

Capitolo 2

Funzioni ologomorfe

In questo capitolo introdurremo un'importante classe di funzioni di una variabile complessa: le funzioni ologomorfe.

Poiché \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 sono spazi vettoriali (su \mathbb{R}) isometrici, per indicare una funzione f della variabile $z = x + iy$ utilizzeremo equivalentemente le notazioni $f(z)$ e $f(x, y)$. Nel seguito, inoltre, a meno che non sia specificato diversamente, denoteremo con Ω un aperto, non vuoto, connesso di \mathbb{C} .

Alla luce della suddetta isometria, per $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, la continuità equivale alla continuità di $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

2.1 La derivazione in senso complesso.

Teorema di Cauchy-Riemann

L'identificazione tra \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 è possibile solo a livello di spazio vettoriale metrico (su \mathbb{R}); ma \mathbb{C} è dotato altresì della struttura di campo, che permette moltiplicazioni e divisioni tra numeri complessi. È ragionevole allora pensare di estendere la nozione di derivata, così come è stata introdotta per funzioni reali di una variabile reale, alle funzioni complesse di una variabile complessa.

Definizione 2.1.1 (funzione derivabile in senso complesso).

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, e sia $z_0 \in \Omega$. f si dice *derivabile* (in senso complesso) in z_0 se esiste in \mathbb{C}

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.1)$$

In tal caso (2.1) si dice *derivata* (in senso complesso) di f in z_0 e si indica con $f'(z_0)$ o $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Osservazione 2.1.2. Così come nel caso reale, se f è derivabile in senso complesso in un punto z_0 , allora essa è continua in z_0 (la dimostrazione ricalca quella fatta per le funzioni reali). Il viceversa non vale.

Ad esempio, l'applicazione $f(z) = \bar{z}$ (cioè $f(x + iy) = x - iy$) è continua in \mathbb{C} , poiché parte reale e parte immaginaria sono funzioni reali continue; se ora fissiamo z_0 in \mathbb{C} e calcoliamo il limite del rapporto incrementale di f in z_0 otteniamo:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}$$

Posto $w := z - z_0$ notiamo che il limite considerato non esiste. Infatti, calcolandolo sui due assi coordinati (se $w = x + iy$):

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ x=0}} \frac{\bar{w}}{w} &= \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ x=0}} \frac{-iy}{iy} = -1; \\ \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{\bar{w}}{w} &= \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x}{x} = 1. \end{aligned}$$

Quindi $f(z) = \bar{z}$ non è derivabile in senso complesso.

Osservazione 2.1.3. A partire dalla definizione 2.1.1 si ottiene:

$$\begin{aligned} (2.1) &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \\ &\Leftrightarrow f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = o(|z - z_0|) \text{ per } z \rightarrow z_0, \end{aligned}$$

cioè f è derivabile in senso complesso in z_0 se e solo se in un intorno di z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad (2.2)$$

Definizione 2.1.4. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; f si dice *olomorfa* in Ω (si scrive $f \in H(\Omega)$) se è derivabile in senso complesso in ogni punto di Ω . In particolare, se $f \in H(\mathbb{C})$, f si dice *intera*.

Definizione 2.1.5. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, con u e v funzioni reali di due variabili reali, e sia $z_0 = (x_0, y_0)$. f si dice *differenziabile* in $z_0 \in \Omega$ se u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) . Questo equivale a dire:

$$\begin{cases} u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ \quad + o(|(x, y) - (x_0, y_0)|) \\ v(x, y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ \quad + o(|(x, y) - (x_0, y_0)|) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

in un intorno di z_0 . Osservato che:

$$z = x + iy \Rightarrow x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

si ha, in un intorno di z_0 :

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f_x(z_0) \frac{(z - z_0) + \overline{(z - z_0)}}{2} + f_y(z_0) \frac{(z - z_0) - \overline{(z - z_0)}}{2i} + \\ &\quad + o(|z - z_0|) = \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2} [f_x(z_0) - if_y(z_0)] (z - z_0) + \frac{1}{2} [f_x(z_0) + if_y(z_0)] \overline{(z - z_0)} + \\ &\quad + o(|z - z_0|) \end{aligned}$$

Definiamo ora la *derivata complessa di f rispetto a z* in z_0 :

$$f_z(z_0) := \frac{1}{2} [f_x(z_0) - if_y(z_0)]$$

e la *derivata complessa di f rispetto a \bar{z}* in z_0 :

$$f_{\bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2} [f_x(z_0) + if_y(z_0)]$$

In definitiva, f è differenziabile in z_0 se e solo se, in un intorno di z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|) \quad (2.3)$$

Teorema 2.1.6 (di Cauchy-Riemann). Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, poniamo $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, dove $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $z = x + iy$.

Sono equivalenti le proposizioni:

- (i) $f \in H(\Omega)$;

(ii) f differenziabile e $f_{\bar{z}} = 0$ (cioè $f_x = \frac{1}{i}f_y$) in Ω .

In tal caso $f' = f_z = f_x$ in Ω .

Inoltre (ii) si esprime equivalentemente in forma reale:

(iii) u e v differenziabili e

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{in } \Omega. \quad (2.4)$$

Dimostrazione.

(ii) \Leftrightarrow (iii). L'equivalenza tra differenziabilità di f e di u e v è data dalla definizione 2.1.5; inoltre:

$$f_{\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow f_x + if_y = 0 \Leftrightarrow u_x + iv_x + i(u_y + iv_y) = 0 \Leftrightarrow u_x - v_y + i(u_y + v_x) = 0$$

Perché sia valida l'ultima uguaglianza, devono essere nulle sia la parte reale che quella immaginaria, perciò dev'essere soddisfatto il sistema (2.4).

(i) \Rightarrow (ii). Per l'ipotesi:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|),$$

quindi f è differenziabile in z_0 con $f_z(z_0) = f'(z_0)$ e $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ (per confronto con (2.3)).

(ii) \Rightarrow (i). Se f è differenziabile in $z_0 \in \Omega$ e $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$, la (2.3) implica l'esistenza della derivata in senso complesso in z_0 e l'uguaglianza $f'(z_0) = f_z(z_0)$. \square

Il sistema (2.4) è un sistema di due equazioni alle derivate parziali dette *condizioni di monogeneità* o di *Cauchy-Riemann*.

1. Sia $g \in H(\Omega)$, definita da:

$$g(z) := u(x, y) - iv(x, y).$$

Provare che $\operatorname{div} g(z) = 0$ e $\operatorname{rot} g(z) = 0$ in Ω .

Interpretazione fisica (delle condizioni di monogeneità): un fluido avente velocità vettoriale $g(z) := u(x, y) - iv(x, y)$ è incompressibile (entro Ω non vi sono né sorgenti né inghiottitoi) e il moto è irrotazionale.

Osservazione 2.1.7. Il teorema precedente afferma che una funzione olomorfa soddisfa contemporaneamente una condizione quantitativa (il sistema (2.4)) ed una qualitativa (la differenziabilità). Se manca uno di questi due requisiti, la funzione considerata non è olomorfa.

Ad esempio, la funzione $f(z) = \bar{z}$ ($f(x + iy) = x - iy$), non è olomorfa: f è differenziabile, in quanto $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$ sono differenziabili, ma non è soddisfatto il sistema di Cauchy-Riemann (2.4):

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y.$$

Consideriamo ora la funzione $g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, con

$$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

e $g(0, 0) = 0$.

La funzione g non è olomorfa in $(0, 0)$: in $(0, 0)$ valgono le condizioni di monogeneità¹, ma u e v non sono differenziabili in $(0, 0)$ in quanto positivamente omogenee di grado 1.

2. Sia $f(z) = e^z$; allora $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$ sono differenziabili in \mathbb{C} : f è dunque differenziabile in \mathbb{C} . Le derivate parziali prime di u e v sono:

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y.$$

Sono soddisfatte le condizioni di monogeneità (2.4), per cui possiamo concludere che f è olomorfa in tutto \mathbb{C} (quindi è intera); la sua derivata in senso complesso è:

$$\frac{de^z}{dz} = f_x = e^x e^{iy} = e^z$$

3. Provare che la funzione $g(z) = e^{iz}$ è olomorfa in \mathbb{C} e $\frac{de^{iz}}{dz} = ie^{iz}$, mentre $h(z) = e^{\bar{z}}$ non è olomorfa in alcun punto di \mathbb{C} .

¹Risulta:

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = 1, \quad u_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(0, k) - u(0, 0)}{k} = -1$$

e, analogamente, $v_x(0, 0) = v_y(0, 0) = 1$.

2.2 Regole di derivazione. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa

Teorema 2.2.1. *Siano $f, g \in H(\Omega)$, allora, per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$:*

- (i) $c_1 f + c_2 g \in H(\Omega)$ (cioè $H(\Omega)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{C});
- (ii) $f \cdot g \in H(\Omega)$ e $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
- (iii) se $g \neq 0$, allora $\frac{f}{g} \in H(\Omega)$ e $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Dimostrazione. Analoga al caso reale. □

1. Calcolare la derivata in senso complesso di $f(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Siano $P(z), Q(z)$ due polinomi; calcolare la derivata di $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ in $\mathbb{C} \setminus \{Q(z) = 0\}$.

2. Sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 2.2.2 (versione complessa della regola di L'Hôpital). *Siano f, g derivabili in senso complesso in $z_0 \in \Omega$, con $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$. Allora:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Proposizione 2.2.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, non vuoto, connesso e sia f una funzione reale definita in Ω . Se $f \in H(\Omega)$, allora f è costante.*

Dimostrazione. Poiché $f(x, y) = u(x, y)$ (f è a valori in \mathbb{R}), per 2.1.6, punto (iii), risulta $u_x = 0$ e $u_y = 0$. Perciò $\nabla f = \nabla u = 0$ nel connesso Ω , dunque f è costante in Ω . □

Osservazione 2.2.4. Segue dalla proposizione precedente che le funzioni $Re(z)$, $Im(z)$ e $|z|$ non sono olomorfe in \mathbb{C} , in quanto sono a valori in \mathbb{R} e non costanti.

Il Teorema 2.1.6 afferma che se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è olomorfa in Ω , allora u e v sono differenziabili in Ω , quindi esistono u_x, v_x, u_y, v_y , ma nulla dice sulla loro continuità.

Sussiste il seguente fondamentale risultato.

Teorema 2.2.5 (di Goursat). *Se f è olomorfa in Ω , allora la funzione derivata in senso complesso $z \mapsto f'(z)$ è olomorfa in Ω .²*

Conseguenza importante di questo teorema è che una funzione olomorfa in Ω è anche $C^\infty(\Omega)$: basta applicare 2.2.5 iterativamente alle derivate successive di f . Osserviamo che non esiste un corrispondente teorema nel campo reale.

Grazie al Teorema di Goursat 2.2.5, nel seguito considereremo la seguente equivalenza:

$$f \in H(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad f \in C^1(\Omega) \text{ e } f_{\bar{z}} = 0 \text{ in } \Omega.$$

Teorema 2.2.6 (derivata della funzione composta). *Siano $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in H(\Omega_1)$, $g \in H(\Omega_2)$. Allora $g \circ f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C} \in H(\Omega_1)$ e, per ogni $z_0 \in \Omega_1$:*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Dimostrazione. Sia $f = u + iv$ e sia $z_0 \in \Omega_1$. Poiché $f \in H(\Omega_1)$, si ha $f \in C^1(\Omega_1)$ e, da 2.1.6:

$$f_x = \frac{1}{i}f_y, \quad f' = f_x = u_x + iv_x \tag{2.5}$$

Risulta:

$$(g \circ f)(x, y) = g(u(x, y) + iv(x, y)) = g(u(x, y), v(x, y))$$

Dunque, poiché $g \in H(\Omega_2)$, si ha $g \in C^1(\Omega_2)$ e:

$$g_u = \frac{1}{i}g_v, \quad g' = g_u \tag{2.6}$$

Poniamo ora $F := g \circ f$; tale funzione è $C^1(\Omega_1)$. Le sue derivate parziali sono:

$$\begin{aligned} F_x &= g_u u_x + g_v v_x = g_u u_x + i g_u v_x = g_u(u_x + iv_x) = g_u f_x; \\ F_y &= g_u u_y + g_v v_y = g_u u_y + i g_u v_y = g_u(u_y + iv_y) = g_u f_y = g_u i f_x. \end{aligned}$$

²La prova delicata del risultato profondo espresso dal Teorema di Goursat, si basa sulla dimostrazione del Teorema dell'integrale nullo e della formula integrale di Cauchy-Goursat, utilizzando la differenziabilità in Ω della funzione f , olomorfa in Ω . I teoremi 2.8.3 e 2.8.4, rispettivamente dell'integrale nullo e della formula integrale di Cauchy, saranno dimostrati nell'ipotesi che f , olomorfa in Ω , sia anche di classe $C^1(\Omega)$.

dove abbiamo sfruttato (2.5) e (2.6). Notiamo che esse rispettano le condizioni di monogeneità (2.4): per il Teorema di Cauchy-Riemann 2.1.6 $g \circ f \in H(\Omega_1)$ e per la derivata in senso complesso risulta:

$$(g \circ f)'(z_0) = (g \circ f)_x(z_0) = g_u(f(z_0)) \cdot f_x(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

□

Diamo ora qualche esempio di derivazione di funzioni elementari.

3. (Definizione e derivazione delle funzioni trigonometriche complesse)

Definiamo:

$$z \mapsto \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \mapsto \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Tali funzioni sono intere, cioè olomorfe in tutto \mathbb{C} , poiché combinazione di funzioni intere. Allora esistono le rispettive derivate in senso complesso in ogni punto di \mathbb{C} e valgono:

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$$

Osserviamo che è ancora valida la relazione $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, ma, a differenze delle corrispondenti funzioni reali, le funzioni intere seno e coseno in \mathbb{C} non sono limitate (cfr. 4.1.1).

Definiamo le funzioni seno e coseno iperbolico:

$$z \mapsto \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \mapsto \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Esse sono funzioni intere e si ha $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$ e $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

4. Provare che tutti e soli gli zeri della funzione complessa $\sin z$ sono i punti della retta reale $z_k = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Di conseguenza la funzione $\cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$ ha zeri solo nei punti della retta reale $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
5. (Derivazione del logaritmo complesso) Analizziamo la funzione $\log z$, con $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_-$: verifichiamo che essa è olomorfa (o meglio, che ogni sua determinazione è olomorfa) e calcoliamone la derivata. Per prima

cosa osserviamo che le infinite determinazioni del logaritmo complesso differiscono per una costante additiva: basterà quindi analizzare il logaritmo principale

$$\text{Log } z = \log |z| + i\text{Arg}(z)$$

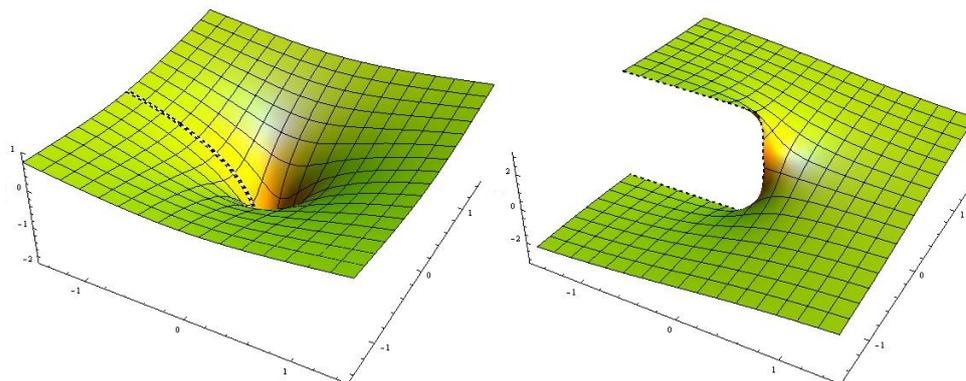


Figura 2.1: A sinistra $\text{Re}(\text{Log } z)$; a destra $\text{Im}(\text{Log } z)$.

Tale funzione è continua in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$; se $z = x + iy$, possiamo esplicitare l'espressione di $\text{Log } z$:

$$\text{Log}(x + iy) = \underbrace{\log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{v(x,y)}$$

Le funzioni u e v sono $C^1(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$; le rispettive derivate parziali sono:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{x^2 + y^2}; & u_y &= \frac{y}{x^2 + y^2}; \\ v_x &= -\frac{y}{x^2 + y^2}; & v_y &= \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Sono valide le condizioni di monogeneità: risulta allora $\text{Log } z \in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$ e si ha $(\text{Log } z)' = (\text{Log } z)_x = \frac{1}{z}$.

Teorema 2.2.7 (derivata della funzione inversa di una funzione olomorfa).
 Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$, con $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Allora esiste localmente l'inversa f^{-1} di f di classe C^1 , olomorfa e risulta:

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

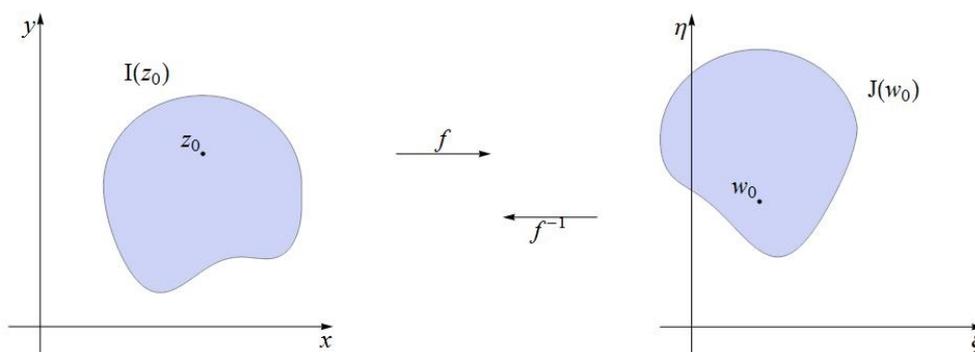
dove $z = f^{-1}(w)$.

Dimostrazione. Siano $z_0 \in \Omega$ e $w_0 = f(z_0)$. Osserviamo per prima cosa che, se $f = u + iv$, valendo in z_0 le condizioni di monogeneità si ha:

$$\begin{aligned} \det J_f(z_0) &= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}_{z=z_0} = u_x(z_0)v_y(z_0) - u_y(z_0)v_x(z_0) = \\ &= u_x^2(z_0) + v_x^2(z_0) = |f'(z_0)|^2 > 0 \end{aligned}$$

per l'ipotesi $f'(z_0) \neq 0$.

Da ciò segue, per il teorema di inversione locale, che esistono un intorno aperto $I(z_0)$ di z_0 , un intorno aperto $J(w_0)$ di w_0 e un'unica funzione $f^{-1} : J(w_0) \rightarrow I(z_0)$, con $f^{-1} \in C^1(J(w_0))$ e $f^{-1}(w_0) = z_0$.(*)



Consideriamo ora il rapporto incrementale di f^{-1} relativo al punto w_0 ; si ha, per ogni $w \in J(w_0) \setminus \{w_0\}$:

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{f^{-1}(f(z)) - f^{-1}(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}$$

Per la continuità di f e f^{-1} rispettivamente in z_0 e w_0 si ha:

$$w \rightarrow w_0 \Leftrightarrow z \rightarrow z_0$$

Dunque:

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

il che prova il teorema. □

A partire da (*) diamo un'altra dimostrazione della olografia di f^{-1} in $J(w_0)$, con i metodi propri dell'Analisi Complessa.

Dimostrazione. (*) Per ogni $w = (\xi, \eta) \in J(w_0)$, posto

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = (\xi, \eta)$$

risulta:

$$f^{-1}(\xi, \eta) = (x, y) = g(\xi, \eta) + ih(\xi, \eta)$$

con $g, h \in C^1(J(w_0))$ e quindi

$$\begin{cases} \xi = u(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \\ \eta = v(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \end{cases} \quad (2.7)$$

Proviamo che (omettendo per brevità le variabili)

$$\begin{cases} g_\xi = h_\eta \\ g_\eta = -h_\xi \end{cases}$$

Derivando (2.7) rispetto a ξ si ha (per le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) per u e v):

$$\begin{cases} 1 = u_x g_\xi + u_y h_\xi = u_x g_\xi - v_x h_\xi \\ 0 = v_x g_\xi + v_y h_\xi = v_x g_\xi + u_x h_\xi \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} g_\xi = \frac{u_x}{u_x^2 + v_x^2} \\ h_\xi = -\frac{v_x}{u_x^2 + v_x^2} \end{cases}$$

Derivando (2.7) rispetto a η , si ha (per le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) per u e v):

$$\begin{cases} 0 = u_x g_\eta + u_y h_\eta = u_x g_\eta - v_x h_\eta \\ 1 = v_x g_\eta + v_y h_\eta = v_x g_\eta + u_x h_\eta \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} g_\eta = \frac{v_x}{u_x^2 + v_x^2} \\ h_\eta = \frac{u_x}{u_x^2 + v_x^2} \end{cases}$$

Ciò prova che f^{-1} è olomorfa in $J(w_0)$. Inoltre:

$$(f^{-1})'(w) = f_\xi^{-1}(w) = g_\xi + ih_\xi = \frac{u_x}{u_x^2 + v_x^2} - \frac{iv_x}{u_x^2 + v_x^2} = \frac{1}{u_x + iv_x} = \frac{1}{f'(z)}$$

dove $z = f^{-1}(w)$. □

2.3 Integrale curvilineo delle funzioni complesse

Definizione 2.3.1 (integrale curvilineo di funzione complessa).

Sia $\gamma : [t', t''] \rightarrow \Omega$ una curva regolare orientata di primo estremo $z_1 = \gamma(t')$ e di secondo estremo $z_2 = \gamma(t'')$. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua e Ω contenga il sostegno di $\gamma(z_1, z_2)$.

Definiamo *integrale curvilineo* di f lungo l'arco orientato $\gamma(z_1, z_2)$:

$$\int_{\gamma(z_1, z_2)} f(z) dz := \int_{t'}^{t''} f[z(t)] \cdot z'(t) dt,$$

dove $z(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [t', t'']$, è la rappresentazione parametrica di $\gamma(z_1, z_2)$.

Se $f = u + iv$:

$$\begin{aligned} f[z(t)] \cdot z'(t) &= [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot (x'(t) + iy'(t)) = \\ &= u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) + \\ &+ i[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] \end{aligned}$$

Pertanto, posto $dz = dx + i dy$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(z_1, z_2)} f(z) dz &= \int_{t'}^{t''} [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt + \\ &+ i \int_{t'}^{t''} [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] dt = \\ &= \int_{\gamma(z_1, z_2)} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma(z_1, z_2)} (v dx + u dy) \end{aligned}$$

Ciò significa che l'integrale curvilineo di $f(z)$ in dz ha per parte reale ed immaginaria gli integrali delle forme differenziali $u dx - v dy$ e $v dx + u dy$.

Queste altro non sono che la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)dz = (u + iv)(dx + i dy)$.

Per brevità, segnaliamo qui solo due proprietà:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(z_1, z_2)} f(z) dz &= - \int_{\gamma(z_2, z_1)} f(z) dz; \\ \left| \int_{\gamma(z_1, z_2)} f(z) dz \right| &\leq \int_{\gamma(z_1, z_2)} |f(z)| ds, \end{aligned}$$

dove:

$$ds = |dz| = |z'(t)| dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

1. Sia:

$$\gamma(t) = x_0 + r \cos t + i(y_0 + r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad r > 0$$

Risulta:

$$\gamma(t) = (x_0 + iy_0) + r(\cos t + i \sin t) = z_0 + re^{it},$$

dove $z_0 = x_0 + iy_0$. Quest'ultima è la rappresentazione parametrica complessa della circonferenza di centro z_0 e raggio $r > 0$.

2.4 Primitive di una funzione complessa. Forme differenziali

Definizione 2.4.1 (Primitive di una funzione complessa continua). Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Una funzione F si dice *primitiva* di f in Ω se F è olomorfa in Ω e $F' = f$ in Ω .

Osserviamo che se F e G sono primitive di una stessa funzione f , esse differiscono di una costante additiva complessa; inoltre, dal Teorema di Goursat 2.2.5, si evince che, se f è dotata di primitiva in Ω , necessariamente f deve essere olomorfa in Ω .

Proposizione 2.4.2. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Allora, $f \in H(\Omega)$ se e solo se la forma differenziale $f(z)dz = f(x, y)dx + if(x, y)dy$ è chiusa (irrotazionale).

Dimostrazione. Vale:

$$\begin{aligned} f \in H(\Omega) &\Leftrightarrow f \in C^1(\Omega) \text{ e } f_{\bar{z}}(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f \in C^1(\Omega) \text{ e } f_y = if_x \Leftrightarrow f(z)dz \text{ chiusa.} \end{aligned}$$

□

Proposizione 2.4.3. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con Ω aperto, non vuoto e semplicemente connesso³. Allora, $f \in H(\Omega)$ se e solo se la forma differenziale $f(z)dz = f(x, y)dx + if(x, y)dy$ è esatta (conservativa).

³ Ω semplicemente connesso $\Leftrightarrow \Omega$ connesso e ogni curva generalmente regolare, semplice e chiusa con sostegno in Ω può essere deformata con continuità ad un punto di Ω (senza uscire da Ω).

Dimostrazione. La tesi è conseguenza diretta della precedente proposizione, poiché in un insieme semplicemente connesso le forme differenziali chiuse sono anche esatte. \square

Proposizione 2.4.4. *Sia $f \in H(\Omega)$, con Ω aperto di \mathbb{C} non vuoto e semplicemente connesso. Allora esiste una primitiva di f .*

Dimostrazione. Per ipotesi f è olomorfa in un insieme semplicemente connesso, perciò la forma differenziale $f(z)dz$ è esatta. Allora esiste $F \in C^1(\Omega)$ tale che $dF = f dz$, ovvero $F_x dx + F_y dy = f dx + i f dy$; questa condizione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} F_x = f \\ F_y = i f \end{cases} \quad (2.8)$$

Proviamo che $F \in H(\Omega)$ e che $f = F'$. F è già $C^1(\Omega)$: basta quindi verificare che soddisfa la condizione di Cauchy-Riemann; infatti, da (2.8) si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} [F_x + i F_y] = \frac{1}{2} [f - f] = 0.$$

Dunque $F \in H(\Omega)$. Inoltre, per la condizione di Cauchy-Riemann e per la prima in (2.8), otteniamo:

$$F' = F_x = f,$$

il che prova completamente la tesi. \square

2.5 Logaritmo olomorfo

Proviamo l'olomorfia del logaritmo di una funzione olomorfa in Ω aperto e semplicemente connesso.

Proposizione 2.5.1 (esistenza del logaritmo olomorfo). *Sia Ω aperto semplicemente connesso di \mathbb{C} e sia $f \in H(\Omega)$, con $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Allora $\log(f(z)) \in H(\Omega)$ e*

$$\frac{d}{dz} \log(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} \in H(\Omega)$$

Per 2.4.4 esiste una primitiva h di g in Ω , cioè:

$$\exists h \in H(\Omega) \ni h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [e^{-h(z)} f(z)] &= -h'(z)e^{-h(z)} f(z) + e^{-h(z)} f'(z) = \\ &= -\frac{f'(z)}{f(z)} e^{-h(z)} f(z) + e^{-h(z)} f'(z) = 0, \end{aligned}$$

perciò:

$$e^{-h(z)} f(z) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Sia ora $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $e^{z_0} = c$; allora:

$$e^{-h(z)} f(z) = e^{z_0} \Rightarrow f(z) = e^{h(z)+z_0} \Rightarrow \log(f(z)) = h(z) + z_0 \in H(\Omega)$$

e

$$\frac{d}{dz} \log(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

□

Diciamo *derivata logaritmica* di $f \in H(\Omega)$ la funzione

$$z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}, \tag{2.9}$$

che risulta olomorfa negli stessi punti di $f(z)$, purché $f(z) \neq 0$.

2.6 Funzioni armoniche e armoniche coniugate

Definizione 2.6.1 (funzione armonica). Sia $h = h(x, y)$, $h : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^2(\Omega)$. La funzione h si dice *armonica* in Ω se:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \tag{2.10}$$

L'operatore:

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

è detto *operatore di Laplace* (o semplicemente *laplaciano*), mentre l'equazione (2.10) si dice *equazione di Laplace* ed è un'equazione alle derivate parziali lineare, del secondo ordine e omogenea.

Proposizione 2.6.2. *Sia $f = u + iv \in H(\Omega)$. Allora u e v sono armoniche in Ω .*

Dimostrazione. Per l'olomorfia di f le funzioni u e v rispettano le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) e, per il teorema di Goursat 2.2.5, sono $C^\infty(\Omega)$, quindi $C^2(\Omega)$; derivando la prima equazione di (2.4) rispetto a x e la seconda rispetto a y si ha:

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{xy} \\ u_{yy} = -v_{yx} \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{yx} = v_{xy} - v_{xy} = 0$$

dove abbiamo applicato il Teorema di Schwartz: u è dunque armonica. In maniera analoga si prova che v è armonica. \square

Consideriamo ora il seguente problema: data una funzione $u = u(x, y)$ armonica nell'aperto connesso Ω , determinare se esiste $v = v(x, y)$ armonica in Ω tale che $f = u + iv \in H(\Omega)$. Tale v si dice *armonica coniugata* di u .

Proposizione 2.6.3. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica in Ω aperto, non vuoto, semplicemente connesso. Allora esiste v armonica coniugata di u .*

Dimostrazione. L'esistenza di v significa che il sistema di equazioni (2.4) nella incognita v ha almeno una soluzione. Possiamo cercare v come primitiva della forma differenziale

$$v_x dx + v_y dy,$$

che, per le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4), coincide con la forma differenziale

$$-u_y dx + u_x dy,$$

che risulta essere esatta (in quanto $-u_{yy} = u_{xx}$, poiché u è armonica) in Ω semplicemente connesso, e quindi dotata di primitiva in Ω . \square

1. Sia

$$u(x, y) = 2 + 3x - x^2 + y^2.$$

Risulta $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e:

$$u_{xx}(x, y) = -2, \quad u_{yy}(x, y) = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta u = 0,$$

dunque u è armonica. Costruiamo la funzione armonica v coniugata di u . Cerchiamo $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v_y = u_x \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene (a meno di costanti additive):

$$v(x, y) = 3y - 2xy$$

Naturalmente $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, è armonica ed è la coniugata di u . La funzione

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = 2 + 3x - x^2 + y^2 + i(3y - 2xy)$$

è olomorfa in \mathbb{C} .

2. Stabilire se la funzione:

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

è armonica in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e costruirne l'eventuale armonica coniugata in $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_-$.

2.7 Funzioni olomorfe e trasformazioni conformi

Teorema 2.7.1. *Sia $f \in H(\Omega)$ e supponiamo $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Allora f è conforme (conserva gli angoli nei punti di incidenza di due curve regolari).*

Dimostrazione. Siano $I(z_0)$ e $J(w_0)$ gli intorni aperti individuati dal teorema di inversione locale, dove $z_0 = (x_0, y_0)$ e $w_0 = f(z_0)$. Sia γ una curva regolare di equazione parametrica $z(t) = x(t) + iy(t)$, con $t \in [a, b]$, con sostegno in $I(z_0)$. Sia $t_0 \in [a, b]$ e $z_0 = z(t_0)$. Dalla regolarità di γ segue che:

$$x'^2(t) + y'^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.11)$$

Sia ora $\Gamma = f \circ \gamma$ di equazione parametrica $w(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, il cui sostegno è necessariamente contenuto nell'intorno aperto $J(w_0)$. Proviamo preliminarmente che anche Γ è regolare. Poiché Γ è immagine di γ tramite f si ha:

$$\xi(t) + i\eta(t) = w(t) = f(x(t), y(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t));$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria del primo e dell'ultimo membro risulta:

$$\begin{cases} \xi(t) = u(x(t), y(t)) \\ \eta(t) = v(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (2.12)$$

Poiché $u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t)) \in C^1$, rimane da provare che $\xi'^2(t) + \eta'^2(t) > 0$ per ogni $t \in [a, b]$.

Derivando (2.12) rispetto a t :

$$\begin{cases} \xi' = u_x x' + u_y y' = u_x x' - v_x y' \\ \eta' = v_x x' + v_y y' = v_x x' + u_x y' \end{cases}$$

dove abbiamo usato le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4). Elevando al quadrato e sommando otteniamo:

$$\xi'^2 + \eta'^2 = (u_x^2 + v_x^2)(x'^2 + y'^2) > 0 \quad (2.13)$$

in quanto $u_x^2 + v_x^2 = |f'|^2 > 0$ per ipotesi e $x'^2 + y'^2 > 0$ per (2.11).

Indicato con ϑ l'angolo tra la tangente a γ in z_0 e il semiasse reale positivo, si ha:

$$\cos \vartheta = \frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}}, \quad \sin \vartheta = \frac{y'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}}$$

e, indicato con Θ l'angolo tra la tangente a Γ in w_0 e il semiasse reale positivo, si ha:

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{\xi'(t_0)}{\sqrt{\xi'^2(t_0) + \eta'^2(t_0)}} = \frac{u_x(x_0, y_0) \cos \vartheta - v_x(x_0, y_0) \sin \vartheta}{|f'(x_0, y_0)|}, \\ \sin \Theta &= \frac{\eta'(t_0)}{\sqrt{\xi'^2(t_0) + \eta'^2(t_0)}} = \frac{v_x(x_0, y_0) \cos \vartheta + u_x(x_0, y_0) \sin \vartheta}{|f'(x_0, y_0)|}, \end{aligned}$$

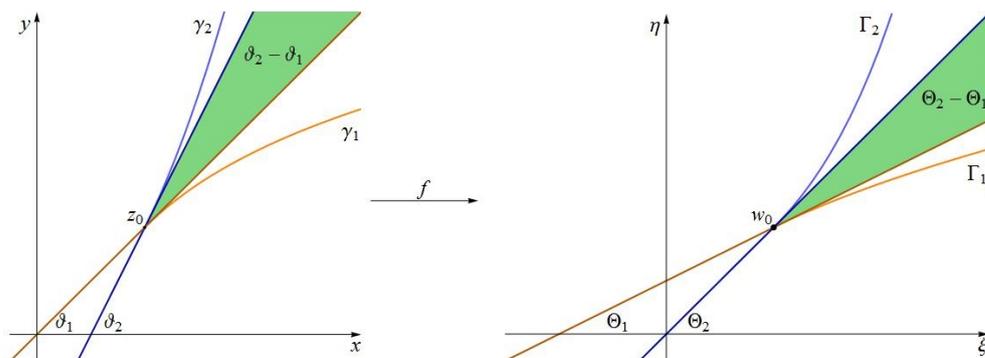
in cui abbiamo utilizzato (2.13) e sostituito le espressioni note di $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta$ e $|f'(x_0, y_0)|$. Sia ora $\delta \in]-\pi, \pi]$ tale che:

$$\cos \delta = \frac{u_x(x_0, y_0)}{|f'(x_0, y_0)|}, \quad \sin \delta = \frac{v_x(x_0, y_0)}{|f'(x_0, y_0)|}.$$

Evidentemente δ è univocamente determinato, dipende da f e dal punto $z_0 = (x_0, y_0)$, ma *non dipende dalla curva γ* . Per le formule di addizione e sottrazione di seno e coseno, risulta:

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \cos \delta \cos \vartheta - \sin \delta \sin \vartheta = \cos(\vartheta + \delta) \\ \sin \Theta &= \sin \delta \cos \vartheta + \cos \delta \sin \vartheta = \sin(\vartheta + \delta) \end{aligned}$$

Dunque $\Theta = \vartheta + \delta$. Consideriamo, allora, due curve per z_0 , γ_1 e γ_2 , e i rispettivi angoli ϑ_1 e ϑ_2 formati dalle tangenti t_1 e t_2 in z_0 e il semiasse reale positivo; consideriamo poi le curve $\Gamma_1 = f \circ \gamma_1$ e $\Gamma_2 = f \circ \gamma_2$, passanti per $w_0 = f(z_0)$, le cui tangenti in w_0 , s_1 e s_2 , formano gli angoli Θ_1 e Θ_2 con il semiasse reale positivo.



L'angolo tra t_1 e t_2 è $\vartheta_2 - \vartheta_1$; l'angolo tra s_1 e s_2 è:

$$\Theta_2 - \Theta_1 = (\vartheta_2 + \delta) - (\vartheta_1 + \delta) = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

Dunque f lascia invariati gli angoli formati tra le rette tangenti. □

Osservazione 2.7.2. L'ipotesi $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ è essenziale. Infatti, per la funzione olomorfa in \mathbb{C}

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \xi + i\eta,$$

si ha:

$$f'(z) = 2z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

e risulta $f'(0) = 0$. Le due semirette uscenti dall'origine nel piano $\mathbb{C}_{(x,y)}$, di equazioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ radianti. Le due semirette immagini tramite la f , uscenti dall'origine del piano $\mathbb{C}_{(\xi,\eta)}$, di equazioni:

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \xi \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta \geq 0 \end{cases}$$

formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$ radianti.

2.8 Teorema dell'integrale nullo e formula integrale di Cauchy

Definizione 2.8.1 (dominio di \mathbb{R}^2). Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato; D si dice *dominio* di \mathbb{R}^2 se

$$D = \overset{\circ}{D}$$

(D è la chiusura del suo interno). D si dice *dominio regolare* se la sua frontiera è costituita da un numero finito di curve regolari (o generalmente regolari), semplici e chiuse.

Per tali insiemi, in \mathbb{R}^2 vale il seguente teorema.

Teorema 2.8.2 (di Gauss-Green). Sia D dominio regolare di \mathbb{R}^2 e siano $X : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $Y : D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^0(D)$. Se $X_x(x, y), Y_y(x, y) \in C^0(D)$, allora vale la seguente uguaglianza:

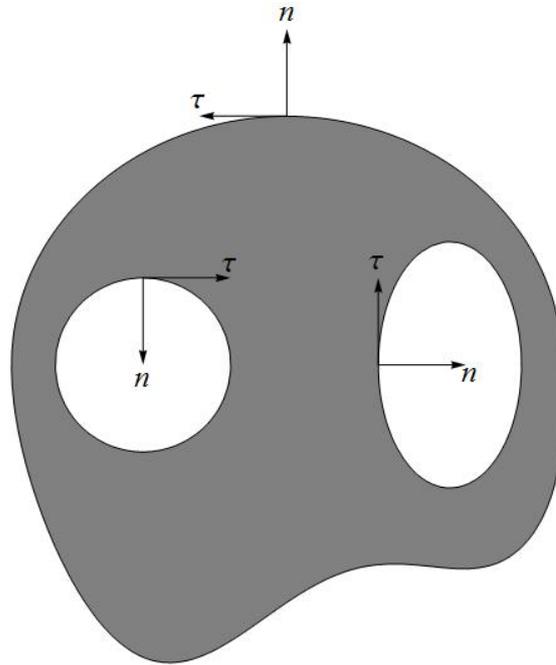
$$\iint_D (X_x + Y_y) dx dy = \int_{+\partial D} X dy - Y dx,$$

dove $+\partial D$ indica che il verso di percorrenza di ∂D è scelto (convenzionalmente) in modo tale da avere sempre $\overset{\circ}{D}$ sulla sinistra⁴.

Teorema 2.8.3 (dell'integrale nullo di Cauchy). Siano $f \in H(\Omega)$ e $D \subset \Omega$ un dominio regolare. Allora:

$$\int_{+\partial D} f(z) dz = 0 \tag{2.14}$$

⁴Ciò corrisponde ad orientare il vettore tangente τ in modo da farlo coincidere col vettore normale n a ∂D ed uscente da D ruotato di $\pi/2$ radianti in senso antiorario.



Dimostrazione. Siano $f = u + iv$ e $dz = dx + i dy$. Applicando il Teorema di Gauss-Green 2.8.2 e le condizioni di monogeneità otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} f(z) dz &= \int_{+\partial D} (u + iv)(dx + i dy) = \\ &= \int_{+\partial D} (u dx - v dy) + i \int_{+\partial D} (v dx + u dy) = \\ &= \iint_D (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

□

Osserviamo esplicitamente che la (2.14) vale per domini regolari D di connessione n qualsiasi. Infatti, da D a connessione n si può dedurre, con $n - 1$ tagli, un dominio regolare semplicemente connesso.

Teorema 2.8.4 (Formula integrale di Cauchy). *Siano $f \in H(\Omega)$ e $D \subset \Omega$ un dominio regolare. Allora:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) \quad \forall \zeta \in \mathring{D} \quad (2.15)$$

Dimostrazione. Siano $\zeta \in \mathring{D}$, $0 < \varepsilon < \text{dist}(\zeta, \partial D)$ e consideriamo $B_\varepsilon(\zeta)$, la cui frontiera ha equazione parametrica:

$$z(t) = \zeta + \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Definiamo l'insieme $D_\varepsilon := D \setminus B_\varepsilon(\zeta)$, la cui frontiera è $\partial D_\varepsilon = \partial D \cup \partial B_\varepsilon(\zeta)$ (per orientare positivamente ∂D_ε , ∂D e $\partial B_\varepsilon(\zeta)$ sono orientate rispettivamente in senso antiorario ed orario). Allora D_ε è un dominio regolare in Ω e la funzione

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z - \zeta}$$

è olomorfa in D_ε perchè $z - \zeta \neq 0$ in D_ε . Applicando il teorema 2.8.3 a questa funzione e al dominio regolare D_ε otteniamo:

$$\int_{+\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 0 \quad (2.16)$$

per ogni $0 < \varepsilon < \text{dist}(\zeta, \partial D)$. Risulta:

$$\int_{+\partial B_\varepsilon(\zeta)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \cdot i\varepsilon e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(\zeta + \varepsilon e^{it}) dt.$$

Ora, la funzione $f(\zeta + \varepsilon e^{it})$ è continua nella variabile t sul compatto $[0, 2\pi]$, per ogni $\varepsilon > 0$, dunque ivi uniformemente continua. Pertanto, con passaggio al limite sotto il segno d'integrale:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{+\partial B_\varepsilon(\zeta)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\zeta + \varepsilon e^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} f(\zeta) dt = 2\pi i f(\zeta).$$

Tenendo conto dell'orientazione di ∂D_ε , dalla (2.16) segue:

$$\int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{+\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \int_{-\partial B_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{+\partial B_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

e per $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$\int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 2\pi i f(\zeta),$$

da cui la tesi. □

Osservazione 2.8.5. La funzione:

$$\frac{1}{z - \zeta}$$

si chiama *nucleo (integrale) di Cauchy*; essa è di classe C^∞ rispetto alle variabili z e ζ purché $z \neq \zeta$. Inoltre, per $z \in \partial D$ e $\zeta \in \mathring{D}$, il nucleo di Cauchy è olomorfo in ζ .

2.9 Teorema di Morera. Teorema della media integrale di Gauss. Principio del massimo (minimo) modulo

Il seguente risultato esprime una condizione sufficiente (ma anche necessaria per 2.8.3) affinché una funzione continua sia olomorfa.

Teorema 2.9.1 (di Morera). *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in C^0(\Omega)$. Supponiamo che*

$$\int_{+\partial T} f(z) dz = 0$$

per ogni triangolo T tale che $\overline{T} \subseteq \Omega$. Allora $f \in H(\Omega)$

Dimostrazione. Poiché il concetto di olomorfia è un concetto locale, siano $z_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tale che $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$. Siano $z, z+h$, (con $h \neq 0$) due punti distinti in $B_r(z_0)$. Sia F l'applicazione tale che:

$$z \in B_r(z_0) \mapsto F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Detto \overline{T}_z il triangolo di vertici consecutivi (in senso antiorario) $z_0, z+h, z$, si ha per ipotesi:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{+\partial T_z} f(z) dz = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta + \int_{z+h}^z f(\zeta) d\zeta + \int_z^{z_0} f(\zeta) d\zeta = \\ &= F(z+h) + \int_{z+h}^z f(\zeta) d\zeta - F(z). \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta \Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Per la continuità di f in Ω , al tendere di h a 0, dall'ultima uguaglianza si ha:

$$F'(z) = f(z).$$

Pertanto esiste la derivata in senso complesso di F in ogni punto di $B_r(z_0)$, e quindi, per l'arbitrarietà di z_0 , in ogni punto di Ω . Dunque $F \in H(\Omega)$ e, per il Teorema di Goursat 2.2.5, $f = F' \in H(\Omega)$. \square

Teorema 2.9.2 (della media integrale di Gauss). *Siano $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ e $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$. Allora:*

(i)

$$\int_{+\partial B_r(z_0)} f(z) dz = 0$$

(ii)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) \quad \forall \zeta \in B_r(z_0)$$

In particolare, poiché l'equazione parametrica di $\partial B_r(z_0)$ è $z(t) = z_0 + re^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, si ha:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{+\partial B_r(z_0)} f(z) ds$$

Dimostrazione. I punti (i) e (ii) seguono direttamente da 2.8.3 e 2.8.4 applicati al disco chiuso $\overline{B}_r(z_0)$; da (ii), per $\zeta = z_0$ si ha:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{+\partial B_r(z_0)} f(z) ds \end{aligned}$$

poiché, su $\partial B_r(z_0)$, $ds = r dt$. □

Teorema 2.9.3 (Principio del massimo modulo). *Il modulo $|f|$ di una funzione f olomorfa e non costante in Ω non ha punti di massimo relativo interni; per ogni dominio $D \subset \Omega$ il modulo di f , $|f|$, assume il suo massimo esclusivamente su ∂D .*

Alla dimostrazione premettiamo il seguente risultato

Proposizione 2.9.4. *Sia $f \in H(\Omega)$. Se $|f|$ è costante in Ω , allora f è costante in Ω .*

Dimostrazione. Sia $f = u + iv$ olomorfa in Ω . Allora $f \in C^1(\Omega)$ e valgono in Ω le condizioni di monogeneità:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Ora:

$$|f|^2 = u^2 + v^2 =: c^2$$

Se $c = 0$, $f = |f| = 0$ e la tesi segue banalmente. Se, invece, $c \neq 0$, derivando l'espressione precedente rispetto a x e y otteniamo in Ω :

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases}$$

Per le condizioni di monogeneità risulta in Ω :

$$\begin{cases} uu_x - vv_y = 0 \\ vv_x + uu_y = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema omogeneo nelle incognite u_x e u_y è $u^2 + v^2 = c^2 > 0$, pertanto l'unica soluzione è $u_x = 0, u_y = 0$ in Ω . Per le condizioni di Cauchy-Riemann si ha $v_x = 0, v_y = 0$, cioè $\nabla u = \nabla v = 0$ in Ω . Poiché Ω è connesso, u e v risultano costanti in Ω , perciò f è costante in Ω . \square

Dimostrazione del Teorema 2.9.3. Supponiamo che $z_0 \in \Omega$ sia di massimo relativo per $|f|$. Allora esiste $B_r(z_0) \subset \Omega$ tale che:

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

Poiché $|f|$ non può essere costante in $B_r(z_0)$ (per 2.9.4), esiste almeno un punto $\zeta \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ tale che $|f(\zeta)| < |f(z_0)|$. Sia ora $\rho := |\zeta - z_0|$ e sia $c \in \mathbb{R}_+$ tale che $|f(\zeta)| < c < |f(z_0)|$. Allora la circonferenza di raggio ρ e centro z_0 può essere decomposta in due archi γ_1 e γ_2 tali che $\zeta \in \gamma_1$ e $|f(z)| \leq c$ per ogni $z \in \gamma_1$. Per il teorema della media integrale di Gauss 2.9.2:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\partial B_\rho(z_0)} f(z) ds = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\gamma_1} f(z) ds + \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\gamma_2} f(z) ds$$

Posto $l(\gamma)$ la lunghezza di una curva regolare γ , ne segue:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\gamma_1} |f(z)| ds + \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\gamma_2} |f(z)| ds \leq \\ &\leq \frac{l(\gamma_1)}{2\pi\rho} \cdot c + \frac{l(\gamma_2)}{2\pi\rho} \cdot |f(z_0)| < \\ &< \frac{l(\gamma_1)}{2\pi\rho} \cdot |f(z_0)| + \frac{2\pi\rho - l(\gamma_1)}{2\pi\rho} \cdot |f(z_0)| = |f(z_0)|, \end{aligned}$$

il che è assurdo.

Inoltre, per ogni dominio $D \subset \Omega$, poiché $|f| \in C^0(D)$, per il Teorema di Weierstrass $|f|$ ha massimo in D ; non potendo assumere massimo in $\overset{\circ}{D}$, $|f|$ assumerà il massimo necessariamente solo su ∂D . \square

Osservazione 2.9.5 (Principio del minimo modulo). Supponiamo $f \neq 0$ in Ω . Il Principio del massimo modulo applicato a $\frac{1}{f}$ porta al seguente

Principio del minimo modulo:

Sia $f \in H(\Omega)$. Se esiste un punto $z_0 \in \Omega$ tale che

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| > 0 \quad \forall z \in \Omega,$$

allora f è necessariamente costante in Ω .

Osserviamo che il Principio del minimo modulo non vale se f ha zeri in Ω . Infatti, siano $\Omega = B_1(0)$ e $f(z) = z$. Allora risulta

$$|f(z)| \geq |f(0)| = 0 \quad \forall z \in B_1(0),$$

ma f non è costante.