{6.4}$$

otteniamo $D_N\tilde{h}(x',0) = g(x')$ e $|D_N\tilde{h}(x',x_N)| \leq \|g\|_\infty + C\, x_N\|\nabla g\|_\infty$, dove C è una costante che dipende da η. Per stimare le derivate seconde di $\tilde{h}$, non potendo derivare ulteriormente g facciamo prima un cambio di variabili ottenendo per $i < N$

$$D_i\tilde{h}(x', x_N) = \frac{1}{x_N^{N-2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(y')\eta\left(\frac{x'-y'}{x_N}\right)dy'.$$

Se anche $j < N$ allora

$$\begin{aligned} D_{ij}\tilde{h}(x', x_N) &= \frac{1}{x_N^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(y')\, D_j\eta\left(\frac{x'-y'}{x_N}\right)dy' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(x' - x_N y')\, D_j\eta(y')dy', \end{aligned}$$

da cui segue facilmente che $\|D_{ij}\tilde{h}\|_\infty \leq C\|D_i g\|_\infty$. Inoltre

$$\begin{aligned} & |D_{ij}\tilde{h}(x', x_N) - D_{ij}\tilde{h}(\xi', \xi_N)| \\ \leq\ & [D_i g]_\alpha \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |(x'-\xi') - (x_N - \xi_N)y'|^\alpha |D_j\eta(y')|dy' \\ \leq\ & C[D_i g]_\alpha |(x', x_N) - (\xi', \xi_N)|^\alpha, \end{aligned}$$

ossia $[D_{ij}\tilde{h}]_\alpha \le C[D_i g]_\alpha$. Per calcolare $D_{iN}\tilde{h}$ con $i < N$, deriviamo rispetto a x_i la (6.4) e, posto $\tilde{\eta}(y') = y'\eta(y')$, otteniamo

$$\begin{aligned} D_{iN}\tilde{h}(x', x_N) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(x' - x_N y')\,\eta(y')dy' \\ &\quad - \frac{1}{x_N^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(y')\, D_i\tilde{\eta}\left(\frac{x'-y'}{x_N}\right) dy' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(x' - x_N y')\,\eta(y')dy' \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y')\, D_i(y'\eta(y'))dy' \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y' D_i\eta(y')dy'. \end{aligned}$$

Da ciò seguono le stime per $\|D_{iN}\tilde{h}\|_\infty$ e $[D_{iN}\tilde{h}]_\alpha$ come prima. Infine

$$\begin{aligned} D_{NN}\tilde{h}(x', x_N) &= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y'\eta(y')dy' \\ &\quad + \frac{N-2}{x_N^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(y') \cdot \tilde{\eta}\left(\frac{x'-y'}{x_N}\right) dy' \\ &\quad + \frac{1}{x_N^{N-2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(y') \cdot \\ &\qquad \cdot \left(\nabla\tilde{\eta}_i\left(\frac{x'-y'}{x_N}\right) \cdot \frac{x'-y'}{x_N^2}\right)_{i=1}^{N-1} dy' \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y'\eta(y')dy' \\ &\quad + (N-2)\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y'\eta(y')dy' \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot (\nabla\tilde{\eta}_i(y') \cdot y')_{i=1}^{N-1} dy'. \end{aligned}$$

Siccome $\tilde{\eta}_i(y') = y_i'\eta(y')$, risulta $\nabla\tilde{\eta}_i(y') = y_i'\nabla\eta + \eta e_i$ e $y' \cdot \nabla\tilde{\eta}_i(y') = y_i' y' \cdot \nabla\eta + \eta y_i'$. Ne segue che

$$D_{NN}\tilde{h}(x', x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y'\big((N-2)\eta(y') + y' \cdot \nabla\eta(y')\big)dy'$$

e si procede come sopra per stimare $\|D_{NN}\tilde{h}\|_\infty$ e $[D_{NN}\tilde{h}]_\alpha$. Per conseguire la tesi basta porre $h(x', x_N) = \psi(x_N)\tilde{h}(x', x_N)$ con ψ regolare e tale che $\psi \equiv 1$ per $0 \le x_N \le 1$ e $\psi \equiv 0$ per $x_N \ge 2$. $\square$

Usiamo adesso questo risultato per risolvere il problema di Neumann associato al Δ nel semispazio.

Proposizione 6.2.2 *Sia $\lambda > \lambda_0$, dove λ_0 è fissato come nella Proposizione 6.1.3. Il problema*

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_N} = g & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1} \end{cases} \tag{6.5}$$

con dati $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, $g \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$ ammette un'unica soluzione $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$. Inoltre si ha la stima

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \le C(\alpha,\lambda)\left(\|f\|_{\alpha,\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\right).$$

Se $g \equiv 0$, allora $\|u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} = O(\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}})\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ per $\lambda \to +\infty$.

DIM. L'unicità discende dalla Proposizione 6.1.3. Riguardo all'esistenza, sia $h \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $h(x',0) = 0$ e $D_N h(x',0) = g(x')$ con $\|h\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \le C\|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$ (tale funzione esiste per il Lemma 6.2.1). Cerchiamo la soluzione nella forma $u = v + h$. Quindi v soddisfa

$$\begin{cases} \lambda v - \Delta v = f - (\lambda h - \Delta h) =: f_1 & \text{in } \mathbb{R}^N_+, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_N} = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1}. \end{cases}$$

Inoltre $\|f_1\|_{\alpha,\mathbb{R}^N_+} \le C(\lambda)\Big(\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{1,\alpha:\mathbb{R}^{N-1}}\Big)$. Allora basta risolvere il problema (6.5) con $g \equiv 0$. Consideriamo l'estensione pari di f rispetto all'ultima variabile

$$\tilde f(x',x_N) = \begin{cases} f(x',x_N) & x_N \ge 0 \\ f(x',-x_N) & x_N < 0 \end{cases}$$

Chiaramente $\|\tilde f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N} \le 2\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$. Per il Teorema 5.4.3, esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\lambda u - \Delta u = \tilde f$ in $\mathbb{R}^N$ e $\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N} \le C(\alpha,\lambda)\|\tilde f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N}$. Posto $\tilde u(x',x_N) = u(x',-x_N)$, è immediato verificare che $\lambda\tilde u - \Delta\tilde u = \tilde f$ in $\mathbb{R}^N$, per cui, per unicità, $\tilde u = u$, ossia u è pari in x_N e quindi $\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',0) = 0$. Quindi la restrizione di u a $\mathbb{R}^N_+$ è la soluzione cercata.
La stima per $\|u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ se $g \equiv 0$ segue direttamente da quella per $\|u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N}$ (Corollario 5.4.6). □

Prima di passare allo studio del problema con derivata obliqua facciamo delle considerazioni preliminari. Dall'Osservazione 5.8.4 sappiamo che fissato $k \in \mathbb{N}$ e prese $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $g \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$ il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ che soddisfa la stima

$$\|u\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\alpha,k,\lambda)\Big(\|f\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\Big).$$

In particolare, sia $\Pi_\lambda g$ la soluzione con $f \equiv 0$. Allora la stima precedente implica che $\Pi_\lambda : C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}) \to C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ è un operatore continuo, per ogni $k = 0, 1, \ldots$. Osserviamo che dalle stime interne, $u = \Pi_\lambda g \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ e quindi si può derivare l'equazione $\lambda u - \Delta u = 0$ quante volte si vuole. Se $\Delta_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} D_{ii}$, risulta pertanto

$$\begin{cases} \lambda\Delta_{N-1}\, u - \Delta(\Delta_{N-1}u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ \Delta_{N-1}\, u = \Delta_{N-1}\, g & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

ossia $\Delta_{N-1}\Pi_\lambda = \Pi_\lambda\Delta_{N-1}$, per unicità. Ne segue che $(I - \Delta_{N-1})\Pi_\lambda = \Pi_\lambda(I - \Delta_{N-1})$ e applicando le stime in $\mathbb{R}^{N-1}$ ((5.49)) risulta

$$\begin{aligned} \|\Pi_\lambda(I - \Delta_{N-1})g\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &= \|(I - \Delta_{N-1})\Pi_\lambda g\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \\ &\leq C_1\|\Pi_\lambda g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \\ &\leq C_2\|g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} \\ &\leq C_3\|(I - \Delta_{N-1})g\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}. \end{aligned}$$

Siccome $I - \Delta_{N-1}$ è invertibile da $C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$ in $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$, risulta provato il seguente lemma.

Lemma 6.2.3 *L'operatore $\Pi_\lambda : C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}) \to C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ è continuo per ogni $k = 0, 1, \ldots, \lambda > 0$.*

Useremo il Lemma 6.2.3 con $k = 1$.

Nel teorema che segue proviamo stime a priori nel caso del Δ per condizioni al bordo a coefficienti costanti.

Teorema 6.2.4 *Sia $\lambda > \lambda_0$ (cfr. Proposizione 6.1.3) e siano $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^N$ tali che $0 \leq a \leq M$ e $|b| = 1$, $b_N \leq -\varepsilon_0$. Allora esiste una costante $C = C(\alpha, \lambda, M, \varepsilon_0) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ soluzione di*

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \textit{in } \mathbb{R}^N_+ \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = g & \textit{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases} \tag{6.6}$$

risulta

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}). \tag{6.7}$$

DIM. Sia $v \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} \lambda v - \Delta v = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Allora $\|v\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\,\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$. Inoltre possiamo scrivere $u = v + w$ dove w risolve

$$\begin{cases} \lambda w - \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ aw + \dfrac{\partial w}{\partial b} = g - \dfrac{\partial v}{\partial b} =: h & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Naturalmente $\|h\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} \leq C(\alpha,\lambda,M)\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$. Posto $z = aw + \dfrac{\partial w}{\partial b}$, risulta

$$\begin{cases} \lambda z - \Delta z = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ z = h & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

(notiamo che $w \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+)$).
Per il Lemma 6.2.3, si ha $\|z\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\lambda)\,\|h\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$. Inoltre

$$\sum_{i,j=1}^{N} b_i b_j D_{ij} w - \sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w = -b_N^2 D_{NN} w + 2\sum_{i=1}^{N} b_i b_N D_{iN} w$$

da cui possiamo ricavare

$$\begin{aligned} D_{NN}w &= -\frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N} b_i b_j D_{ij} w + \frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w + \frac{2}{b_N}\sum_{i=1}^{N} b_i D_{iN} w \\ &= -\frac{1}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N} b_j D_j \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right) + \frac{2}{b_N} D_N \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right) + \frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w \\ &= -\frac{1}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N} b_j D_j z + \frac{a}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N} b_j D_j w + \frac{2}{b_N} D_N z - \frac{2\,a}{b_N} D_N w \\ &\quad + \frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w. \end{aligned}$$

Siccome $D_{NN}w = \lambda w - \Delta_{N-1} w$ abbiamo infine in $\mathbb{R}^N_+$

$$\begin{aligned} \lambda w - \Delta_{N-1} w - \frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w - \frac{a}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N-1} b_j D_j w \\ = -\frac{1}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N} b_j D_j z + \frac{2}{b_N} D_N z - \frac{a}{b_N} D_N w. \end{aligned}$$

In particolare l'equazione precedente è soddisfatta in $\mathbb{R}^{N-1}$ e quindi dalle stime di Schauder in $\mathbb{R}^{N-1}$ (5.15) segue che

$$\|w(\cdot,0)\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} \le C(\alpha,\lambda,M,\varepsilon_0)\Big(\|z\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|w\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}\Big).$$

Tenendo conto che $w = \Pi_\lambda w(\cdot,0)$ e applicando il Lemma 6.2.3 otteniamo

$$\|w\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \le C(\alpha,\lambda,M,\varepsilon_0)\Big(\|z\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|w\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}\Big)$$

Interpolando infine $\|w\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ tra $\|w\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ e $\|w\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}$ e applicando la Proposizione 6.1.3 per stimare $\|w\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}$ deduciamo

$$\begin{aligned}\|w\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &\le C\Big(\|z\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|w\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}\Big) \le C\Big(\|h\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} + \|h\|_{\infty;\mathbb{R}^{N-1}}\Big)\\ &\le C\Big(\|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} + \|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}\Big).\end{aligned}$$

Dato che $u = v + w$, la dimostrazione è completa. □

A questo punto possiamo dimostrare un risultato di esistenza e unicità relativo al problema (6.6).

Teorema 6.2.5 *Sia $\lambda > \lambda_0$ e siano $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $g \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$. Allora esiste un'unica funzione $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che*

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = g & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^N$ con $0 \le a \le M$ e $|b| = 1$, $b_N \le -\varepsilon_0$.

DIM. La dimostrazione è basata sul metodo di continuità. Poniamo

$$X = C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) \qquad Y = C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) \times C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$$

e consideriamo gli operatori $L_s : X \to Y$ definiti da

$$L_s u = \left(\lambda u - \Delta u, (1-s)\frac{\partial u}{\partial \nu} + s\left(au + \frac{\partial u}{\partial b}\right)\right), \quad s \in [0,1],$$

dove ν denota la normale esterna al dominio, ossia $\nu = -e_N$. Osserviamo che

$$(1-s)\frac{\partial u}{\partial \nu} + s\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

con $\tau = (1-s)\nu + s\,b$, $|\tau| \le 1$ e $\tau_N = -(1-s) + s\,b_N \le -\varepsilon_0$ e nella stima (6.7) la costante C si può prendere indipendente da s, ottenendo così

$$\|L_s u\|_Y \ge C\|u\|_X$$

per ogni $s \in [0,1]$. Per la Proposizione 6.2.2 l'operatore L_0 è suriettivo e quindi, per il Teorema 5.1.3, anche L_1 lo è. □

6.3 Coefficienti variabili in $\mathbb{R}^N_+$

Passiamo a considerare l'operatore

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i + c(x)$$

e assumiamo che i coefficienti appartengano a $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ con $c \le 0$ e $k_0 > 0$ sia una costante tale che

$$\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \le k_0.$$

Sia ν_0 la costante di ellitticità uniforme. In tutta questa sezione assumiamo

$$\begin{aligned} a \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}), \quad 0 \le a \le M \\ b \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}, \mathbb{S}^{N-1}), \quad b_N \le -\varepsilon_0 < 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

dove $\mathbb{S}^{N-1}$ denota la sfera unitaria di $\mathbb{R}^N$. Sia λ_0 dato dalla Proposizione 6.1.3. Osserviamo che λ_0 non dipende da a, b ma solo dall'operatore A.

Per provare le stime a priori relative ad A, procediamo nel modo standard, cioè congelando i coefficienti della parte principale dell'operatore e quelli della condizione al bordo. Cominciamo dunque a considerare operatori del tipo

$$A_0 = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} \qquad B_0 = a + \frac{\partial}{\partial b}$$

con $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, $|a_{ij}| \le k_0$, $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \nu_0|\xi|^2$ e $0 \le a \le M$, $b \in \mathbb{R}^N$, $|b| = 1$ e $b_N \le -\varepsilon_0$.

Lemma 6.3.1 *Siano A_0 e B_0 come sopra. Se $\lambda > \lambda_0$, esiste $C = C(\alpha, \lambda, M, k_0, \varepsilon_0, \nu_0) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \le C\Big(\|\lambda u - A_0 u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|B_0 u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\Big). \tag{6.9}$$

DIM. Sia Q_1 una matrice ortogonale tale che $Q_1(a_{ij})Q_1^* = D_\lambda$, dove D_λ è la matrice diagonale degli autovalori di (a_{ij}) e Q_1^* è la trasposta di Q_1. Poniamo $u(x) = v(Qx)$, dove $Q = SD_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}Q_1$ e S è una matrice ortogonale scelta in modo tale che $Q(\mathbb{R}^N_+) = \mathbb{R}^N_+$. Allora $Q(\mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{R}^{N-1}$ e $Q^*e_N = \gamma e_N$ per qualche $\gamma > 0$. Inoltre $c_1|x| \le |Qx|, |Q^*x| \le c_2|x|$, con $0 < c_i = c_i(k_0, \nu_0)$. Ne segue che $\gamma = \gamma|e_N| = |Q^*e_N| \ge c_1$.

Per costruzione l'equazione $\lambda u(x) - A_0u(x) = f(x)$ è equivalente all'equazione $\lambda v(y) - \Delta v(y) = f(Q^{-1}y)$ e, siccome $\nabla u(x) = Q^*\nabla v(Qx)$, la condizione al bordo $au(x) + \dfrac{\partial u}{\partial b}(x) = g(x)$ per v diventa $\tilde{a}v(y) + \dfrac{\partial v}{\partial \tau}(y)$

$= \dfrac{g(Q^{-1}y)}{|Qb(y)|}$ dove $\tilde{a} = \dfrac{a}{|Qb|}$ e $\tau = \dfrac{Qb}{|Qb|}$. Osserviamo che se $b = b' + b_N e_N$, con $b' \in \mathbb{R}^{N-1}$, allora $Qb = Qb' + b'' + \gamma b_N e_N$, con $Qb', b'' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Quindi $\tau_N = \dfrac{\gamma b_N}{|Qb|} \leq -\dfrac{c_1}{c_2}\varepsilon_0$. Vale pertanto la stima (6.7) per v che, tramite l'uguaglianza $u(x) = v(Qx)$ implica quella voluta. □

Nella proposizione che segue useremo il fatto che la costante λ_0 della Proposizione 6.1.3 dipende solo dal numero k_0 (vedi Osservazione 6.1.4).

Teorema 6.3.2 *Sia $\lambda > \lambda_0$. Allora esiste $C = C(\alpha, k_0, \nu_0, M, \varepsilon_0, \lambda) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\Big(\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\Big),$$

dove A è definito in (6.1) e $Bu = \left(au + \dfrac{\partial u}{\partial b}\right)_{|\mathbb{R}^{N-1}}$, con a, b che soddisfano (6.8).

Dim. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^N_+$ e sia $x_0' = (x_0^1, ... x_0^{N-1}, 0)$. Per $r > 0$ consideriamo l'intorno $I(x_0, r) := B_r(x_0) \cap \mathbb{R}^N_+$. Sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\eta \equiv 1$ in $B_r(x_0)$, $\eta \equiv 0$ fuori di $B_{2r}(x_0)$. Presi gli operatori

$$A_0 u = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0) D_{ij} u \qquad B_0 u = a(x_0')u + \frac{\partial u}{\partial b(x_0')},$$

applichiamo la stima (6.9) alla funzione ηu e ad A_0, B_0, ottenendo così

$$\begin{aligned}
\|\eta u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &\leq C\Big(\|(\lambda - A_0)(\eta u)\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|B_0(\eta u)\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\Big) \\
&\leq C\|(\lambda - A_0)u\|_{\alpha;I(x_0,r)} + C\|B_0 u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} + C_r\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+} \\
&\leq C\|(\lambda - A)u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + Ck_0 r^\alpha \|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_r\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+} \\
&\quad + C\|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\alpha;I(x_0,r)} &\leq C\|(\lambda - A)u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_1 r^\alpha \|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_r\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+} \\
&\quad + C\|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}
\end{aligned}$$

e, prendendo l'estremo superiore su $x_0 \in \mathbb{R}^N_+$,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &\leq C\|(\lambda - A)u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_1 r^\alpha \|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_r\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+} \\
&\quad + C\|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Scegliendo r abbastanza piccolo otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\|(\lambda - A)u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+} + C\|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}.$$

Interpolando $\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+}$ tra $\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ e $\|u\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}$ e applicando la Proposizione 6.1.3, concludiamo la dimostrazione. □

Teorema 6.3.3 *Sia $\lambda > \lambda_0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $g \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$ esiste un'unica soluzione del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = g & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

in $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$.

DIM. Basta applicare il metodo di continuità (Teorema 5.1.3) con le seguenti scelte

$$X = C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) \qquad Y = C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) \times C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$$

e

$$L_t : X \to Y$$

$$L_t u = \left(\lambda u - (1-t)\Delta u + tAu, (1-t)\frac{\partial u}{\partial \nu} + t\left(au + \frac{\partial u}{\partial b}\right)\right), \quad t \in [0,1],$$

con $\nu = -e_N$. Dal Teorema 6.3.2 discende che $\|L_t u\|_Y \geq C\|u\|_X$, con $C > 0$ costante indipendente da t. Siccome L_0 è suriettivo per la Proposizione 6.2.2, anche L_1 lo è. □

Nella proposizione seguente studiamo la dipendenza da λ della norma del risolvente nell'ipotesi in cui la condizione al bordo è omogenea. In questo caso infatti si vede che la norma in $C^{1,\alpha}$ è infinitesima per $\lambda \to +\infty$ e ciò sarà utile nello studio del problema con derivata obliqua in un aperto regolare limitato Ω.

Proposizione 6.3.4 *Sia $\lambda > \lambda_0$ e, data $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, sia $u = R(\lambda)f \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ la soluzione del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Allora $\|R(\lambda)f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} = O(\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}})\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$, per $\lambda \to +\infty$.

DIM. A meno di considerare $A - \lambda_0$ al posto di A, possiamo assumere $\lambda_0 = 0$. Poniamo $u(x) = v(\sqrt{\lambda}x)$. Allora è facile vedere che v soddisfa la seguente equazione

$$v(y) - \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij}(y) D_{ij} v(y) - \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i(y) D_i v(y) - \tilde{c}(y) v(y) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

con $\tilde{a}_{ij}(y) = a_{ij}(y/\sqrt{\lambda})$, $\tilde{b}_i(y) = \lambda^{-1/2} b_i(y/\sqrt{\lambda})$, $\tilde{c}(y) = \lambda^{-1} c(y/\sqrt{\lambda})$. Inoltre al bordo v verifica la condizione

$$\tilde{a}v + \frac{\partial v}{\partial \tilde{b}} = 0$$

con $\tilde{a}(y) = \lambda^{-1/2} a(y/\sqrt{\lambda})$ e $\tilde{b}(y) = b(y/\sqrt{\lambda})$. Se $\lambda \geq 1$ allora $\tilde{\nu}_0 = \nu_0$, $\|\tilde{a}_{ij}\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$, $\|\tilde{b}_i\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$, $\|\tilde{c}\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq k_0$ e $\|\tilde{a}\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$, $\|\tilde{b}\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} \leq M$ e quindi dal Teorema 6.3.2 segue che

$$\|v\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\alpha, \nu_0, K, M, \varepsilon_0) \frac{1}{\lambda} \|f(\cdot/\sqrt{\lambda})\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}.$$

Siccome $v(y) = u(y/\sqrt{\lambda})$ otteniamo per λ abbastanza grande

$$\|u\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla u\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+} + \frac{1}{\lambda} \|D^2 u\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+} + \frac{1}{\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}}} [D^2 u]_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{\frac{1+\alpha}{2}}} [\nabla u]_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}.$$

□

6.4 Problema con derivata obliqua in un aperto limitato regolare

Consideriamo un aperto Ω limitato di classe $C^{2,\alpha}$, cioè tale che per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono un intorno U di x ed un'applicazione bigettiva $H : \overline{B_1(0)} \to \overline{U}$ di classe $C^{2,\alpha}$ con inversa $J : \overline{U} \to \overline{B_1(0)}$ di classe $C^{2,\alpha}$ tale che $H(B_1^+(0)) = U \cap \Omega$.

Sia A l'operatore definito in (6.1). Assumiamo che $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, con $c \leq 0$ e, come prima, sia $k_0 > 0$ una costante tale che

$$\|a_{ij}\|_{\alpha;\Omega}, \|b_i\|_{\alpha;\Omega}, \|c\|_{\alpha;\Omega} \leq k_0. \tag{6.10}$$

Introduciamo l'operatore al bordo

$$Bu = au + \frac{\partial u}{\partial b} \tag{6.11}$$

dove

$$a \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega), \quad a \geq 0 \tag{6.12}$$

e

$$b \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{S}^{N-1}), \quad \text{con } b \cdot \nu \geq \varepsilon_0 > 0 \text{ su } \partial\Omega, \tag{6.13}$$

essendo ν la normale esterna unitaria a $\partial\Omega$. Sia inoltre $M > 0$ tale che

$$\|a\|_{1,\alpha;\partial\Omega}, \ \|b\|_{1,\alpha;\partial\Omega} \leq M. \tag{6.14}$$

Assumeremo tali ipotesi per tutta la sezione ad eccezione del Teorema 6.4.7, in cui sarà rimossa la restrizione sul segno di a.

Osserviamo che se $b \cdot \nu > 0$ su $\partial\Omega$ allora per compattezza $b \cdot \nu \geq \varepsilon_0$ per qualche $\varepsilon_0 > 0$, cioè la condizione puntuale di non tangenzialità diventa automaticamente uniforme.

Il primo teorema che vogliamo dimostrare riguarda le stime a priori.

Teorema 6.4.1 *Esiste una costante* $C = C(\alpha, \nu_0, k_0, M, \varepsilon_0, \Omega) > 0$ *tale che per ogni* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \leq C\Big(\|Au\|_{\alpha;\Omega} + \|Bu\|_{1,\alpha;\partial\Omega} + \|u\|_{\infty;\Omega}\Big).$$

DIM. Per ogni $x \in \partial\Omega$ sia (U_x, H_x) carta locale con

$$H_x : \overline{B_1(0)} \to \overline{U_x} \text{ di classe } C^{2,\alpha},$$
$$H_x^{-1} = J_x : \overline{U_x} \to \overline{B_1(0)} \text{ di classe } C^{2,\alpha},$$
$$H_x(B_1^+(0)) = U_x \cap \Omega, \quad H_x(B_1(0) \cap \mathbb{R}^{N-1}) = U_x \cap \partial\Omega$$

Poniamo $V_x = H_x(B_{\frac{1}{2}}(0))$. Inoltre, per ogni $x \in \Omega$ esiste $B(x, 2R_x) \subset \Omega$. Per compattezza risulta

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_{x_i}) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}.$$

Posto $n = n_1 + n_2$, prendiamo $(\eta_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ partizione dell'unità relativa al ricoprimento ottenuto. Allora

$$u = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u$$

Se $i \leq n_1$ allora $\eta_i u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathrm{supp}(\eta_i u) \subset B(x_i, R_{x_i})$. Applicando le stime di Schauder per l'intero spazio (Teorema 5.4.1) otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta_i u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} &\leq C(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,\mathbb{R}^N} + \|\eta_i u\|_{\infty,\mathbb{R}^N}\right) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha;\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega}\right) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \Omega)\left(\|Au\|_{\alpha;\Omega} + \|u\|_{2;\Omega}\right).
\end{aligned}$$

Sia adesso $n_1 + 1 \leq i \leq n$. Operiamo il seguente cambio di variabile

$$v_i(y) := (\eta_i u)(H_i(y)) = M_i(\eta_i u)(y)$$

e osserviamo che $v_i \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $\mathrm{supp}(v_i) \subset B_{\frac{1}{2}}$.

Risulta $A(\eta_i u)(x) = \tilde{A}_i v_i(y)$, dove l'operatore $\tilde{A}_i$, determinato dal cambio di variabili, è definito in (5.34). Riguardo la condizione al bordo, osserviamo che

$$\begin{aligned}B(\eta_i u)(x) &= a(x)(\eta_i u)(x) + b(x)\cdot\nabla(\eta_i u)(x)\\ &= a(H_i(y))v_i(y) + (dJ_i)\,b(H_i y)\cdot(\nabla v_i)(y)\\ &= \tilde{a}(y)v_i(y) + \frac{\partial v_i}{\partial \tilde{b}}(y) = \tilde{B}_i v_i(y),\end{aligned}$$

dove $\tilde{a}(y) = a(H_i(y))$, $\tilde{b}(y) = ((dJ_i)b)(H_i(y))$ e dJ_i denota la matrice iacobiana di J_i. Siccome b non è tangente a $\partial\Omega$, $\tilde{b}$ non è tangente a $\mathbb{R}^{N-1}$. Applicando pertanto la stima del Teorema 6.3.2 alla funzione v_i e agli operatori $\tilde{A}_i$ e $\tilde{B}_i$ (eventualmente estesi all'intero spazio) risulta

$$\|v_i\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N_+} \leq C(\nu_0, k_0, H_i, \varepsilon_0, M)\Big(\|\tilde{A}_i v_i\|_{\alpha,\mathbb{R}^N_+} + \|\tilde{B}_i v_i\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} + \|v_i\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}\Big)$$

da cui

$$\|\eta_i u\|_{2,\alpha,\Omega} \leq C\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,\Omega} + \|B(\eta_i u)\|_{1,\alpha;\partial\Omega} + \|u\|_{\infty;\Omega}\right).$$

Sommando su $i = 1, \cdots, n$

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \leq C\left(\|Au\|_{\alpha;\Omega} + \|Bu\|_{1,\alpha;\partial\Omega} + \|u\|_{2;\Omega}\right).$$

Concludiamo la dimostrazione interpolando $\|u\|_{2;\Omega}$ tra $\|u\|_{2,\alpha;\Omega}$ e $\|u\|_{\infty;\Omega}$. □

Corollario 6.4.2 *Siano δ e Λ fissati con $\Lambda > \delta > 0$. Allora esiste una costante $C = C(\alpha, \nu_0, k_0, M, \Lambda, \delta, \varepsilon_0, \Omega) > 0$ tale che per ogni $\lambda \in [\delta, \Lambda]$ e per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $Bu = 0$ su $\partial\Omega$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \leq C\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\Omega}.$$

DIM. Applicando il Teorema 6.4.1 all'operatore $A - \lambda$, con $\lambda \in [\delta, \Lambda]$, si trova che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $Bu = 0$ su $\partial\Omega$ risulta

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \leq C\Big(\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\Omega} + \|u\|_\infty\Big), \tag{6.15}$$

dove la costante C dipende da $\alpha, \nu_0, \varepsilon_0, M, \Omega$ e dal massimo delle norme dei coefficienti di $\lambda - A$. In virtù di (6.10) e della scelta di λ, si ha pertanto che C dipende da $\alpha, \nu_0, \varepsilon_0, M, \Omega$ e da k_0 e Λ. Ora, tenendo conto della Proposizione 6.1.1, da (6.15) si deduce che

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \leq C\Big(\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\Omega} + \frac{1}{\lambda}\|\lambda u - Au\|_\infty\Big) \leq \frac{C}{\delta}\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\Omega},$$

se $\delta < 1$. Pertanto l'asserto. □

Veniamo ora al risultato di esistenza (e unicità) della soluzione del problema con derivata obliqua in Ω, assumendo dapprima che la condizione al bordo sia omogenea. Dimostreremo il caso generale dopo aver provato un risultato di estensione.

Proposizione 6.4.3 *Sia $\lambda > 0$. Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica soluzione in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ Bu = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

DIM. La dimostrazione è del tutto simile a quella del Teorema 5.6.4 a cui rimandiamo per ulteriori dettagli tecnici.
Usiamo la notazione del Teorema 6.4.1. Pertanto sia $\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_{x_i}) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}$ e sia $(\eta_i^2)_{i=1,2,\cdots,n=n_1+n_2}$ una partizione dell'unità subordinata a tale ricoprimento.

Sia $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Allora possiamo scrivere $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 f$.

Se $i \leq n_1$ allora $\eta_i f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp}(\eta_i f) \subseteq B(x_i, R_{x_i})$. Indichiamo con $R(\lambda)$ il risolvente dell'operatore A in $\mathbb{R}^N$. Osserviamo che $R(\lambda) : C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \to C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Poniamo

$$R_i(\lambda)f := \eta_i R(\lambda)(\eta_i f)$$

e notiamo che

$$R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{2,\alpha}(\Omega) \quad \text{e} \quad \text{supp}\, R_i(\lambda)f \subseteq B(x_i, R_{x_i}).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} (\lambda - A)R_i(\lambda)f &= (\lambda - A)\eta_i R(\lambda)(\eta_i f) \\ &= \eta_i(\lambda - A)R(\lambda)(\eta_i f) + [\lambda - A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f) \\ &= \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f \end{aligned}$$

dove $[\cdot,\cdot]$ indica il commutatore e

$$S_i(\lambda)f = [\lambda - A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f) = -[A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f).$$

Risulta

$$\|S_i(\lambda)f\|_\alpha = O(\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}})\|f\|_\alpha$$

per λ grande.

Sia ora $n_1+1 \leq i \leq n$. Se M_i è l'operatore associato al cambio di variabili (definito in 5.33) poniamo

$$R_i(\lambda)f := M_i^{-1}\left(M_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A}_i)^{-1}M_i(\eta_i f)\right)$$

dove $(\lambda - \tilde{A}_i)^{-1}$ è il risolvente di $\tilde{A}_i$ in $\mathbb{R}^N_+$ con la condizione $\tilde{B}_i = 0$ al bordo. Allora $R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $BR_i(\lambda)f = 0$ su $\partial\Omega$ e supp $R_i(\lambda)f \subset V_{x_i}$. Risulta

$$(\lambda - A)R_i(\lambda)f = \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f$$

dove ora $S_i(\lambda) = M_i^{-1}\Big([\lambda - \tilde{A}, M_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\,(M_i(\eta_i f))\Big)$. Come prima, per λ abbastanza grande, tenendo conto della Proposizione 6.3.4, risulta

$$\|S_i(\lambda)f\|_\alpha = O(\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}})\|f\|_\alpha.$$

A questo punto poniamo

$$V(\lambda) = \sum_{i=1}^n R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{2,\alpha}(\Omega)$$

e osserviamo che $BV(\lambda)f = 0$ su $\partial\Omega$ e

$$(\lambda - A)V(\lambda)f = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 f + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f = f + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f.$$

Quindi

$$(\lambda - A)V(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{e} \quad (\lambda - A)V(\lambda) = I + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda).$$

Scegliamo λ_1 tale che $\displaystyle\sum_{i=1}^n \|S_i(\lambda)\|_\alpha \le \frac{1}{2}$ per ogni $\lambda > \lambda_1$. Questo assicura che l'operatore $I + \displaystyle\sum_{i=1}^n S_i(\lambda)$ è invertibile in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ con inverso $W(\lambda)$ tale che $\|W(\lambda)\| \le 2$. Inoltre siccome $(\lambda - A)V(\lambda)W(\lambda) = I$ su $C^{0,\alpha}(\Omega)$, $u = V(\lambda)W(\lambda)f$ è la soluzione cercata per $\lambda \ge \lambda_1$.

Se $0 < \lambda \le \lambda_1$, basta applicare il metodo di continuità agli operatori $L_t = (1-t)\lambda + t\lambda_1 - A$. infatti, scelto $\delta > 0$ con $\delta < \lambda$ e posto $\Lambda = \lambda_1$, risulta $\delta \le (1-t)\lambda + t\lambda_1 \le \Lambda$, e quindi grazie al Corollario 6.4.2, per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $Bu = 0$ su $\partial\Omega$, vale la stima

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \le C\|L_t u\|_{\alpha;\Omega},$$

con C costante indipendente da $t \in [0,1]$. Siccome L_1 è suriettivo, anche $L_0 = \lambda - A$ lo è e quindi la dimostrazione è completa. □

Lemma 6.4.4 *Se $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ allora esiste $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $h = 0$ e $\dfrac{\partial h}{\partial \nu} = g$ su $\partial\Omega$. Inoltre $\|h\|_{2,\alpha;\Omega} \le C\|g\|_{1,\alpha;\partial\Omega}$.*

DIM. Scriviamo $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, dove V_i sono definiti come nel Teorema 6.4.1. Sia (η_i) una partizione dell'unità su $\partial\Omega$ con $\dfrac{\partial \eta_i}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$. Sia $b_i(x)$ l'N-sima componente del vettore $(dJ_i)(\nu(x))$ (osserviamo che $b_i(x) < 0$). Consideriamo le funzioni

$$g_i(y) = \eta_i(H_i(y))\frac{g(H_i(y))}{b_i(H_i(y))}$$

e, dal Lemma 6.2.1, siano $\tilde{h}_i \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tali che $\tilde{h}_i = 0$ e $D_N\tilde{h}_i = g_i$ su $\mathbb{R}^{N-1}$. Poniamo $h_i(x) = \tilde{h}_i(J_i x)$. Allora $h_i = 0$ su $\partial\Omega \cap V_i$; inoltre

$$\frac{\partial h_i}{\partial \nu}(x) = \nabla\tilde{h}_i(J_i x)\cdot (dJ_i)(\nu(x)).$$

Siccome $\tilde{h}_{i|\mathbb{R}^{N-1}} = 0$, se $x \in \partial\Omega \cap V_i$ risulta

$$\nabla\tilde{h}_i(J_i x) = \Big(0, ..., D_N\tilde{h}_i(J_i x)\Big) = \eta_i(x)\frac{g(x)}{b_i(x)}$$

e quindi

$$\frac{\partial h_i}{\partial \nu}(x) = \eta_i(x)\frac{g(x)}{b_i(x)}b_i(x) = \eta_i(x)g(x).$$

La funzione $h(x) = \sum_{i=1}^{n}\eta_i(x)h_i(x)$ è la funzione cercata poichè, essendo $\frac{\partial \eta_i}{\partial \nu} = 0$ si ha

$$\frac{\partial h}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial h_i}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n}\eta_i g = g.$$

□

Osservazione 6.4.5 Usando il Lemma 6.4.4 si può costruire una funzione $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $h_{|\partial\Omega} = 0$ e $\dfrac{\partial h}{\partial b}_{|\partial\Omega} = g$, con $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ assegnata. Infatti, basta scrivere $b = b_1 + \gamma\nu$, dove b_1 è un vettore tangente a $\partial\Omega$ e $\gamma \geq \varepsilon_0 > 0$, per la condizione di non tangenzialità di b. Per il Lemma 6.4.4 esiste $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $h = 0$ e $\dfrac{\partial h}{\partial \nu} = g/\gamma$ su $\partial\Omega$. Allora $\dfrac{\partial h}{\partial b} = \gamma\dfrac{\partial h}{\partial \nu} = g$ su $\partial\Omega$, come richiesto.

Proposizione 6.4.6 *Sia $\lambda > 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ soluzione del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ Bu = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

DIM. Sia $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $Bh = g$ su $\partial\Omega$ (vedi Osservazione 6.4.5). Allora la soluzione cercata è data da $u = v + h$, dove v risolve

$$\begin{cases} \lambda v - Av = f - (\lambda h - Ah) & \text{in } \Omega \\ Bv = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Per la Proposizione 6.4.3 v esiste ed è unica. □

L'ultimo passo consiste nell'eliminare la restrizione sul segno di a.

Teorema 6.4.7 *Siano A, B gli operatori definiti in (6.1) e (6.11), rispettivamente. Assumiamo le condizioni (6.10), (6.12), (6.13) e (6.14) con a di segno qualunque. Allora esiste $\lambda_1 > 0$ tale che per ogni $\lambda > \lambda_1$, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ soluzione del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \textit{in } \Omega \\ Bu = g & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

DIM. Cerchiamo la soluzione nella forma $u = \phi v$. Il problema dato è allora equivalente a

$$\begin{cases} \lambda v - \tilde{A}v = \dfrac{f}{\phi} & \text{in } \Omega \\ \left(a\phi + \dfrac{\partial \phi}{\partial b}\right) v + \dfrac{\partial v}{\partial b}\phi = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.16}$$

dove $\tilde{A}v = Av + 2\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{D_i\phi}{\phi} D_j v + \frac{A\phi}{\phi} v - c\,v$. Scegliamo $\phi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $\inf_\Omega \phi > 0$, $a + \dfrac{1}{\phi}\dfrac{\partial\phi}{\partial b} = 0$ su $\partial\Omega$. Per costruire ϕ, consideriamo, in virtù dell'Osservazione 6.4.5, una funzione $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $h_{|\partial\Omega} = 0$ e $\dfrac{\partial h}{\partial b}_{|\partial\Omega} = -a$. Poniamo quindi $\phi = 1 + \eta\, h$, dove η è una funzione regolare con $\eta \equiv 1$ in un piccolo intorno di $\partial\Omega$, determinato in modo tale che $\phi \geq 1/2$ su $\overline{\Omega}$.

Sia adesso λ_1 tale che $\lambda_1 - \dfrac{A\phi}{\phi} + c \geq 0$. Per la Proposizione 6.4.6, il problema (6.16) ha un'unica soluzione per $\lambda > \lambda_1$ e quindi lo stesso vale per il problema assegnato. $\square$