Si può provare che in Δ° si può introdurre una seconda metrica, detta di Kolmogorov ([9]), definita da

$$d'(F,G) := \sup\{|F(x) - G(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Tuttavia la topologia indotta da d' non è quella della convergenza completa. E' infatti immediato che se $d'(F_n,F) \to 0$ con $F_n, F \in \Delta^{\circ}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) allora $F_n \xrightarrow{c} F$, ma una successione di f.r. di Δ° può convergere completamente senza che accada $d'(F_n,F) \to 0$. Basta considerare $F = \varepsilon_o$, e

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ nx & , \quad x \in [0,1/n[, \\ 1 & . , \quad x \geq 1/n. \end{cases}$$

Si vede subito che $F_n \xrightarrow{c} \varepsilon_o$, ma $d'(F_n,\varepsilon_o) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. LA METRICA DI SIBLEY-SCHWEIZER

DEFINIZIONE 2.1. Se $h \in [0,1]$, si ponga $I(h) :=]-1/h, 1/h[$. Se $F,G \in \Delta$ si indichi con $(F,G;h)$ la condizione

$$F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h) + h \qquad \forall x \in I(h).$$

La metrica d_S su Δ introdotta da Sibley [15] é modificata da Schweizer [10] è la funzione $d_S : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$d_S(F,G) := \inf\{h > 0 : \text{valgono sia } (F,G;h) \text{ sia } (G,F;h)\}.$$

Si osservi che valgono sempre $(F,G;1)$ e $(G,F;1)$; perciò $d_S(F,G) \leq 1$.

Si osservi, inoltre, che nella definizione di d_L, la diseguaglianza $F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h$ implica, come subito si controlla, mediante cambi di variabili, anche l'altra $G(x-h)-h \leq F(x) \leq G(x+h)+h$.

Ciò accade perché ad entrambe si richiede di essere valide per ogni x di $\mathbb{R}$. Nella definizione di d_S la condizione $(F,G;h)$ non implica invece l'altra $(G,F;h)$. Perciò occorre richiedere esplicitamente che siano valide entrambe le condizioni $(F,G;h)$ e $(G,F;h)$ affinché d_S goda della proprietà di simmetria. La differenza fondamentale tra le metriche d_L e d_S è che le diseguaglianze in questione debbono valere in $\mathbb{R}$ per d_L e in $I(h)$ per d_S.

In conseguenza dell'ultima osservazione si vede che

$$d_S(F,G) \leq d_L(F,G) \qquad \forall\, F,G \in \Delta^\circ$$

Si dimostrerà sotto che d_S è effettivamente una metrica. A tal fine occorre premettere il seguente

<u>LEMMA 2.1.</u> Se $d_S(F,G) = h > 0$ valgono entrambe le condizioni $(F,G;h)$ e $(G,F;h)$.

<u>DIM</u>. Se $0 < s < t \leq 1$, allora è $I(t) \subset I(s)$. Poiché $I(h)$ è aperto, se $x \in I(h)$ esistono $y \in I(h)$ e $t > 0$ tali che $y > x$ e $y \in I(h+t)$. Poiché $d_S(F,G) = h$ vale la condizione $(F,G;h+t)$ cioè $F(y-h-t) - (h+t) \leq G(y) \leq F(y+h+t)+h+t$ onde, per $t \downarrow 0$, $F(y-h-0)-h \leq G(y) \leq F(y+h)+h$, ove si è usata la continuità a destra di F. Si faccia ora tendere y a x decrescendo; la continuità a destra di F e G dà

$$F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h) + h \qquad \forall x \in I(h).$$

Vale cioé la $(F,G;h)$. Scambiando i ruoli di F e G si ottiene la $(G,F;h)$.

Q.E.D.

<u>TEOREMA 2.1.</u> (Δ,d_S) è uno spazio metrico.

<u>DIM.</u> SI stabiliscono facilmente le proprietà $d_S(F,G) \geq 0$ e $d_S(F,G) = d_S(G,F)$ $(F,G \in \Delta)$. Se $d_S(F,G) = 0$ segue dalla definizione di d_S e dalle proprietà delle f.r. che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è $G(x) \leq$

$\leq F(x+0)$ e $F(x) \leq G(x+0)$, onde, per la continuità a destra di F e di G, l'eguaglianza $F(x) = G(x)$.

Per dimostrare la disuguaglianza triangolare

$$(1) \qquad d_S(F,H) \leq d_S(F,G) + d_S(G,H)$$

quali che siano F,G e H in Δ (purché distinte, altrimenti la (1) è banale), sia $\alpha = d_S(F,G) > 0$ e $\beta = d_S(G,H) > 0$. Se fosse $\alpha+\beta \geq 1$ non si avrebbe alcunché da dimostrare, sicché si può supporre $\alpha+\beta<1$. Si consideri, in questo caso, $x \in I(\alpha+\beta)$. Ma allora $x-\beta$ e $x+\beta$ appartengono entrambi a $I(\alpha)$. Infatti da $-1/(\alpha+\beta) < x < 1/(\alpha+\beta)$ scende $-\frac{1}{\alpha+\beta} - \beta < x-\beta < \frac{1}{\alpha+\beta} - \beta$ cioè $-\frac{1+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta} < x-\beta < \frac{1-\alpha\beta-\beta^2}{\alpha+\beta}$.
L'ovvia diseguaglianza $\alpha\beta(\alpha+\beta) < \beta$ implica ora che $\frac{1-\alpha\beta-\beta^2}{\alpha+\beta} < \frac{1}{\alpha}$ e $-\frac{1+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta} > \frac{1}{\alpha}$. Analogamente si mostra che $x+\beta \in I(\alpha)$. Pertanto, in virtù del lemma 1, si ha che per $x \in I(\alpha+\beta)$

$$F(x-\alpha-\beta)-\alpha-\beta \leq G(x-\beta)-\beta \leq H(x) \leq G(x+\beta)+\beta \leq F(x+\alpha+\beta)+\alpha .$$

Vale così la proprietà $(F,H;\ \alpha+\beta)$. Similmente, $x-\alpha$ e $x+\alpha$ appartengono entrambi a $I(\beta)$ e di qui, come sopra, scende la condizione $(H,F;\ \alpha+\beta)$. Perciò $d_S(F,H) \leq \alpha+\beta = d_S(F,G) + d_S(G,H)$.

Q.E.D.

TEOREMA 2.2. La convergenza nella metrica d_S equivale alla convergenza debole di f.r. cioè $F_n \xrightarrow{w} F$ se, e solo se, $d_S(F_n,F) \to 0$.

DIM. Si supponga che $d_S(F_n,F) \to 0$ e sia $x \in G(F)$. Si può pure supporre che $x \in \mathbb{R} \cap C(F)$ poiché la convergenza di F_n a F è automatica in $-\infty$ e in $+\infty$. Se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo è $|x-\varepsilon, x+\varepsilon| \subset \subset I(\varepsilon)$. Per ogni ε con tale proprietà vale definitivamente la proprietà $(F,F_n;\varepsilon)$ onde

$$F(x-2\varepsilon)-\varepsilon \leq F_n(x-\varepsilon) \leq F_n(x) \leq F_n(x+\varepsilon) \leq F(x+2\varepsilon)+\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε e poiché F è continua in x, si può concludere che $F_n(x) \to F(x)$.

Viceversa, si supponga $F_n \xrightarrow{w} F$ e si prenda $\varepsilon \in]0,1]$. Poiché $\overline{C(F)} = \mathbb{R}$ esistono $r+1$ numeri reali $a_o, a_1, \ldots, a_r$ con $a_i \in C(F)$, $a_i < a_{i+1}, a_{i+1}-a_i < \varepsilon$; $a_o < \varepsilon - 1/\varepsilon$, $a_r > 1/\varepsilon$. Esiste allora $n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq n_o$ riesca

$$|F_n(a_i) - F(a_i)| < \varepsilon \qquad (i=0,1,\ldots,r).$$

Sia $x \in I(\varepsilon)$; vi è , allora, un indice i che $x \in [a_{i-1}, a_i]$ sicché

$$F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(a_{i-1})-\varepsilon \leq F_n(a_{i-1}) \leq F_n(x) \leq F_n(a_i) \leq F(a_i)+\varepsilon \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon;$$

vale cioè la $(F,F_n;\varepsilon)$. Scambiando F e F_n si ottiene l'altra condizione $(F_n,F;\varepsilon)$. Segue che $d_S(F_n,F) \to 0$.

Q.E.D.

I teoremi che seguono mostrano come (Δ,d_S) sia compatto, a differenza di $(\Delta°,d_L)$.

<u>TEOREMA 2.3.</u> (Δ,d_S) è completo.

<u>DIM.</u> Sia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta$ una successione di Cauchy; per ogni $\varepsilon > 0$ esiste, cioè, $n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $d_S(F_n,F_m) < \varepsilon$ ogni qual volta $m,n \geq n_o$. Per il teorema di Helly, si può estrarre da $\{F_n\}$ una successione $\{F_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ che converge debolmente a $F \in \Delta$.(Si osservi che, stante la definizione 1.2 di f.r., il limite la cui esistenza è asserita dal teorema 1.2 è una f.r. di Δ, ma, in generale,non di $\Delta°$). Il teorema 2 dà allora $\lim\limits_{k\to\infty} d_S(F_{n(k)},F) = 0$.

Ma allora la diseguaglianza triangolare

$$d_S(F_n,F) \leq d_S(F_n,F_{n(k)}) + d_S(F_{n(k)},F)$$

implica l'asserto $\lim_{n\to\infty} d_S(F_n,F) = 0.$

Q.E.D.

Il risultato, appena dimostrato per via diretta, è, naturalmente, un corollario del seguente

TEOREMA 2.4. (Δ, d_S) è compatto.

DIM. Per il teorema di Helly, (Δ, d_S) è sequenzialmente compatto; ma questa proprietà è, in uno spazio metrico, equivalente alla compattezza (si veda, per esempio, [4] (3.16.1)).

Q.E.D.

E' istruttivo riprendere gli esempî 1.1 e 1.3 e mostrare che le successioni lì date convergono debolmente.

ESEMPIO 2.1. Siano F_n e F definite come nell'esempio 1.1. Vogliamo mostrare che $d_S(F_n,F) \to 0$. Presi $\varepsilon \in]0,1]$, $n > 1/\varepsilon$ e $x \in I(\varepsilon)$, delle diseguaglianze

$$F_n(x-\varepsilon) - \varepsilon = \frac{x-\varepsilon+n}{2n} - \varepsilon \leq \frac{1}{2} = F(x) \leq F_n(x+\varepsilon)+\varepsilon = \frac{x+\varepsilon+n}{2n}+\varepsilon = \frac{1}{2} + \varepsilon\frac{x-\varepsilon}{2n}$$

l'ultima è ovvia. Quanto alla prima, essa equivale a $\frac{x-\varepsilon}{2n} \leq \varepsilon$ cioé a $\frac{x}{\varepsilon} \leq 2n+1$; ma $\frac{x}{\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon^2} < n < 2n+1$, sicché vale la $(F_n,F;\varepsilon)$.

Inoltre entrambe le diseguaglianze in

$$F(x-\varepsilon)-\varepsilon = \frac{1}{2}-\varepsilon \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} = F_n(x) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon = F(x+\varepsilon) + \varepsilon$$

valgono se, e solo se, $2n > 1/\varepsilon^2$, che è ovvia. Vale quindi anche la $(F,F_n;\varepsilon)$. Perciò $\lim_{n\to\infty} d_S(F_n,F) = 0$. Si osservi che è possibile estendere la definizione di d_L da Δ_o a Δ poiché essa dipende solo dai valori che le f.r. assumono in $\mathbb{R}$. In questo caso risulta $d_L(F_n,F) = 1/2$.

ESEMPIO 2.2. Sia ε_n come nell'esempio 2.1 e ε_∞ definita come segue:

$\varepsilon_\infty(x) = 0$ se $x < +\infty$, $\varepsilon_\infty(+\infty) = 1$. Allora $\varepsilon_\infty(x) = N(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

Vogliamo mostrare che $d_S(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) \to 0$. Preso $h > 0$, sia $x \in I(h)$ e $n > 1/h$; allora riesce

$$\varepsilon_\infty(x-h) - h = -h \leq \varepsilon_n(x) \leq h = \varepsilon_\infty(x+h)+h,$$

che è la condizione $(\varepsilon_\infty,\varepsilon_n;h)$, e, analogamente,

$$\varepsilon_n(x-h)-h \leq 0 = \varepsilon_\infty(x) \leq \varepsilon_n(x+h) + h$$

cioè la $(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty;h)$, onde l'asserto in virtù dell'arbitrarietà di h.

3. UNA SECONDA METRICA SU Δ.

Siano a e b numeri razionali $(a,b \in Q)$ con $a < b$. Per ogni tale coppia si definisce una funzione $\phi_{ab} : \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$ mediante $\phi_{ab}(-\infty)=1$, $\phi_{ab}(+\infty) = 0$ e per $x \in \mathbb{R}$

$$\phi_{ab}(x) := \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ (b-a)^{-1}(b-x), & x \in [a,b], \\ 0, & x \geq b \end{cases}.$$

Sia ora $\{\theta_n : n \in \mathbb{N}\}$ un'enumerazione delle funzioni ϕ_{ab} ora introdotte e si definisca $d_k : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}_+$ mediante