

CAPITOLO 3

Teorema di rappresentazione spettrale per operatori limitati

3.1. Teorema di rappresentazione spettrale per operatori limitati e autoaggiunti

Per dimostrare il Teorema di Rappresentazione Spettrale nel caso degli operatori limitati e autoaggiunti è necessario introdurre un opportuno calcolo funzionale ai fini di definire cosa si debba intendere per $f(T)$ se $T \in \mathcal{L}$ ed f è una funzione.

Se $f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ è un polinomio a coefficienti complessi, allora è naturale definire $f(T) := \sum_{n=0}^N a_n T^n$.

LEMMA 3.1 (TEOREMA DELL'APPLICAZIONE SPETTRALE). *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su \mathbb{C} , $T \in \mathcal{L}(X)$ e $P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ un polinomio a coefficienti complessi. Allora*

$$\sigma(P(T)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} = P(\sigma(T)). \quad (3.29)$$

DIM. Sia $\lambda \in \sigma(T)$. Allora λ è una radice del polinomio $P(x) - P(\lambda)$ e quindi, per il Teorema fondamentale dell'Algebra, $P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x) = Q(x)(x - \lambda)$ o, equivalentemente, $P(\lambda) - P(x) = (\lambda - x)Q(x) = Q(x)(\lambda - x)$, con Q un opportuno polinomio. Passando agli operatori, otteniamo $P(\lambda) - P(T) = (\lambda - T)Q(T) = Q(T)(\lambda - T)$. Siccome $\lambda - T$ non è invertibile, non può esserlo neppure $P(\lambda) - P(T)$, cioè $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$.

Viceversa, sia $\mu \in \sigma(P(T))$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le radici del polinomio $P(x) - \mu$. Allora possiamo scrivere $P(x) - \mu = a(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$. Ora, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \notin \sigma(T)$, allora

$$(P(T) - \mu)^{-1} = a^{-1}(T - \lambda_n)^{-1} \dots (T - \lambda_1)^{-1},$$

il che contraddice l'ipotesi che $\mu \in \sigma(P(T))$. Pertanto, $\lambda_i \in \sigma(T)$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$, cioè $\mu = P(\lambda_i)$ e quindi $\mu \in P(\sigma(T))$. \square

Nel seguito, H indicherà sempre uno spazio di Hilbert su \mathbb{C} con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $\| \cdot \|$.

LEMMA 3.2. *Siano $T \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto e $P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ un polinomio a coefficienti complessi. Allora*

$$\|P(T)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|.$$

DIM. Poichè T è autoaggiunto, l'operatore $P(T)$ è normale. Pertanto, per la Proposizione 1.24, $\|P(T)\| = r(P(T))$ e dal Lemma 3.1 segue che

$$\begin{aligned} \|P(T)\| &= r(P(T)) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(P(T))\} \\ &= \sup\{|P(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(T)\} \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|. \quad \square \end{aligned}$$

Il lemma appena provato consente di estendere il calcolo funzionale dai polinomi allo spazio $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ delle funzioni continue sullo spettro di T a valori complessi. Ricordiamo che un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice positivo se $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in H$.

TEOREMA 3.3. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora esiste una e una sola applicazione lineare*

$$\Phi: C(\sigma(T), \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

con le seguenti proprietà: per ogni $f, g \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

- (1) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, $\Phi(\lambda f) = \lambda\Phi(f)$,
- (2) $\Phi(1) = I$, $\Phi(f) = \Phi(f)^*$,
- (3) $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$,
- (4) se $f = id_{\sigma(T)}$, allora $\Phi(f) = T$,
- (5) $\sigma(\Phi(f)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(T)\}$,
- (6) se $f \geq 0$, allora $\Phi(f) \geq 0$.
- (7) se $B \in \mathcal{L}(H)$ commuta con T , allora B commuta con $\Phi(f)$.

DIM. Per ogni polinomio P , definiamo $\Phi(P) := P(T)$. Per il Lemma 3.1 sappiamo che $\|P(T)\| = \|P\|_{C(\sigma(T), \mathbb{C})}$ e quindi Φ è una applicazione lineare isometrica dallo spazio dei polinomi $(\mathcal{P}_{|\sigma(T)}, \| \cdot \|_\infty)$ in $(\mathcal{L}(H), \| \cdot \|)$. Allora Φ si estende in modo unico ad una applicazione lineare e continua $\tilde{\Phi}$ dal completamento di $(\mathcal{P}_{|\sigma(T)}, \| \cdot \|_\infty)$ a valori in $(\mathcal{L}(H), \| \cdot \|)$. Per il teorema di approssimazione di Weierstrass (vedi Teorema B.13, ricordando che $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, il completamento di $(\mathcal{P}_{|\sigma(T)}, \| \cdot \|_\infty)$ è proprio lo spazio $(C(\sigma(T), \mathbb{C}), \| \cdot \|_\infty)$. Se, per semplicità di notazione, indichiamo tale estensione ancora con Φ ,

abbiamo così definito una applicazione lineare $\Phi: C(\sigma(T), \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty.$$

Le proprietà (1), (2) e (3) sono chiaramente soddisfatte se f e g sono polinomi e quindi si estendono facilmente al caso in cui f e g sono funzioni continue su $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ con un argomento di densità.

Dimostriamo il punto (5) che generalizza il Lemma 3.2. Sia $\mu \in f(\sigma(T))$. Allora $\mu = f(\lambda)$ per qualche $\lambda \in \sigma(T)$, e la seguente uguaglianza è soddisfatta

$$\mu - \Phi(f) = \Phi(f(\lambda)) - \Phi(f) = \Phi(f(\lambda) - f).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo una funzione $g_\varepsilon \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ tale che $g_\varepsilon(\lambda) = 1$, $\|g_\varepsilon\|_\infty = 1$ e

$$|[f(\eta) - f(\lambda)]g_\varepsilon(\eta)| < \varepsilon$$

per ogni $\eta \in \sigma(T)$. Dato che $\|\Phi(g_\varepsilon)\| = \|g_\varepsilon\|_\infty = 1$, esiste $x_\varepsilon \in H$ tale che $\|\Phi(g_\varepsilon)(x_\varepsilon)\| \geq 1/2$. Posto $y_\varepsilon = \Phi(g_\varepsilon)(x_\varepsilon)$, ne segue che $\|y_\varepsilon\| \geq 1/2$ e

$$\|[\Phi(f(\lambda)) - \Phi(f)](y_\varepsilon)\| = \|[\Phi(f(\lambda)) - \Phi(f)](\Phi(g_\varepsilon)(x_\varepsilon))\| < \varepsilon.$$

Questo significa che $f(\lambda) - \Phi(f)$ non è invertibile con continuità così che $f(\lambda) \in \sigma(\Phi(T))$. Viceversa, sia $\mu \notin f(\sigma(T))$. Allora la funzione $h(x) := (\mu - f(x))^{-1}$ è continua su $\sigma(T)$ e per le proprietà (1) e (2) risulta

$$\begin{aligned} (\mu - \Phi(f))\Phi(h) &= \Phi(\mu - f)\Phi(h) = \Phi(h)\Phi(\mu - f) \\ &= \Phi(h)(\mu - \Phi(f)) \\ &= \Phi(h(\mu - f)) = \Phi(1) = I, \end{aligned}$$

cioè $\mu \notin \sigma(\Phi(T))$.

Per provare la proprietà (6), osserviamo che se $f \geq 0$ su $\sigma(T)$, allora $f = g^2$ per qualche funzione $g \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ a valori reali. Per le proprietà (1) e (2), ne segue che $\Phi(f) = \Phi(g^2) = \Phi(g)^2$ con $\Phi(g)$ operatore autoaggiunto. Pertanto, per ogni $x \in H$,

$$\langle \Phi(f)(x), x \rangle = \langle \Phi(g)^2(x), x \rangle = \langle \Phi(g)(x), \Phi(g)(x) \rangle = \|\Phi(g)(x)\|^2 \geq 0,$$

cioè $\Phi(f) \geq 0$.

Infine, se B commuta con T , allora chiaramente B commuta con $P(T)$ per ogni polinomio P . Per densità segue che B commuta con $\Phi(f)$.

Rimane da provare l'unicità di Φ . Per questo basta osservare che se dovesse esistere un'applicazione lineare $\Psi: C(\sigma(T), \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ con le proprietà (1), (2), (3) e (4), allora $\Psi(f) = \Phi(f)$ per ogni polinomio f , e dunque $\Psi \equiv \Phi$ per densità. \square

Nel seguito scriveremo $f(T)$ al posto di $\Phi(f)$ per mettere in evidenza la dipendenza da T e per semplicità di notazione.

Ricordiamo ora l'enunciato del Teorema di rappresentazione di Riesz, che sarà l'altro ingrediente essenziale per la dimostrazione del teorema di rappresentazione spettrale. Per maggiori dettagli e per la dimostrazione facciamo riferimento al libro [14], cap.2.

TEOREMA 3.4 (TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ). *Sia K uno spazio topologico compatto di Hausdorff e sia Λ un funzionale positivo lineare su $C(K, \mathbb{C})$. Allora esiste ed è unica una misura di Borel regolare finita positiva μ tale che*

$$\Lambda f = \int_K f d\mu,$$

per ogni $f \in C(K, \mathbb{C})$.

PROPOSIZIONE 3.5. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto e sia $\psi \in H$. Allora esiste un'unica misura positiva μ_ψ sul compatto $\sigma(T)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,*

$$\langle f(T)(\psi), \psi \rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_\psi.$$

Tale misura μ_ψ è detta misura spettrale associata a ψ .

DIM. Consideriamo il funzionale L su $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ così definito

$$C(\sigma(T), \mathbb{C}) \ni f \mapsto L(f) := \langle f(T)(\psi), \psi \rangle.$$

Tale funzionale è lineare e continuo dato che, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$|L(f)| = |\langle f(T)(\psi), \psi \rangle| \leq \|f(T)(\psi)\| \|\psi\| \leq \|f\|_\infty \|\psi\|^2.$$

Inoltre, L è anche un funzionale positivo. Infatti, se $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ è positiva, allora per il Teorema 3.3-(6) $f(T) \geq 0$, cioè $\langle f(T)(x), x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in H$ e quindi anche per $x = \psi$.

Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste un'unica misura positiva μ_ψ sul compatto $\sigma(T)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$L(f) = \langle f(T)(\psi), \psi \rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_\psi. \quad \square$$

OSSERVAZIONE 3.6. L'introduzione di questa misura permette di estendere il calcolo funzionale anche alla classe delle funzioni boreliane e limitate su $\sigma(T)$. Infatti, se g è una funzione boreliana e limitata su $\sigma(T)$, si può definire $g(T)$ nel seguente modo. Per ogni $\psi \in H$, poniamo

$$\langle g(T)(\psi), \psi \rangle := \int_{\sigma(T)} g d\mu_\psi.$$

L'identità di polarizzazione (1.13) consente poi di definire $\langle g(T)(\phi), \psi \rangle$ per ogni $\phi, \psi \in H$. Infine, il teorema di Riesz—Fréchet permette di costruire

$g(T)$. Infatti, per un fissato $\phi \in H$, $\langle g(T)(\phi), \cdot \rangle$ è un funzionale antilineare e continuo su H così che esiste ed è unico $\xi \in H$ tale che, per ogni $\psi \in H$,

$$\langle g(T)(\phi), \psi \rangle = \langle \xi, \psi \rangle.$$

Questo implica che $g(T)(\phi) = \xi$. Il calcolo funzionale appena definito continua a soddisfare le stesse proprietà enunciate nel Teorema 3.3.

DEFINIZIONE 3.7. Sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Un vettore $\psi \in H$ è detto *vettore ciclico* per T se $\overline{\text{span}}\{T^n(\psi); n \in \mathbb{N}\} = H$.

LEMMA 3.8. Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Se esiste un vettore ciclico ψ per T , allora esiste un operatore unitario $U: H \rightarrow L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ tale che

$$(UTU^{-1})(f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \quad \mu_\psi - q.o.$$

per ogni $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$.

DIM. Per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ poniamo

$$U\Phi(f)(\psi) := f,$$

dove Φ è l'applicazione costruita nel Teorema 3.3. Allora U è ben definito sullo spazio $\{\Phi(f)(\psi); f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}$. Infatti, se $f, g \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ sono due funzioni per cui $\Phi(f)(\psi) = \Phi(g)(\psi)$, ne segue che

$$\begin{aligned} \Phi(f)T^n(\psi) &= \Phi(f)\Phi(x^n)(\psi) = \Phi(x^n)\Phi(f)(\psi) \\ &= \Phi(x^n)\Phi(g)(\psi) = \Phi(g)T^n(\psi), \end{aligned}$$

cioè $\Phi(f) = \Phi(g)$ su un sottospazio denso di H . Per la continuità di $\Phi(f)$ e di $\Phi(g)$ deduciamo che $\Phi(f) = \Phi(g)$ su tutto H . Di conseguenza, si ha

$$0 = \|\Phi(f - g)\| = \|f - g\|_\infty,$$

cioè $f \equiv g$. Inoltre, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)(\psi)\|^2 &= \langle \psi, \Phi(f)^* \Phi(f)(\psi) \rangle = \langle \psi, \Phi(\bar{f}f)(\psi) \rangle \\ &= \langle \Phi(\bar{f}f)(\psi), \psi \rangle = \int_{\sigma(T)} |f|^2 d\mu_\psi. \end{aligned}$$

Questo significa che U è una isometria da $(\{\Phi(f)(\psi); f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}, \|\cdot\|)$ in $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$.

Dato che lo spazio $\{\Phi(f)(\psi); f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}$ è denso in H , possiamo estendere U ad una isometria da H in $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$. D'altro canto, il fatto che $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ è un sottospazio denso di $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ assicura che U è anche suriettivo. A questo punto, osserviamo che

$$(UTU^{-1})(f)(\lambda) = (UT\Phi(f)(\psi))(\lambda) = (U\Phi(xf)(\psi))(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$. Questa identità continua a valere per ogni $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ dato che $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ è un sottospazio denso di $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$. \square

Per estendere questo risultato ad un operatore limitato autoaggiunto qualsiasi, è necessario il seguente lemma.

LEMMA 3.9. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su \mathbb{C} e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora esiste una famiglia di sottospazi $\{H_n\}_{n \in J}$, con $J \subseteq \mathbb{N}$ finito o infinito, tali che*

- (1) $H = \bigoplus_{n \in J} H_n$,
- (2) se $\psi \in H_n$, allora $T(\psi) \in H_n$,
- (3) per ogni $n \in J$ $T|_{H_n}$ ammette un vettore ciclico $\phi_n \in H_n$.

DIM. Sia $\{e_n\}_n$ un sistema ortonormale completo di H . Poniamo $\phi_1 := e_1$ e $H_1 := \overline{\text{span}}\{\phi_1, T(\phi_1), T^2(\phi_1), \dots\}$. Allora H_1 è invariante rispetto a T e ϕ_1 è un vettore ciclico per $T|_{H_1}$.

Se $e_n \in H$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $H_1 = H$. In tal caso, la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, sia n_1 il primo indice per cui $e_{n_1} \notin H_1$; questo significa che $e_n \in H_1$ per ogni $n < n_1$. Indichiamo con $P_{H_1^\perp}$ la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso H_1^\perp e poniamo $\phi_2 := P_{H_1^\perp}(e_{n_1})$. Osserviamo che $\phi_2 \neq 0$ dato che $e_{n_1} \notin H_1$. Inoltre, poiché T è autoaggiunto e T trasforma H_1 in sé, T trasforma anche H_1^\perp in sé. Infatti, fissato $h \in H_1^\perp$, risulta che $\langle T(h), k \rangle = \langle h, T(k) \rangle = 0$ per ogni $k \in H_1$, e ciò implica che $T(h) \in H_1^\perp$. Posto $H_2 := \overline{\text{span}}\{\phi_2, T(\phi_2), T^2(\phi_2), \dots\}$, ne segue che $H_2 \subset H_1^\perp$. In particolare, H_2 è invariante rispetto a T e ϕ_2 è un vettore ciclico di $T|_{H_2}$.

Se $H = H_1 \oplus H_2$, allora la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, sia n_2 il primo indice per cui $e_{n_2} \notin H_1 \oplus H_2$. Indicato con $P_{(H_1 \oplus H_2)^\perp}$ la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso $(H_1 \oplus H_2)^\perp$, poniamo $\phi_3 := P_{(H_1 \oplus H_2)^\perp}(e_{n_2})$ e procediamo come prima.

Dopo un numero finito di N passi, potremmo ottenere che $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_N$, dove per ogni $i = 1, \dots, N$ H_i è invariante rispetto a T e $T|_{H_i}$ ammette un vettore ciclico. Altrimenti, avremo una famiglia di sottospazi chiusi $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mutuamente ortogonali e T -invarianti tale che ogni $T|_{H_i}$ ammette un vettore ciclico ϕ_i . In ogni caso, per costruzione, $e_n \in H_1$ per ogni $n < n_1$, $e_n \in H_1 \oplus H_2$ per ogni $n \leq n < n_2$, e così via. Questo assicura che $\{e_n\}_n \subset \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i$ da cui segue $H = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i$. \square

Grazie ai lemmi precedenti, possiamo ora dimostrare il seguente risultato.

TEOREMA 3.10. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su \mathbb{C} e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora esistono una famiglia di misure $\{\mu_n\}_{n \in J}$, con $J \subseteq \mathbb{N}$ finito o infinito, su $\sigma(T)$ e un operatore unitario*

$$U: H \rightarrow \bigoplus_{n \in J} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$$

tale che

$$(UTU^{-1}(\psi))_n(\lambda) = \lambda \psi_n(\lambda) \quad \mu_n - q.o.$$

per ogni $\psi = (\psi_n)_{n \in J} \in \bigoplus_{n \in J} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$ e per ogni $n \in J$.

DIM. Il risultato segue applicando prima il Lemma 3.9 per trovare la decomposizione e poi il Lemma 3.8 su ogni componente. Si ottiene così che l' n -esima misura μ_n non è altro che la misura spettrale associata all' n -esimo vettore ciclico. \square

A questo punto possiamo dimostrare il teorema spettrale nella sua formulazione classica.

TEOREMA 3.11 (TEOREMA SPETTRALE PER OPERATORI LIMITATI E AUTOAGGIUNTI). *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su \mathbb{C} e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora esistono uno spazio di misura finita (M, μ) , una funzione limitata e misurabile $m: M \rightarrow \mathbb{R}$ e un operatore unitario $U: H \rightarrow L^2(M, d\mu)$ tali che*

$$(UTU^{-1}(f))(\lambda) = m(\lambda)f(\lambda) \quad \mu - q.o.$$

per ogni $f \in L^2(M, d\mu)$.

DIM. Per il Lemma 3.9 possiamo scrivere $H = \bigoplus_{n \in J} H_n$ con $J \subseteq \mathbb{N}$ finito o infinito, dove $\{H_n\}_{n \in J}$ è una famiglia di sottospazi chiusi di H mutuamente ortogonali tali che H_n è T -invariante e $T|_{H_n}$ ammette un vettore ciclico ϕ_n per ogni $n \in J$. Possiamo sempre supporre che $\|\phi_n\| = 2^{-n}$. Indichiamo ora con μ_n la misura spettrale su $\sigma(T)$ associata a ϕ_n . In verità, μ_n è una misura su $\sigma(T|_{H_n})$, ma possiamo estenderla su tutto $\sigma(T)$ ponendo $\mu_n \equiv 0$ su $\sigma(T) \setminus \sigma(T|_{H_n})$. D'altro canto, per il Lemma 3.8, per ogni $n \in J$, esiste un operatore unitario $U_n: H_n \rightarrow L^2(\sigma(T), \mu_n)$ tale che

$$(U_n T U_n^{-1}(\psi_n))(\lambda) = \lambda \psi_n(\lambda) \quad \mu_n - q.o.$$

per ogni $\psi_n \in L^2(\sigma(T), \mu_n)$.

Posto $M := J \times \sigma(T)$, diciamo che $E \subset M$ è μ -misurabile se, per ogni n , $E_n = \{\lambda \in \sigma(T); (n, \lambda) \in E\}$ è μ_n -misurabile. In tal caso, definiamo $\mu(E) := \sum_{n \in J} \mu_n(E_n)$. Osserviamo che $\mu(M) = \sum_{n \in J} \mu_n(\sigma(T)) = \sum_{n \in J} \|\phi_n\|^2 = \sum_{n \in J} 2^{-2n} < \infty$. Questo implica che la misura μ appena costruita è finita. Inoltre, se $f \in L^2(\sigma(T), \mu)$ allora

$$\int_M |f|^2 d\mu = \sum_{n \in J} \int_{\sigma(T)} |f(n, \lambda)|^2 d\mu_n(\lambda).$$

Ora, consideriamo l'operatore

$$U: H = \bigoplus_{n \in J} H_n \rightarrow L^2(M, d\mu)$$

così definito

$$g = \sum_{n \in J} g_n \mapsto U(g)(n, \lambda) := U_n(g_n)(\lambda).$$

Allora U è unitario e risulta

$$(UTU^{-1}(f))(n, \lambda) = \lambda f(n, \lambda)$$

per ogni $f \in L^2(\sigma(T), d\mu)$, cioè $m(n, \lambda) = \lambda$. \square

ESEMPIO 3.12. Sia $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ lo spazio di Hilbert di tutte le successioni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ a valori complessi tali che $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$. Indichiamo con $L: H \rightarrow H$ l'operatore di traslazione a sinistra, definito da $(L(x))_n := x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e con $R: H \rightarrow H$ l'operatore di traslazione a destra, definito da $(R(x))_n := x_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (l'operatore R è stato considerato nell'Esempio 1.29-(1)). È facile verificare che $L^* = R$ e $R^* = L$ così che l'operatore $T := L + R$ è autoaggiunto.

Ora, definiamo un operatore $U: H \rightarrow L^2[0, 1]$ ponendo

$$U(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{2\pi i n x}, \quad x \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

La successione di funzioni $\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ costituisce un sistema ortonormale completo di $L^2[0, 1]$. Questo implica la suriettività di U e il fatto che U conserva la norma. Di conseguenza, U è un operatore unitario.

Infine, osserviamo che ULU^{-1} e URU^{-1} sono gli operatori di moltiplicazione per le funzioni $e^{-2\pi i x}$ e $e^{2\pi i x}$ rispettivamente. Ne segue che UTU^{-1} è l'operatore di moltiplicazione per la funzione $2 \cos(2\pi x)$. \square

3.2. Teorema di rappresentazione spettrale per operatori limitati normali

Per ottenere il teorema di rappresentazione spettrale per operatori normali, è necessario definire il calcolo funzionale non solo per funzioni di variabile reale, ma più in generale di variabile complessa, poiché lo spettro di un operatore normale non è in generale costituito solo da numeri reali. Osserviamo che i polinomi non sono densi nello spazio delle funzioni complesse continue, definite su un compatto di \mathbb{C} . Quindi, per applicare il teorema di Stone-Weierstrass nella formulazione complessa, si rende necessario considerare non solo i polinomi ma anche i loro coniugati per ottenere un insieme denso. Anche in questo paragrafo H sarà uno spazio di Hilbert su \mathbb{C} con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $\|\cdot\|$.

DEFINIZIONE 3.13. Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ e sia $P(x, y) = \sum a_{nm} x^n y^m$ un polinomio in due variabili a coefficienti complessi. Allora

$$P(T, T^*) := \sum a_{nm} T^n (T^*)^m.$$

Per proseguire nella costruzione del calcolo funzionale, un passo fondamentale è stabilire che se T è un operatore normale, allora

$$\|P(T, T^*)\| = \sup\{|P(\lambda, \bar{\lambda})| \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

A tal fine dimostriamo il seguente lemma.

LEMMA 3.14. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale tale che $0 \in \sigma(T)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottospazio chiuso $M \neq \{0\}$ di H con le seguenti proprietà.*

- (1) *Per ogni operatore $B \in \mathcal{L}(H)$ che commuta con TT^* , M è invariante per B e B^* .*
- (2) *$T|_M \in \mathcal{L}(M)$ e $\|T|_M\| \leq \varepsilon$.*

DIM. Poniamo $A := TT^*$. Poiché $0 \in \sigma(T)$, possiamo applicare la Proposizione 1.17 per concludere che esiste una successione $(x_n)_n \subset H$, con $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, tale che $Tx_n \rightarrow 0$. Questo implica che $Ax_n \rightarrow 0$ e che $0 \in \sigma(A)$. Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo ora la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 2(1 - |t/\varepsilon|) & \frac{\varepsilon}{2} \leq |t| \leq \varepsilon, \\ 0 & |t| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Tale funzione f è chiaramente continua su tutto \mathbb{R} e $\sup_{t \in \mathbb{R}} |tf(t)| \leq \varepsilon$. Poiché A è autoaggiunto, possiamo così definire l'operatore $f(A)$.

Sia $M := \{x \mid f(A)x = x\}$. Allora M è chiaramente un sottospazio chiuso di H . Inoltre, se $B \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore che commuta con A , allora B commuta anche con $f(A)$ per il Teorema 3.3. Pertanto, per ogni $x \in M$,

$$Bx = Bf(A)x = f(A)Bx,$$

cioè $Bx \in M$. Questo significa che M è invariante per B . D'altro canto,

$$B^*A = B^*TT^* = T(B^*T)^* = TT^*B,$$

da cui segue che B^* commuta con A e quindi M è invariante anche per B^* . Abbiamo così provato la proprietà (1).

Osserviamo che, per ogni $x \in M$ con $\|x\| = 1$, si ha

$$\|Ax\| = \|Af(A)x\| \leq \|Af(A)\| = \sup\{|\lambda f(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\} \leq \varepsilon.$$

Da questo deduciamo che $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle Ax, x \rangle \leq \varepsilon$ per ogni $x \in M$ con $\|x\| = 1$. Pertanto, $\|T|_M\| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Abbiamo così provato anche la proprietà (2).

Rimane da provare che $M \neq \{0\}$. A tal fine, osserviamo che

$$\|(I - f(A))f(2A)\| = \sup\{|(1 - f(\lambda))f(2\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\} = 0,$$

perché se $f(2\lambda) \neq 0$, allora $f(\lambda) = 1$. Quindi, $\text{Rg}f(2A) \subseteq M$ e $\text{Rg}f(2A) \neq \{0\}$ poiché

$$\|f(2A)\| = \sup\{|f(2\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\} \geq |f(0)| = 1. \quad \square$$

LEMMA 3.15 (TEOREMA DELL'APPLICAZIONE SPETTRALE PER OPERATORI NORMALI). *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale e $P(x, y) = \sum a_{n,m} x^n y^m$ un polinomio in due variabili a coefficienti complessi. Allora*

$$\sigma(P(T, T^*)) = \{P(\lambda, \bar{\lambda}) \mid \lambda \in \sigma(T)\}. \quad (3.30)$$

Dim. Sia $\lambda \in \sigma(T)$. Allora, esiste una successione $(x_j)_j$ in H , con $\|x_j\| = 1$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, tale che $(\lambda - T)x_j \rightarrow 0$ (cfr. Proposizione 1.25). Dato che T è normale, possiamo applicare il Lemma 1.24 per concludere che $\|(\bar{\lambda} - T^*)x_j\| = \|(\lambda - T)x_j\|$ e quindi anche $\|(\bar{\lambda} - T^*)x_j\| \rightarrow 0$. Poiché vale la seguente uguaglianza

$$\begin{aligned} (P(T, T^*) - P(\lambda, \bar{\lambda}))x_j &= \sum_{n,m} a_{nm}(T^n T^{*m} - \lambda^n \bar{\lambda}^m)x_j \\ &= \sum_{n,m} a_{nm}(T^n(T^{*m} - \bar{\lambda}^m)x_j + \bar{\lambda}^m(T^n - \lambda^n)x_j) \\ &= \sum_{n,m} a_{nm}[T^n(T^{*(m-1)} + \dots + \bar{\lambda}^{m-1})(T^* - \bar{\lambda})x_j \\ &\quad + \bar{\lambda}^m(T^{n-1} + \dots + \lambda^{n-1})(T - \lambda)x_j], \end{aligned}$$

concludiamo che $(P(T, T^*) - P(\lambda, \bar{\lambda}))x_j \rightarrow 0$. Quindi $P(\lambda, \bar{\lambda}) \in \sigma(P(T, T^*))$. Sia ora $\mu \in \sigma(P(T, T^*))$. Allora l'operatore $B := P(T, T^*) - \mu I$ è normale e $0 \in \sigma(B)$. Possiamo così applicare il Lemma 3.14 per concludere che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un sottospazio chiuso $M_n \neq \{0\}$ invariante per B e B^* , con $\|B|_{M_n}\| \leq 1/n$ e che M_n è invariante anche per T e T^* poiché T commuta con BB^* . Dunque l'operatore restrizione $T|_{M_n}$ è chiaramente normale. In virtù della Proposizione 1.14, $\sigma(T|_{M_n}) \neq \emptyset$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\lambda_n \in \sigma(T|_{M_n})$. Allora esiste $y_n \in M_n$ con $\|y_n\| = 1$ tale che $\|(\lambda_n - T)y_n\| \leq 1/n$ per la Proposizione 1.25. La successione $(\lambda_n)_n$ è limitata da $\|T\|$. Pertanto, esiste una sua sottosuccessione, che per semplicità indichiamo ancora con $(\lambda_n)_n$, che converge a un certo λ . Ora $\lambda \in \sigma(T)$ poiché, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(\lambda - T)y_n\| \leq |\lambda - \lambda_n| + \|(\lambda_n - T)y_n\| \leq |\lambda - \lambda_n| + \frac{1}{n},$$

il che implica che $(\lambda - T)y_n \rightarrow 0$. Procedendo come nella prima parte della dimostrazione, si prova che $(P(T, T^*) - P(\lambda, \bar{\lambda}))y_n \rightarrow 0$. D'altro canto, $y_n \in M_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ così che

$$\|(P(T, T^*) - \mu)y_n\| = \|By_n\| \leq \|B|_{M_n}\| \cdot \|y_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Ne segue che $(P(T, T^*) - \mu)y_n \rightarrow 0$, per cui $\mu = P(\lambda, \bar{\lambda})$. \square

TEOREMA 3.16. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora esiste una e una sola applicazione lineare*

$$\Phi: C(\sigma(T), \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

con le seguenti proprietà: per ogni $f, g \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

- (1) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, $\Phi(\lambda f) = \lambda\Phi(f)$,
- (2) $\Phi(1) = I$, $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$,
- (3) $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$,

- (4) se $f = id_{\sigma(T)}$, allora $\Phi(f) = T$,
 (5) $\sigma(\Phi(f)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(T)\}$,
 (6) se $S \in \mathcal{L}(H)$ commuta con T e T^* , allora S commuta con $\Phi(f)$ per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$.

DIM. Per ogni polinomio $P(x, y) = \sum_{n,m} a_{n,m} x^n y^m$, definiamo $\Phi(P) = P(T, T^*)$. Per il Lemma 3.15, $\|\Phi(P)\| = \sup\{P(\lambda, \bar{\lambda}) \mid \lambda \in \sigma(T)\}$, quindi Φ è una applicazione lineare isometrica dallo spazio \mathcal{A} delle funzioni del tipo $P(\lambda, \bar{\lambda})$, con $\lambda \in \sigma(T)$, in $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|)$. Allora Φ si estende in modo unico ad una applicazione lineare e continua $\tilde{\Phi}$ dal completamento di \mathcal{A} in $(C(\sigma(T), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ a valori in $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|)$. D'altro canto, il completamento di \mathcal{A} è proprio lo spazio $(C(\sigma(T), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, per il teorema di Stone-Weierstrass B.12,

Se, per semplicità di notazione, indichiamo l'estensione $\tilde{\Phi}$ ancora con Φ , abbiamo così definito una applicazione lineare $\Phi: C(\sigma(T), \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty.$$

Le proprietà (1), (2) e (3) sono chiaramente soddisfatte se f e g sono funzioni in \mathcal{A} e quindi si estendono facilmente al caso in cui f e g sono funzioni continue su $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ con un argomento di densità. La proprietà (4) segue dalla definizione.

Proviamo la proprietà (5). Sia $\mu \in \sigma(T)$. Sia $(p_n)_n$ una successione di polinomi in due variabili tali che $p_n(\lambda, \bar{\lambda}) \rightarrow f(\lambda)$ uniformly on $\sigma(T)$. Allora la successione $(p_n(\mu, \bar{\mu})I - p_n(T, T^*))_n$ converge a $f(\mu)I - \Phi(f)$ in $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|)$. D'altro canto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p_n(\mu, \bar{\mu}) \in \sigma(p_n(T, T^*))$ così che $p_n(\mu, \bar{\mu})I - p_n(T, T^*)$ non è invertibile. Questo implica che $f(\mu)I - \Phi(f)$ non è invertibile (altrimenti in un suo intorno cadrebbero operatori invertibili) e quindi $f(\mu) \in \sigma(\Phi(f))$. Viceversa, sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\Phi(f))$. Allora $\lambda - f(\mu) \neq 0$ per ogni $\mu \in \sigma(T)$ così che la funzione $g = 1/(\lambda - f) \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$. Dalle proprietà (1) e (4) segue che

$$\Phi(g)(\lambda I - \Phi(f)) = (\lambda I - \Phi(f))\Phi(g) = I,$$

cioè $\lambda I - \Phi(f)$ è invertibile e quindi $\lambda \notin \sigma(\Phi(f))$.

La proprietà (6) si prova immediatamente se $f \in \mathcal{A}$. Il risultato segue poi per densità.

Per provare l'unicità di Φ basta osservare che se dovesse esistere un'applicazione lineare $\Psi: C(\sigma(T), \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ con le proprietà (1), (2), (3) e (4), allora $\Psi(f) = \Phi(f)$ per ogni funzione $f \in \mathcal{A}$, e quindi $\Psi \equiv \Phi$ per densità. \square

Nel seguito scriveremo $f(T)$ al posto di $\Phi(f)$ per mettere in evidenza la dipendenza da T e per semplicità di notazione.

OSSERVAZIONE 3.17. La proprietà (6) del Teorema 3.16 può essere migliorata grazie al Teorema di Fuglede che afferma che se un operatore S commuta con T , allora S commuta anche con T^* . Per la dimostrazione, facciamo riferimento a [10].

Siano $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale e $\psi \in H$. Consideriamo il funzionale L su $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ così definito

$$C(\sigma(T), \mathbb{C}) \ni f \mapsto L(f) := \langle f(T)(\psi), \psi \rangle.$$

Tale funzionale è lineare e positivo per il Teorema 3.16-(7).

Allora, per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste un'unica misura di Borel positiva μ_ψ definita sul compatto $\sigma(T)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$L(f) = \langle f(T)(\psi), \psi \rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_\psi.$$

Tale misura μ_ψ è detta *misura spettrale* associata a ψ .

LEMMA 3.18. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Se esiste $\psi \in H$ tale che $\overline{\text{span}}\{T^n(T^*)^m(\psi) \mid n, m \in \mathbb{N}\} = H$, allora esiste un operatore unitario $U: H \rightarrow L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ tale che*

$$(UTU^{-1})(f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \quad \mu_\psi - q.o.$$

per ogni $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$.

DIM. Per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$, poniamo

$$U\Phi(f)(\psi) := f,$$

dove Φ è l'applicazione costruita nel Teorema 3.16. Allora U è ben definito sullo spazio $\{\Phi(f)(\psi) \mid f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}$. Infatti, se $f, g \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ sono due funzioni per cui $\Phi(f)(\psi) = \Phi(g)(\psi)$, ne segue che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Phi(f)T^n(T^*)^m(\psi) &= \Phi(f)\Phi(z^n \bar{z}^m)(\psi) = \Phi(z^n \bar{z}^m)\Phi(f)(\psi) \\ &= \Phi(z^n \bar{z}^m)\Phi(g)(\psi) = \Phi(g)T^n(T^*)^m(\psi), \end{aligned}$$

cioè $\Phi(f) = \Phi(g)$ su un sottospazio denso di H . Per la continuità di $\Phi(f)$ e di $\Phi(g)$ deduciamo che $\Phi(f) = \Phi(g)$ su tutto H così che

$$0 = \|\Phi(f - g)\| = \|f - g\|_\infty,$$

cioè $f \equiv g$.

Inoltre, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)(\psi)\|^2 &= \langle \psi, \Phi(f)^* \Phi(f)(\psi) \rangle = \langle \psi, \Phi(\bar{f}f)(\psi) \rangle \\ &= \langle \Phi(\bar{f}f)(\psi), \psi \rangle = \int_{\sigma(T)} |f|^2 d\mu_\psi. \end{aligned}$$

Questo significa che U è una isometria da $(\{\Phi(f)(\psi) \mid f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}, \|\cdot\|)$ in $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$.

Dato che lo spazio $\{\Phi(f)(\psi) \mid f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}$ è denso in H , possiamo estendere U ad una isometria da H in $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$. D'altro canto, il fatto che $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ è un sottospazio denso di $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ assicura che U è anche suriettivo. A questo punto, osserviamo che

$$(UTU^{-1})(f)(\lambda) = (UT\Phi(f)(\psi))(\lambda) = (U\Phi(xf)(\psi))(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$. Questa identità continua a valere per ogni $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ dato che $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ è un sottospazio denso di $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$. \square

Per estendere questo risultato ad un operatore limitato normale qualsiasi, analogamente a quanto fatto per gli operatori autoaggiunti, dimostriamo il seguente lemma.

LEMMA 3.19. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su \mathbb{C} e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora esiste una famiglia di sottospazi $\{H_n\}_{n \in J}$, con $J \subseteq \mathbb{N}$ finito o infinito, tali che*

- (1) $H = \bigoplus_{n \in J} H_n$,
- (2) H_n è invariante per T e T^* ,
- (3) per ogni $n \in J$ esiste un vettore $\phi_n \in H_n$ tale che

$$\overline{\text{span}}\{T^n(T^*)^m(\phi_n) \mid n, m \in \mathbb{N}\} = H_n.$$

DIM. Sia $\{e_n\}_n$ un sistema ortonormale completo di H . Poniamo $\phi_1 := e_1$ e $H_1 := \overline{\text{span}}\{T^n(T^*)^m(\phi_1) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Allora H_1 è invariante rispetto a T e T^* e quindi la proprietà (3) è verificata per definizione.

Se $e_n \in H_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $H_1 = H$. In tal caso, la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, sia n_1 il primo indice per cui $e_{n_1} \notin H_1$; questo significa che $e_n \in H_1$ per ogni $n < n_1$. Indichiamo con $P_{H_1^\perp}$ la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso H_1^\perp e poniamo $\phi_2 := P_{H_1^\perp}(e_{n_1})$. Osserviamo che $\phi_2 \neq 0$ dato che $e_{n_1} \notin H_1$. Inoltre, poiché T è normale e T e T^* trasformano H_1 in sé, T e T^* trasformano anche H_1^\perp in sé. Infatti, fissato $h \in H_1^\perp$, risulta che $\langle T(h), k \rangle = \langle h, T^*(k) \rangle = 0$ per ogni $k \in H_1$, implicando che $T(h) \in H_1^\perp$. Analogamente si prova che $T^*(h) \in H_1^\perp$. Posto $H_2 := \overline{\text{span}}\{T^n(T^*)^m(\phi_2) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, ne segue che $H_2 \subset H_1^\perp$. In particolare, H_2 è invariante rispetto a T e T^* e la proprietà (3) è così verificata.

Se $H = H_1 \oplus H_2$, allora la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, sia n_2 il primo indice per cui $e_{n_2} \notin H_1 \oplus H_2$. Indicato con $P_{(H_1 \oplus H_2)^\perp}$ la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso $(H_1 \oplus H_2)^\perp$, poniamo $\phi_3 := P_{(H_1 \oplus H_2)^\perp}(e_{n_2})$ e procediamo come prima.

Dopo un numero finito di N passi, potremmo ottenere che $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_N$, dove per ogni $i = 1, \dots, N$ H_i è invariante rispetto a T e T^* e vale la proprietà (3). Altrimenti, potremmo avere una famiglia di sottospazi chiusi $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mutuamente ortogonali, invarianti rispetto a T e T^* , tale

che valga la proprietà (3). In ogni caso, per costruzione, $e_n \in H_1$ per ogni $n < n_1$, $e_n \in H_1 \oplus H_2$ per ogni $n \leq n < n_2$, e così via. Questo assicura che $\{e_n\}_n \subset \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i$ da cui segue $H = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i$. \square

TEOREMA 3.20. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su \mathbb{C} e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora esistono una famiglia di misure di Borel positive $\{\mu_n\}_{n \in J}$, con $J \subseteq \mathbb{N}$ finito o infinito, su $\sigma(T)$ e un operatore unitario*

$$U: H \rightarrow \bigoplus_{n \in J} L^2(\sigma(T), d\mu_n)$$

tale che

$$(UTU^{-1}(\psi))_n(\lambda) = \lambda \psi_n(\lambda) \quad \mu_n - q.o.$$

per ogni $\psi = (\psi_n)_{n \in J} \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\sigma(T), d\mu_n)$ e per ogni $n \in J$.

DIM. Il risultato segue applicando prima il Lemma 3.9 per trovare la decomposizione e poi il Lemma 3.8 su ogni componente, osservando che $T|_{H_n}$ è un operatore normale, poiché H_n è invariante rispetto a T e T^* . Si ottiene così che l' n -esima misura μ_n non è altro che la misura spettrale associata all' n -esimo vettore ϕ_n , definita su $\sigma(T|_{H_n})$. Estendendo tale misura a $\sigma(T)$ ponendo $\mu_n = 0$ su $\sigma(T) \setminus \sigma(T|_{H_n})$, si ottiene la tesi. \square

Imitando la stessa dimostrazione del Teorema 3.11 possiamo dimostrare il teorema spettrale per operatori normali nella sua formulazione classica.

TEOREMA 3.21 (TEOREMA SPETTRALE PER OPERATORI NORMALI). *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su \mathbb{C} e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora esistono uno spazio di misura finita (M, μ) , una funzione limitata e misurabile $m: M \rightarrow \mathbb{C}$ e un operatore unitario $U: H \rightarrow L^2(M, d\mu)$ tali che*

$$(UTU^{-1}(f))(\lambda) = m(\lambda)f(\lambda) \quad \mu - q.o.$$

per ogni $f \in L^2(M, d\mu)$.