CAPITOLO 5

STIME DI SCHAUDER PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET

5.1 ORIENTAMENTO

D'ora in poi indicheremo con A l'operatore differenziale del secondo ordine

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_iu(x) + c(x)u(x), \qquad x \in \Omega$$

con Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ per $\alpha \in (0,1)$ e

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu_0|\xi|^2, \qquad x \in \Omega,\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

con $\nu_0 > 0$. Indichiamo con $k_0 = \max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha\}$.

Il motivo per cui escludiamo il caso $\alpha = 1$ si può spiegare intuitivamente se si tiene conto che la norma di $C^1(\overline{\Omega})$ è sostanzialmente la norma uniforme per le derivate prime.

I punti cruciali nella risoluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

sono rappresentati dai seguenti teoremi.

Teorema 5.1.1 (Stime di Schauder) *Sia Ω aperto limitato di classe $C^{2,\alpha}$. Supponiamo $c \leq 0$. Allora esiste una costante $C = C(\nu_0, k_0, \Omega) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $u_{|\partial\Omega} = 0$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq C\,\|Au\|_\alpha. \tag{5.2}$$

Teorema 5.1.2 (Problema di Dirichlet per il Δ) *Sia Ω aperto limitato di classe $C^{2,\alpha}$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste (unica) $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Riguardo al Teorema 5.1.1, osserviamo che senza restrizioni sul segno di c si può provare una stima del tipo

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq C\left(\|Au\|_\alpha + \|u\|_\infty\right).$$

Insieme questi risultati permettono di risolvere il problema di Dirichlet per un operatore qualunque. Ciò è possibile grazie al metodo di continuità provato di seguito.

Teorema 5.1.3 (Metodo di continuità) *Siano X, Y spazi di Banach, L_0 ed L_1 operatori lineari e continui da X in Y. Consideriamo gli operatori lineari*

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1, \qquad t \in [0,1],$$

e supponiamo che esista una costante $C > 0$ tale che

$$\|L_t x\|_Y \geq C\,\|x\|_X, \quad x \in X,\ t \in [0,1]. \tag{5.3}$$

Se L_0 è suriettivo allora anche L_1 è suriettivo (e quindi bigettivo per la stima (5.3)).

DIM. Osserviamo che la stima (5.3) implica che ogni L_t è iniettivo.

Sia $E = \{t \in [0,1] : L_t \text{ è bigettivo}\}$. Per ipotesi $0 \in E$, per cui $E \neq \emptyset$. Se $t_0 \in E$ allora L_{t_0} è bigettivo, e per (5.3), $\|L_{t_0}^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$.

Inoltre $L_t = L_{t_0}\left(I + (t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)\right)$. Segue allora che L_t è invertibile se e solo se $I + (t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)$ è invertibile. Ciò è assicurato se $\|(t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1-L_0)\| < 1$ e per questo è sufficiente che $|t-t_0| < \frac{C}{\|L_1\|+\|L_0\|}$. Posto $\delta = \frac{C}{2(\|L_1\|+\|L_0)}$ e preso $t_0 = 0 \in E$, per quanto provato si ha che $[0,\delta] \subset E$. Ripartendo da δ e ripetendo lo stesso ragionamento si ottiene che $[\delta, 2\delta] \subset E$, e così via. Dopo un numero finito di passi si avrà che $[0,1] \subset E$, quindi la tesi. □

Il teorema che segue sintetizza i risultati precedenti e risponde completamente al problema della risolubilità di (5.1).

Teorema 5.1.4 *Sia Ω limitato di classe $C^{2,\alpha}$. Supponiamo $c \leq 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} Au = f & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

DIM. Consideriamo gli spazi di Banach

$$X = \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = 0\}, \quad Y = C^{0,\alpha}(\Omega)$$

(X con la norma indotta da $C^{2,\alpha}(\Omega)$) e gli operatori

$$\begin{aligned} L_0 &= \Delta : X \to Y \\ L_1 &= A : X \to Y \\ L_t &= (1-t)\Delta + tA \end{aligned}$$

I Teoremi 5.1.2 e 5.1.1 implicano rispettivamente che L_0 è invertibile e che vale la stima $\|u\|_X \leq C(\nu_t, k_t, \Omega)\,\|L_t u\|_Y$. Siccome $a^t_{ij} = (1-t)\delta_{ij} + ta_{ij}$, $b^t_i = tb_i$ e $c^t = tc$, per ogni $t \in [0,1]$ risulta

$$\|a^t_{ij}\|_\alpha \leq (1-t) + tk_0 \leq \max\{1, k_0\}$$
$$\|b^t_i\|_\alpha \leq tk_0 \leq k_0$$
$$\|c^t_i\|_\alpha \leq tk_0 \leq k_0$$

e

$$\sum_{i,j=1}^N a^t_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq (1-t)|\xi|^2 + \nu_0 t|\xi|^2 \geq \min\{1, \nu_0\}|\xi|^2.$$

Pertanto le costanti $C(\nu_t, k_t, \Omega)$ della stima si possono prendere indipendenti da t. E' lecito ora applicare il metodo di continuità per concludere la dimostrazione. □

Il nostro obiettivo è dunque dimostrare i Teoremi 5.1.1 e 5.1.2.

Al fine di semplificare la notazione, se B_R denota una palla di raggio R, scriveremo u_R al posto di $u_{x_0,R}$, dove x_0 è il centro della palla, che risulta fissato, e $u_{x_0,R}$ è definito in (4.6).

5.2 STIME DI SCHAUDER PER EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI

Consideriamo l'operatore a coefficienti costanti $A = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $|a_{ij}| \leq M_0$ e $\nu_0 > 0$ costante di ellitticità.

Teorema 5.2.1 (Disuguaglianza di Caccioppoli) *Sia B_R una palla aperta di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $u \in H^1(B_R)$ risolva l'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = 0$$

in B_R. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0) > 0$ tale che per ogni $r < R$ si ha

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B_R} |u|^2 \tag{5.4}$$

DIM. Osserviamo innanzitutto che l'esistenza di una soluzione $H^1(B_R)$ dell'equazione considerata non è un'ipotesi restrittiva poichè è garantita dal teorema di Lax-Milgram. Infatti, essendo i coefficienti costanti, l'operatore può essere scritto in forma di divergenza. Inoltre il Corollario 2.2.14 assicura che tale soluzione è C^∞ all'interno di B_R, per cui l'equazione in particolare è soddisfatta puntualmente.

Per ogni $\phi \in H^1_0(B_R)$ si ha che

$$\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j \phi = 0. \tag{5.5}$$

Fissato $r < R$, prendiamo $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ in B_r e $\|\nabla \eta\|_\infty \leq \frac{L}{R-r}$, per qualche $L > 0$. Scegliendo $\phi = \eta^2 u \in H_0^1(B_R)$ in (5.5) e tenendo conto dell'ellitticità dell'operatore, otteniamo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j(\eta^2 u) = \int_{B_R} \eta^2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j u \\
&\quad +2\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \eta\, u\, D_i u D_j \eta \\
&\geq \nu_0 \int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2 + 2\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \eta\, u\, D_i u D_j \eta.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\nu_0 \int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2 &\leq -2 \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \eta\, u\, D_i u D_j \eta \\
&\leq c(M_0) \int_{B_R} |\eta||\nabla u||u||\nabla \eta| \\
&\leq c(M_0) \left(\int_{B_R} |\eta|^2 |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |u|^2 |\nabla \eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c(M_0) \frac{L}{R-r} \left(\int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\nu_0 \left(\int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(M_0) \frac{L}{R-r} \left(\int_{B_R} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Siccome $\eta \equiv 1$ in B_r si ha infine

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_r} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{B_r} \eta^2|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{B_R} \eta^2|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c(M_0)}{\nu_0}\frac{L}{R-r}\left(\int_{B_R} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

Vediamo ora come è possibile iterare la disuguaglianza di Caccioppoli. Nelle ipotesi del teorema precedente siccome u è di classe C^∞ all'interno di B_R, l'uguaglianza $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}u = 0$ vale puntualmente in B_R. Derivando l'equazione otteniamo che

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}(D_k u) = 0 \qquad \text{in } B_R$$

per ogni $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Applicando ora (5.4) prima a $D_k u$ e poi a u con una scelta opportuna dei raggi, abbiamo

$$\int_{B_r} |\nabla D_k u|^2 \leq \frac{c}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^2}\int_{B_{\frac{r+R}{2}}} |D_k u|^2 \leq \frac{c^2}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^4}\int_{B_R} |u|^2.$$

Poichè la disuguaglianza precedente vale per ogni derivata parziale prima di u possiamo scrivere

$$\int_{B_r} |D^2 u|^2 \leq \frac{c^2}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^4}\int_{B_R} |u|^2.$$

Se deriviamo l'equazione h volte e dividiamo l'intervallo (r, R) in h parti uguali di lunghezza $\frac{R-r}{h}$, applicando h volte la disuguaglianza di Caccioppoli otteniamo

$$\int_{B_r} |D^h u|^2 \leq \frac{c^h}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^{2h}}\int_{B_R} |u|^2.$$

Quindi vale che

$$\|u\|_{H^h(B_r)} \leq c(\nu_0, M_0, r, R, h)\|u\|_{L^2(B_R)}.$$

Se $h > \frac{N}{2}$, per le immersioni di Sobolev risulta che $H^k(B_r) \hookrightarrow L^\infty(B_r)$, pertanto

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} = \sup_{x\in B_r} |u(x)| \leq c(\nu_0, M_0, r, R)\,\|u\|_{L^2(B_R)}. \tag{5.6}$$

Osservazione 5.2.2 Se $|\Omega| < \infty$ e $u \in L^2(\Omega)$, allora

$$\int_\Omega |u-\lambda|^2 \geq \int_\Omega |u-u_\Omega|^2, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

dove u_Ω è la media integrale di u in Ω. In particolare per $\lambda = 0$ si ha $\int_\Omega |u|^2 \geq \int_\Omega |u-u_\Omega|^2$. Infatti, basta scrivere

$$\int_\Omega |u-\lambda|^2 = \int_\Omega u^2 - 2\lambda \int_\Omega u + \lambda^2 |\Omega| = f(\lambda)$$

e notare che la funzione f ammette minimo in $\lambda = u_\Omega$.

L'osservazione appena fatta e la disuguaglianza di Caccioppoli consentono di dimostrare il seguente lemma.

Lemma 5.2.3 *Supponiamo che $u \in H^1(B_R)$ sia soluzione di $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = 0$ in B_R. Allora esistono costanti $c_2 = c_2(\nu_0, M_0) > 0$ e $c_3 = c_3(\nu_0, M_0) > 0$ tali che per ogni $r < R$ si ha*

(i) $\displaystyle\int_{B_r} |u|^2 \leq c_2 \left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R} |u|^2$;

(ii) $\displaystyle\int_{B_r} |u-u_r|^2 \leq c_3 \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u-\lambda|^2$ *per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (in particolare per $\lambda = u_r$).*

DIM. (i) Fissiamo dapprima $R = 1$. Se $r \leq \frac{1}{2}$ risulta

$$\int_{B_r} |u|^2 \leq \omega_N r^N \sup_{B_{\frac{1}{2}}} |u|^2 \leq c(\nu_0, M_0) r^N \int_{B_1} |u|^2,$$

avendo usato la stima (5.6) con $r = \frac{1}{2}$ ed $R = 1$. Se $1 > r \geq \frac{1}{2}$ allora $1 \leq 2r$ e quindi risulta

$$\int_{B_r} |u|^2 \leq 2^N r^N \int_{B_1} |u|^2.$$

Nel caso $R = 1$ basta allora prendere $c_2 = \max\{c(\nu_0, M_0), 2^N\}$.

Passiamo ora al caso generale. A meno di traslazioni possiamo supporre che il centro della palla sia $x_0 = 0$. Sia $v(x) = u(Rx)$, per $|x| < 1$. Vale allora che

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} v(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} R^2 D_{ij} u(Rx) = 0, \qquad |x| < 1,$$

cioè v soddisfa l'equazione in B_1. Applicando il caso provato alla funzione v otteniamo

$$\int_{B_{\frac{r}{R}}} |v|^2 \leq c(\nu_0, M_0) \left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_1} |v|^2.$$

Ricambiando variabile otteniamo la disuguaglianza (i).

(ii) Dimostriamo dapprima il caso particolare $\lambda = 0$.

Sia $r \leq \frac{R}{2}$. Allora applicando nell'ordine la disuguaglianza di Poincarè, il punto (i) a ∇u con raggi r e $\frac{R}{2}$, e la disuguaglianza di Caccioppoli si ha

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u-u_r|^2 &\leq c\,r^2 \int_{B_r} |\nabla u|^2 \leq cr^2 c_2\, 2^N \left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_{\frac{R}{2}}} |\nabla u|^2 \\
&= C(\nu_0, M_0) \frac{r^{N+2}}{R^N} \int_{B_{\frac{R}{2}}} |\nabla u|^2 \\
&\leq C(\nu_0, M_0) \frac{r^{N+2}}{R^N} \frac{1}{\left(R-\frac{R}{2}\right)^2} \int_{B_R} |u|^2 \\
&= c(\nu_0, M_0) \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u|^2.
\end{aligned}$$

Se $r \geq \frac{R}{2}$, allora tenendo conto dell'Osservazione 5.2.2 risulta

$$\int_{B_r} |u-u_r|^2 \leq 2^{N+2} \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_r} |u|^2 \leq 2^{N+2} \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u|^2.$$

Così (ii) vale quando $\lambda = 0$ con $c_3 = \max\{C(\nu_0, M_0), 2^{N+2}\}$.

Per ottenere la tesi nel caso generale basta applicare quanto appena provato alla funzione $u - \lambda$. $\square$

Passiamo ora a provare stime interne nel caso non omogeneo

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f$$

in B_R.

Se $f \in L^2(B_R)$ allora il metodo variazionale assicura intanto di poter trovare un'unica funzione $w \in H_0^1(B_R) \cap H^2(B_R)$ tale che $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} w = f$. Infatti, la forma quadratica associata

$$a(u,v) = \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_i u D_j v \qquad u, v \in H_0^1(B_R)$$

è chiaramente continua. Inoltre è coerciva poichè per l'ellitticità dell'operatore e per la disuguaglianza di Poincarè risulta

$$a(u,u) = \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_i u D_j u \geq \nu_0 \int_{B_R} |\nabla u|^2 \geq \nu_0 c_R \|u\|_{H^1(B_R)}.$$

Pertanto, applicando il teorema di Lax Milgram possiamo affermare che esiste un'unica funzione $w \in H^1_0(B_R)$ soluzione debole dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} w = f$$

e che vale la stima

$$\|w\|_{H^1(B_R)} \leq \frac{1}{\nu_0 c_R} \|f\|_{L^2(B_R)}.$$

Il Teorema 2.2.27 che $w \in H^2(B_R)$ e che

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^2(B_R)} &\leq c(\nu_0, M_0, R) \left(\|f\|_{L^2(B_R)} + \|w\|_{H^1(B_R)}\right) \\ &\leq c(\nu_0, M_0, R)\|f\|_{L^2(B_R)}. \end{aligned}$$

In particolare, dalla definizione di $\|\cdot\|_{H^2(B_R)}$, segue che

$$\|D^2 w\|_{L^2(B_R)} \leq c(\nu_0, M_0, R)\|f\|_{L^2(B_R)} \tag{5.8}$$

In realtà la costante c che compare nella disuguaglianza (5.8) non dipende da R. Infatti, posto $v(x) = u(Rx)$ per $|x| < 1$, si ha che $v \in H^1_0(B_1) \cap H^2(B_1)$ e soddisfa l'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} v(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} R^2 D_{ij} u(x) = R^2 f(Rx) =: g(x).$$

Usando la stima (5.8) otteniamo $\|D^2 v\|^2_{L^2(B_1)} \leq c(\nu_0, M_0, 1)\|g\|^2_{L^2(B_1)}$, ossia

$$\int_{B_1} R^4 |D^2 u(Rx)|^2 dx \leq c(\nu_0, M_0, 1) \int_{B_1} R^4 f^2(Rx) dx.$$

Semplificando R^4 e facendo il cambio di variabile $y = Rx$ giungiamo alla conclusione.

Teorema 5.2.4 *Sia $u \in H^2(B_R)$ e $f = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = f$. Allora esistono due costanti $c_4 = c_4(\nu_0, M_0) > 0$ e $c_5 = c_5(\nu_0, M_0) > 0$ tali che per ogni $r < R$ risulta*

(i) $$\int_{B_r} |D^2 u|^2 \leq c_4 \left(\left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R} |D^2 u|^2 + \int_{B_R} |f|^2 \right);$$

(ii) $$\int_{B_r} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 \leq c_5 \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 u - (D^2 u)_R|^2 + \int_{B_R} |f - f_R|^2 \right).$$

DIM. Proviamo (ii). La dimostrazione di (i) è simile. Introduciamo la funzione $z(x) = u(x) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j (D_{ij}u)_R$. Allora $D_{ij}z = D_{ij}u - (D_{ij}u)_R$, e quindi

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} z = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} (D_{ij}u)_R = f - f_R.$$

Sia $w \in H_0^1(B_R) \cap H^2(B_R)$ la soluzione variazionale di $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} w = f - f_R$. Per (5.8) sappiamo che

$$\|D^2 w\|_{L^2(B_R)} \leq c(\nu_0, M_0)\|f - f_R\|_{L^2(B_R)}. \tag{5.9}$$

Allora $v := z - w \in H^2(B_R)$ e $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} v = 0$, cioè v soddisfa l'equazione omogenea. Derivando quest'ultima abbiamo $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}(D^2 v) = 0$, essendo $D^2 v$ una qualunque derivata seconda di v. Possiamo così applicare a $D^2 v$ la stima (ii) del Lemma 5.2.3 e ottenere

$$\int_{B_r} |D^2 v - (D^2 v)_r|^2 \leq c(\nu_0, M_0) \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 v - (D^2 v)_R|^2. \tag{5.10}$$

Poichè $D^2 z - (D^2 z)_r = D^2 u - (D^2 u)_r$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 &= \int_{B_r} |D^2 z - (D^2 z)_r|^2 \qquad (5.11) \\ &\leq 2\int_{B_r} |D^2 v - (D^2 v)_r|^2 + 2\int_{B_r} |D^2 w - (D^2 w)_r|^2 \end{aligned}$$

avendo anche tenuto conto che $z = v + w$ e che vale la disuguaglianza $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. Applicando poi le stime (5.10) e (5.9) e l'Osservazione 5.2.2 abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 &\leq c(\nu_0, M_0) \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 v - (D^2 v)_R|^2 \right. \\ &\qquad \left. + \int_{B_r} |D^2 w|^2 \right) \\ &\leq c(\nu_0, M_0) \left(2\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 z - (D^2 z)_R|^2 \right. \\ &\qquad + 2\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 w - (D^2 w)_R|^2 \\ &\qquad \left. + \int_{B_R} |f - f_R|^2 \right) \\ &\leq c(\nu_0, M_0) \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 u - (D^2 u)_R|^2 \right. \\ &\qquad \left. + \int_{B_R} |f - f_R|^2 \right). \end{aligned}$$

□

5.3 STIME PER OPERATORI A COEFFICIENTI VARIABILI

Prima di provare le stime di Schauder in $\mathbb{R}^N$ vediamo come le stime del Teorema 5.2.4 si generalizzano al caso di coefficienti variabili.

Sia data l'equazione

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f$$

dove $f \in L^2(\Omega)$ e i coefficienti a_{ij} sono funzioni uniformemente continue in Ω. Denotiamo con

$$M_0 := \max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\infty\}$$

$$\omega(\delta) := \max_{i,j}\{\omega(a_{ij},\delta)\}, \quad \delta > 0$$

essendo $\omega(a_{ij},\delta)$ il modulo di continuità di a_{ij}.

Data la regolarità dei coefficienti, l'operatore non può essere scritto in forma di divergenza e pertanto la nozione di soluzione debole usata finora non è più applicabile. Considereremo perciò soluzioni in senso più forte e precisamente funzioni $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ per le quali l'equazione $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = f$ è soddisfatta q.o.

Fissiamo $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ e consideriamo $A_0 = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0) D_{ij}$. Allora

$$\begin{aligned} A_0 u &= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)) D_{ij} u \\ &= f + \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)) D_{ij} u =: F. \end{aligned}$$

Applicando la stima (ii) del Teorema 5.2.4 all'operatore A_0 si ha

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x_0)} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 &\le c(\nu_0, M_0) \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |D^2 u - (D^2 u)_R|^2 \right. \\ &\qquad \left. + \int_{B_R(x_0)} |F - F_R|^2 \right). \end{aligned}$$

Tenendo conto dell'Osservazione 5.2.2 e di come è definita F abbiamo poi

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} |F - F_R|^2 &\le \int_{B_R(x_0)} |F - f_R|^2 \le 2 \int_{B_R(x_0)} |f - f_R|^2 \\ &\quad + 2\omega^2(R) \int_{B_R(x_0)} |D^2 u|^2. \end{aligned}$$

Risulta così provato che

$$\int_{B_r(x_0)} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \leq \tag{5.12}$$
$$c(\nu_0, M_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R(x_0)} |D^2u - (D^2u)_R|^2 + \int_{B_R(x_0)} |f - f_R|^2 \right.$$
$$\left. +\omega^2(R)\int_{B_R(x_0)} |D^2u|^2\right)$$

5.4 Stime di Schauder in $\mathbb{R}^N$. Risolubilità

Sia A l'operatore differenziale del secondo ordine

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D^iu(x) + c(x)u(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

con $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, per $\alpha \in (0,1)$ e

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu_0|\xi|^2, \qquad x,\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

dove $\nu_0 > 0$. Indichiamo con $k_0 = \max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha\}$.

Teorema 5.4.1 (Stime di Schauder in $\mathbb{R}^N$) *Esiste $c = c(\nu_0, k_0, \alpha) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)([Au]_\alpha + \|u\|_\infty). \tag{5.13}$$

DIM. Supponiamo dapprima $b_i \equiv c \equiv 0$. Posto $Au = f$, applichiamo la stima (5.12) ad una palla arbitraria $B_R(x_0)$ tenendo conto che $\omega(R) \leq [a_{ij}]_\alpha R^\alpha$ per qualche i, j, e otteniamo così

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x_0)} |D^2u - (D^2u)_r|^2 &\leq c(\nu_0, k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R(x_0)} |D^2u - (D^2u)_R|^2\right. \\ &\quad \left. + \int_{B_R(x_0)} |f - f_R|^2 + R^{2\alpha}\int_{B_R(x_0)} |D^2u|^2\right) \\ &\leq c(\nu_0, k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}[D^2u]_\alpha^2 R^{2\alpha+N} + [f]_\alpha^2 R^{2\alpha+N}\right. \\ &\quad \left. +\|D^2u\|_\infty R^{2\alpha+N}\right), \qquad \forall\, r < R.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Dalla disuguaglianza precedente con $R = pr$, $p > 1$ si ottiene

$$\int_{B_r(x_0)} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \leq c(\nu_0, k_0) r^{N+2\alpha}\big(p^{2\alpha-2}[D^2u]^2_\alpha + p^{N+2\alpha}[f]^2_\alpha + \|D^2u\|^2_\infty p^{N+2\alpha}\big)$$

e quindi

$$\frac{1}{r^{N+2\alpha}} \int_{B_r(x_0)} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \leq c(\nu_0, k_0) \left(p^{2\alpha-2}[D^2u]^2_\alpha + p^{N+2\alpha}[f]^2_\alpha + \|D^2u\|^2_\infty p^{N+2\alpha}\right).$$

Prendendo ora l'estremo superiore su tutti gli $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e usando il Teorema 4.3.4 otteniamo

$$[D^2u]^2_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left(p^{2\alpha-2}[D^2u]^2_\alpha + p^{N+2\alpha}[f]^2_\alpha + \|D^2u\|^2_\infty p^{N+2\alpha}\right).$$

Scegliendo p grande abbastanza affinchè $c(\nu_0, k_0, \alpha)p^{2\alpha-2} = \frac{1}{2}$ abbiamo infine

$$[D^2u]^2_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([f]^2_\alpha + \|D^2u\|^2_\infty\right).$$

Veniamo al caso generale in cui b_i, c_i non sono necessariamente nulli. Applicando l'ultima stima ottenuta all'operatore $A_0u = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}u$ si ha

$$\begin{aligned} [D^2u]_\alpha &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([A_0u]_\alpha + \|D^2u\|_\infty\right) \\ &= c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([Au - \sum_{i=1}^N b_iD_iu - cu]_\alpha + \|D^2u\|_\infty\right) \\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([Au]_\alpha + \|u\|_{1,\alpha} + \|D^2u\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Ricordando la stima interpolativa $\|\cdot\|_2 \leq \varepsilon\|\cdot\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|\cdot\|_\infty$ (vedi Corollario 4.2.5), otteniamo

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha} &= \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|D^2u\|_\infty + [D^2u]_\alpha \\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left([Au]_\alpha + \|u\|_{2,0}\right) \\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left([Au]_\alpha + \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Per avere la tesi, basta ora scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $c(\nu_0, k_0, \alpha)\varepsilon = \frac{1}{2}$, così che risulta

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)([Au]_\alpha + \|u\|_\infty).$$

□

Al fine di applicare il metodo di continuità, come anticipato, è necessario eliminare il termine $\|u\|_\infty$ dalla stima (5.13). Ciò è possibile a patto di richiedere una restrizione sul segno del coefficiente di ordine zero. In tal caso, infatti, vale il principio del massimo 3.1.10.

Corollario 5.4.2 *Siano $c \le 0$ e $\lambda > 0$. Allora esiste $c = c(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ si ha*

$$\|u\|_{2,\alpha} \le c(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\|(\lambda - A)u\|_\alpha. \tag{5.15}$$

DIM. Applicando la stima (5.13) e le stime interpolative del Corollario 4.2.5 risulta

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\alpha} &\le c(\nu_0, k_0, \alpha)\,(\|Au\|_\alpha + \|u\|_\infty)\\
&\le c(\nu_0, k_0, \alpha)\,(\|(\lambda - A)u\|_\alpha + \lambda\|u\|_\alpha + \|u\|_\infty)\\
&\le c(\nu_0, k_0, \alpha)\,(\|(\lambda - A)u\|_\alpha + \lambda\varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + \lambda c_\varepsilon\|u\|_\infty + \|u\|_\infty)
\end{aligned}$$

per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$. Scegliamo ε tale che $\lambda\,\varepsilon\, c(\nu_0, k_0, \alpha) = \frac{1}{2}$, raccogliamo a primo membro e per la Proposizione 3.1.10 otteniamo

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\alpha} &\le c(\nu_0, k_0, \lambda, \alpha)\,(\|(\lambda - A)u\|_\alpha + \|u\|_\infty)\\
&\le c(\nu_0, k_0, \lambda, \alpha)\left(\|(\lambda - A)u\|_\alpha + \frac{1}{\lambda}\|(\lambda - A)u\|_\infty\right)\\
&\le c(\nu_0, k_0, \lambda, \alpha)\|(\lambda - A)u\|_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Per applicare il metodo di continuità occorre ora provare la suriettività di un operatore modello. Nel teorema seguente si vede che tale operatore è dato da $\lambda - \Delta$. Osserviamo che la scelta di Δ non è utile poichè l'equazione $\Delta u = f$ con $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ non ammette soluzioni limitate in $\mathbb{R}^N$. Basti pensare per esempio al caso unidimensionale $u'' = 1$.

Teorema 5.4.3 *Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $(\lambda - \Delta)u = f$, $\lambda > 0$.*

DIM. L'unicità segue dal Corollario 3.1.12. Proviamo l'esistenza.

Supponiamo dapprima $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Applicando la trasformata di Fourier all'equazione otteniamo

$$\lambda\hat{u}(\xi) + |\xi|^2\hat{u} = \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

dove $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è la classe di Schwartz. Ne segue che $\hat{u} = \frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Quindi esiste $u = (\hat{u})^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che $(\lambda - \Delta)u = f$.

Sia ora $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ con supp$f \subset B_R(0)$. Fissiamo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}^N}\phi = 1$, supp$\,\phi \subset B_1(0)$. Posto $f_\varepsilon = \phi_\varepsilon * f$, risulta che $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $f_\varepsilon \to f$ uniformemente in $\mathbb{R}^N$. Inoltre è facile verificare che

$$[f_\varepsilon]_\alpha \le [f]_\alpha, \qquad \|f_\varepsilon\|_\infty \le \|f\|_\infty.$$

Per ogni ε sia $u_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ soluzione di $(\lambda - \Delta)u_\varepsilon = f_\varepsilon$. Applicando il Corollario 5.4.2 vale

$$\|u_\varepsilon\|_{2,\alpha} \le c(\alpha, \lambda)\|f_\varepsilon\|_\alpha \le c(\alpha, \lambda)\|f\|_\alpha.$$

Prendendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, si ha

$$\|u_n\|_{2,\alpha} \leq c(\alpha, \lambda)\|f\|_\alpha. \tag{5.16}$$

Applicando il Teorema di Ascoli-Arzelà (vedi Esercizio 4.1.19) si trovano una sottosuccessione $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ ed una funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tali che u_{n_k} converge a u uniformemente sui compatti fino alle derivate seconde. Passando al limite per $k \to \infty$ nella stima (5.16) si vede che

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\alpha, \lambda)\|f\|_\alpha$$

per cui di fatto $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. A questo punto, passando puntualmente al limite per $k \to \infty$ nell'equazione $(\lambda - \Delta)u_{n_k}(x) = f_{n_k}(x)$ otteniamo che $(\lambda - \Delta)u(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, cioè u è soluzione.

Sia $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Fissiamo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi \equiv 1$ in $B_1(0)$ e supp$\phi \subset B_2(0)$. Poniamo $f_n(x) = f(x)\phi\left(\frac{x}{n}\right) = f(x)\phi_n(x)$. Allora

$$\begin{gathered} f_n(x) \to f(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \\ \text{supp} f_n \subset B_{2n}(0) \\ \|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \\ [f_n]_\alpha \leq \|f\|_\infty [\phi_n]_\alpha + [f]_\alpha \|\phi_n\|_\infty \leq C\,\|f\|_\alpha \end{gathered}$$

poichè $[\phi_n]_\alpha \leq n^{-\alpha}[\phi]_\alpha \leq [\phi]_\alpha$.

Per ogni n, sia $u_n \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $(\lambda - \Delta)u_n = f_n$. Per le stime di Schauder risulta $\|u_n\|_{2,\alpha} \leq c(\alpha, \lambda)\|f_n\|_\alpha \leq c(\alpha, \lambda)\|f\|_\alpha$. A questo punto, la conclusione segue applicando lo stesso argomento di compattezza di prima. □

Arriviamo finalmente al teorema di esistenza per un operatore arbitrario.

Teorema 5.4.4 (Esistenza) *Supponiamo $c \leq 0$, $\lambda > 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\lambda u - Au = f$.*

DIM. Con la notazione del Teorema 5.1.3, poniamo

$$\begin{aligned} &L_0 = \lambda - \Delta, \quad L_1 = \lambda - A \\ &L_t = (1-t)(\lambda - \Delta) + t(\lambda - A) = \lambda - [(1-t)\Delta + tA]. \end{aligned}$$

Applicando il Corollario 5.4.2 per l'operatore $A_t = (1-t)\Delta + tA$ si ha

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c\,\|L_t u\|_\alpha, \quad u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$$

con c indipendente da t (cf Teorema 5.1.4). I Teoremi 5.4.3 e 5.1.3 implicano la tesi. □

Definiamo $u = (\lambda - A)^{-1} f = R(\lambda, A) f$ per $\lambda > 0$ e $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$(\lambda - A)^{-1} : C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \to C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N).$$

La stima del Corollario 5.4.2 implica che

$$\|(\lambda - A)^{-1} f\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\|f\|_\alpha$$

da cui segue

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{C^{0,\alpha} \hookrightarrow C^{2,\alpha}} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda).$$

Nella proposizione che segue rendiamo esplicita la dipendenza da λ.

Proposizione 5.4.5 *Supponiamo che $c \leq 0$ e $\lambda > 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ risulta*

(i) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}$;

(ii) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_\alpha \qquad (\lambda \geq 1).$

DIM. (i) è stato già provato nella Proposizione 3.1.10. Per provare (ii), usiamo le stime di Schauder del Corollario 5.4.2 con $\lambda = 1$ e otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\|u - Au\|_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda_0 u - Au\|_\alpha + \lambda_0\|u\|_\alpha\right)$$

con $\lambda \geq 1$. Siccome $\|u\|_\alpha \leq c(\alpha)\|u\|_{2,\alpha}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\|u\|_\infty^{\frac{2}{2+\alpha}}$ (Teorema 4.2.3) risulta

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha} &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda\|u\|_{2,\alpha}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\,\varepsilon\,\|u\|_\infty^{\frac{2}{2+\alpha}}\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (5.17)\\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda\|u\|_{2,\alpha}\,\varepsilon^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} + \lambda\|u\|_\infty\varepsilon^{-\frac{2+\alpha}{2}}\right). \end{aligned}$$

Scegliendo $\varepsilon = \eta^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}\lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha+2}}$, l'ultimo membro della disuguaglianza precedente diventa

$$c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \eta\|u\|_{2,\alpha} + \|u\|_\infty c(\eta)\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Prendiamo η in modo che $\eta\, c(\nu_0, k_0, \alpha) = \frac{1}{2}$ e raccogliendo tutto a primo membro otteniamo

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha} &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda^{\frac{2+\alpha}{2}}\|u\|_\infty\right)\\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda^{\frac{\alpha}{2}}\|\lambda u - Au\|_\infty\right)\\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{2}}\|\lambda u - Au\|_\alpha, \end{aligned}$$

avendo applicato anche la Proposizione 3.1.10. □

Corollario 5.4.6 *Sia $r \le 2+\alpha$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ risulta $\|(\lambda - A)^{-1}f\|_r \le c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|f\|_\alpha$, $\lambda \ge 1$. In particolare*

$$\|(\lambda - A)^{-1}f\|_\alpha \le c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\|f\|_\alpha \qquad (r=\alpha)$$

$$\|(\lambda - A)^{-1}f\|_{1+\alpha} \le c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f\|_\alpha \qquad (r=1+\alpha)$$

DIM. Poichè $C^r(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{r}{2+\alpha}}(C_b(\mathbb{R}^N), C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N))$ dal Teorema 4.2.3, si ha che

$$\|(\lambda - A)^{-1}f\|_r \le c\left(\|(\lambda - A)^{-1}f\|_{2+\alpha}^{\frac{r}{2+\alpha}}\|(\lambda - A)^{-1}f\|_\infty^{1-\frac{r}{2+\alpha}}\right)$$

e applicando la proposizione precedente possiamo ancora maggiorare con

$$c\left(\|f\|_\alpha \lambda^{\frac{\alpha}{2}\frac{r}{2+\alpha}}\lambda^{-\frac{2+\alpha-r}{2+\alpha}}\right) = c\|f\|_\alpha \lambda^{\frac{r}{2}-1}$$

□

5.5 STIME DI SCHAUDER IN $\mathbb{R}^N_+$

Stabiliamo la notazione che useremo nel corso di tutta questa sezione.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^N : x_N > 0\}\\
&T = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\} = \partial\mathbb{R}^N_+ \equiv \mathbb{R}^{N-1}\\
&C^{0,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+) = \{u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) : u(x', 0) = 0 \ , x' \in \mathbb{R}^{N-1}\}\\
&C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+) = \{u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) : u \in C^{0,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)\}\\
&B^+_R(x_0) = \{x \in B_R(x_0) : x_N > 0\} \qquad x_0 \in \mathbb{R}^{N-1},\ R > 0.
\end{aligned}$$

Infine, ricordiamo che avevamo indicato con $H^1_T(B^+_R)$ la chiusura nella norma H^1 delle funzioni $u \in C^\infty(\overline{B}^+_R)$ nulle in in intorno di $T \cap \overline{B}^+_R$ (cioè nulle solo vicino al bordo piatto di $\overline{B^+_R}$) (Definizione 2.2.18).

Anche nel caso del semispazio, seguiremo il seguente programma:

- provare stime di Schauder in $C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$ (prescrivendo quindi dei valori al bordo);

- provare l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet per l'operatore $\lambda - \Delta$;

- dedurre mediante il metodo di continuità l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet per un operatore qualunque.

Come al solito, l'operatore che prendiamo in considerazione è il seguente

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i u + cu$$

con $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, $\nu_0 > 0$ costante di ellitticità. Supponiamo che tutti i coefficienti abbiano norma limitata da una certa costante $k_0 > 0$.

Il nostro obiettivo è il seguente teorema.

Teorema 5.5.1 (Stime di Schauder in $\mathbb{R}^N_+$) *Esiste una costante $C > 0$ che dipende da ν_0 e k_0 tale che per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \le C\left([Au]_\alpha + \|u\|_\infty\right). \tag{5.18}$$

Prima di dimostrare il teorema appena enunciato, vediamo quando nella stima (5.18) si può eliminare il termine $\|u\|_\infty$ per avere le stime che servono per far funzionare il metodo di continuità. Anche in questo caso occorre un principio del massimo.

Corollario 5.5.2 *Se $c \le 0$ e $\lambda > 0$ allora esiste una costante $C = C(\nu_0, k_0, \lambda) > 0$ tale che per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ vale*

$$\|u\|_{2,\alpha} \le C\|(\lambda - A)u\|_\alpha.$$

DIM. Per il Teorema 5.5.1, se $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, si ha

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha} &\le c(\nu_0, k_0)\left([Au]_\alpha + \|u\|_\infty\right) \\ &\le c(\nu_0, k_0)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda\|u\|_\alpha + \|u\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Usiamo ora la stima interpolativa $\lambda\|u\|_\alpha \le \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty$ con ε tale che $\varepsilon c(\nu_0, k_0) = \frac{1}{2}$, e otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha} \le c(\nu_0, k_0, \lambda)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \|u\|_\infty\right).$$

Da qui concludiamo grazie al Teorema 3.1.13. □

Affrontiamo il secondo punto del nostro programma.

Teorema 5.5.3 *Sia $\lambda > 0$. Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ esiste un'unica $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $\lambda u - \Delta u = f$.*

DIM. L'unicità discende come sempre dal principio del massimo 3.1.13.

Supponiamo $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Siccome in particolare $f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ possiamo ricondurci alla teoria L^2 del secondo capitolo. La forma quadratica associata all'operatore $\lambda - \Delta$ è

$$a(u, v) = \lambda \int_{\mathbb{R}^N_+} uv + \int_{\mathbb{R}^N_+} \nabla u \nabla v.$$

Risulta

$$a(u,u) = \lambda \int_{\mathbb{R}^N_+} u^2 + \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^2,$$

sicchè a è coerciva su $H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$. Per il Teorema di Lax-Milgram esiste un'unica $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $\lambda u - \Delta u = f$. Data la regolarità di f, $u \in C^\infty_b(\mathbb{R}^N_+)$ (vedi Corollario 2.2.14), e quindi in particolare $u \in C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$.

Prendiamo ora $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ con supp$f \subset B^+_R$. Estendiamo f ad una funzione pari in $\mathbb{R}^N$, definendo

$$\tilde{f}(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{se } x_N \geq 0 \\ f(x', -x_N) & \text{se } x_N < 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $\|\tilde{f}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq 2\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)}$. Regolarizziamo $\tilde{f}$, prendendo come funzioni approssimanti $f_\varepsilon = \tilde{f} * \phi_\varepsilon$, dove (ϕ_ε) è una successione di mollificatori. Allora $f_\varepsilon \to \tilde{f}$ uniformemente in $\mathbb{R}^N$ e

$$\|f_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\tilde{f}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq 2\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, sia $u_\varepsilon \in C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} \lambda u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u_\varepsilon = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases} \tag{5.19}$$

costruita al passo precedente. Il Corollario 5.5.2 implica

$$\|u_\varepsilon\|_{2,\alpha} \leq c(\lambda)\|f_\varepsilon\|_\alpha \leq c(\lambda)\|f\|_\alpha. \tag{5.20}$$

Discretizzando ε e usando il Teorema di Ascoli-Arzelà si trovano una successione (u_n) ed una funzione u tale che $u_n \to u$ uniformemente sui compatti di $\overline{\mathbb{R}}^N_+$ insieme alle derivate prime e seconde. Passando al limite prima nella disuguaglianza (5.20) e poi nel problema (5.19) si ha rispettivamente che $\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\lambda)\|f\|_\alpha$, per cui $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, e

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Infine, se $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, consideriamo la successione $f_n(x) = f(x)\phi\left(\frac{x}{n}\right)$, dove $\phi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$, supp$\phi \subset B_2(0)$, $\phi \equiv 1$ su $B_1(0)$, $0 \leq \phi \leq 1$. Osservando che $\|f_n\|_\alpha \leq c\|f\|_\alpha$, c indipendente da n, risolviamo il problema di Dirichlet relativo ad ogni f_n. Dalla successione delle soluzioni, con lo stesso argomento di compattezza visto prima, estraiamo una sottosuccessione che converge alla soluzione del problema relativo a f in $\mathbb{R}^N_+$. $\square$

Parallelamente al caso di $\mathbb{R}^N$ deduciamo a questo punto la risolubilità del problema di Dirichlet per un operatore qualunque e le stime sul risolvente. Le dimostrazioni sono le stesse.

Teorema 5.5.4 *Supponiamo $c \le 0$ e $\lambda > 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ esiste un'unica $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $\lambda u - Au = f$.*

Proposizione 5.5.5 *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente valgono le seguenti stime*

(i) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_\infty \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_\alpha$

(ii) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_{2,\alpha} \le c(\nu_0, k_0)\lambda^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_\alpha, \qquad \lambda \ge 1$

(iii) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_r \le c(\nu_0, k_0)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|f\|_\alpha \qquad \lambda \ge 1,\ 0 \le r \le 2+\alpha,$

per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$.

Rimangono da provare le stime di Schauder. Per questo, ripercorriamo con le dovute modifiche le tappe del caso $\mathbb{R}^N$ andando a considerare dapprima un operatore puro del secondo ordine a coefficienti costanti, poi variabili fino a prendere un operatore completo.

Osservazione 5.5.6 Se Ω è un aperto di classe C^1 e $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $1 \le p < \infty$, sono equivalenti

(i) $u = 0$ su $\partial\Omega$;

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(cioè per funzioni continue l'appartenenza a $W_0^{1,p}(\Omega)$ si traduce nell'annullamento in senso classico su $\partial\Omega$).

Consideriamo l'operatore

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u$$

con le ipotesi

$$a_{ij} \in \mathbb{R},\ |a_{ij}| \le M_0,\ \nu_0 > 0.$$

Supponiamo che $u \in H^1_T(B_R^+)$ sia soluzione debole dell'equazione $Au = 0$, cioè

$$\int_{B_R^+} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j \phi = 0, \qquad \forall \phi \in H^1_0(B_R^+).$$

Allora per il Corollario 2.2.25 $u \in C^\infty(\overline{B}_r^+)$ per ogni $r < R$, e quindi, per l'Osservazione 5.5.6, $u(x', 0) = 0$. Anche per le derivate tangenziali $(i = 1, \ldots N-1)$ risulta

$$D_i u(x', 0) = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Inoltre, per ogni multiindice α vale

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}(D^\alpha u) = 0.$$

Rispetto al caso $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^N_+$ abbiamo una complicazione poichè, derivando, l'equazione continua ad essere soddisfatta mentre la condizione al bordo viene preservata solo dalle derivate tangenziali. Per superare questa difficoltà, come già visto per la regolarità L^2, otterremo per le derivate tangenziali le stime necessarie e per quella normale useremo l'equazione.

Teorema 5.5.7 (Disuguaglianza di Caccioppoli) *Sia $u \in H^1_T(B^+_R)$ soluzione debole dell'equazione $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = 0$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0)$ tale che per ogni $r < R$*

$$\int_{B_r^+} |\nabla u|^2 \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B_R^+} |u|^2. \tag{5.21}$$

DIM. Sia $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ su B_r e $|\nabla\eta| \leq \frac{L}{R-r}$. Per ipotesi $\int_{B_R^+} \sum_{i,j}^N a_{ij} D_i u D_j \phi = 0$ per ogni $\phi \in H^1_0(B^+_R)$. Scegliendo $\phi = \eta^2 u \in H^1_0(B^+_R)$ (perchè $u \in H^1_T(B^+_R)$), otteniamo

$$0 = \int_{B_R^+} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_i u (\eta^2 D_j u + 2\eta u D_j \eta)$$

da cui

$$\int_{B_R^+} \eta^2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_i u D_j u = -2 \int_{B_R^+} \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}\, \eta\, D_i u)(D_j \eta\, u).$$

Per l'uniforme ellitticità dell'operatore e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz risulta poi

$$\nu_0 \int_{B_R^+} \eta^2 |\nabla u|^2 \leq c(M_0) \left(\int_{B_R^+} |\nabla u|^2 \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R^+} |\nabla \eta|^2 u^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\nu_0 \left(\int_{B_R^+} \eta^2 |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c(M_0) L}{R-r} \left(\int_{B_R^+} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

da cui segue la tesi ricordando che $\eta \equiv 1$ su B_r. □

Nel caso di $\mathbb{R}^N$ per iterare la disuguaglianza di Caccioppoli bastava applicare l'analoga di (5.21) alle derivate superiori di u. Qui, come già detto, le derivate superiori in generale soddisfano la stessa equazione soddisfatta da u ma non la condizione al bordo.

Lemma 5.5.8 *Sia $u \in H^1_T(B^+_R)$ soluzione di $Au = 0$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0, k)$ tale che per ogni $r < R$*

$$\int_{B^+_r} |D^k u|^2 \le \frac{c}{(R-r)^{2k}} \int_{B^+_R} |u|^2. \tag{5.22}$$

DIM. Procediamo per induzione su k. Il caso $k = 1$ è la disuguaglianza di Caccioppoli provata nel teorema precedente. Supponiamo la tesi vera per k e proviamo che vale per $k+1$. Fissiamo $i \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$ e consideriamo la derivata tangenziale $D_i u$. Allora

$$A(D_i u) = 0 \qquad e \qquad D_i u \in H^1_T(B^+_{R'}) \quad R' < R.$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a $D_i u$ e la disuguaglianza di Caccioppoli a u e otteniamo

$$\int_{B^+_r} |D^k D_i u|^2 \le \frac{c(\nu_0, M_0, k)}{(R-r)^{2k}} \int_{B^+_{\frac{R+r}{2}}} |D_i u|^2 \le \frac{c(\nu_0, M_0, k)}{(R-r)^{2(k+1)}} \int_{B^+_R} |u|^2$$

con $1 \le k \le N, 1 \le i \le N-1$. L'unica derivata che rimane da stimare è D^{k+1}_N (derivata di ordine $k+1$ unicamente rispetto all'ultima variabile). Deriviamo $k-1$ volte rispetto x_N l'equazione $Au = 0$ e abbiamo

$$D^{k+1}_N u = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{(i,j) \ne (N,N)} a_{ij} D_{ij}(D^{k-1}_N u),$$

da cui concludiamo, dato che tutte le derivate che compaiono a secondo membro sono state già stimate. □

Osservazione 5.5.9 Nella notazione del Lemma 5.5.8, se $k > \frac{N}{2}$, grazie alle immersioni di Sobolev si ha

$$\|D^2 u\|_{L^\infty(B^+_r)} \le c(r) \|D^2 u\|_{H^k(B^+_r)} \le C(\nu_0, M_0, k, r, R) \|u\|_{L^2(B^+_R)} \tag{5.23}$$

per ogni $r < R$.

Il seguente lemma è simile alla disuguaglianza di Poincarè.

Lemma 5.5.10 *Sia $u \in H^1_T(B^+_R)$. Allora*

$$\int_{B^+_R} |u|^2 \le R^2 \int_{B^+_R} |D_N u|^2.$$

DIM. Per densità, basta dimostrare la tesi per $u \in C^1(\overline{B_R^+})$ tale che $u(x', 0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo scrivere

$$u(x', x_N) - u(x', 0) = \int_0^{x_N} D_N u(x', s)ds,$$

e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|u(x', x_N)|^2 \le x_N \int_0^{x_N} |D_N u(x', s)|^2 ds \le R \int_0^{\sqrt{R^2 - |x'|^2}} |D_N u(x', s)|^2 ds.$$

Integrando tra 0 e $\sqrt{R^2 - |x'|^2}$ rispetto a x_N si ha

$$\int_0^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} |u(x', x_N)|^2 dx_N \le R^2 \int_0^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} |D_N u(x', s)|^2 ds.$$

Integrando quindi su $|x'| \le R$ otteniamo

$$\int_{|x'|\le R} dx' \int_0^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} |u(x', x_N)|^2 dx_N \le$$
$$R^2 \int_{|x'|\le R} dx' \int_0^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} |D_N u(x', s)|^2 ds$$

cioè, per il Teorema di Fubini

$$\int_{B_R^+} |u|^2 \le R^2 \int_{B_R^+} |D_N u|^2$$

che è proprio la tesi. □

L'importanza dei teoremi che stiamo provando non riguarda la regolarità delle soluzioni, perchè per equazioni a coefficienti costanti abbiamo a disposizione la teoria variazionale, che risponde completamente al problema. Ci occorrono invece stime esplicite che estenderemo poi alle equazioni a coefficienti non costanti, per le quali l'approccio variazionale non è possibile sotto le ipotesi assunte.

Teorema 5.5.11 *Sia $u \in H^2(B_R^+) \cap H^1_T(B_R^+)$ soluzione di $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = 0$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0) > 0$ tale che per ogni $r < R$*

$$\int_{B_r^+} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 \le c \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R^+} |D^2 u - \lambda|^2 \tag{5.24}$$

per ogni matrice $\lambda = (\lambda_{ij})$, dove $(D^2 u)$ indica la matrice Hessiana di u.

DIM. Prendiamo $R = 1$, $r \leq \frac{1}{2}$. Consideriamo dapprima derivate tangenziali, quindi sia $j \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$. Definiamo

$$v = D_j u - x_N \lambda_{jN} \ \in H^1_T(B^+_R).$$

Vale che

$$\begin{aligned} D_i v &= D_{ij} u \quad \text{se } i < N \\ D_N v &= D_{jN} u - \lambda_{jN} \\ D_{hi} v &= D_{hi}(D_j u). \end{aligned}$$

Pertanto $Av = 0$ e inoltre

$$D_i v - (D_i v)_r = D_{ij} u - (D_{ij} u)_r.$$

Applicando a v nell'ordine la disuguaglianza di Poincarè, la stima (5.23) e il Lemma 5.5.10 otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{B^+_r} |\nabla v - (\nabla v)_r|^2 &\leq c\, r^2 \int_{B^+_r} |D^2 v|^2 \leq c\, r^{2+N} \sup_{B^+_r} |D^2 v|^2 \\ &\leq c(\nu_0, M_0) r^{2+N} \int_{B^+_{\frac{1}{2}}} |v|^2 \\ &\leq c(\nu_0, M_0) r^{N+2} \int_{B^+_1} |D_N v|^2. \end{aligned}$$

Riscrivendo tale disuguaglianza in termini di u abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B^+_r} |D_{ij} u - (D_{ij} u)_r|^2 &\leq c(\nu_0, M_0) r^{N+2} \int_{B^+_1} |D_{jN} u - \lambda_{jN}|^2 \\ &\leq c(\nu_0, M_0) r^{N+2} \int_{B^+_1} |D^2 u - \lambda|^2 \end{aligned} \tag{5.25}$$

per $j < N$, $1 \leq i \leq N$. Rimane ancora una volta da stimare $D_{NN} u$. Dall'equazione $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = 0$ ricaviamo

$$\begin{aligned} D_{NN} u &= -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{(i,j) \neq (N,N)} a_{ij} D_{ij} u, \\ (D_{NN} u)_r &= -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{(i,j) \neq (N,N)} a_{ij} (D_{ij} u)_r \end{aligned}$$

e quindi

$$D_{NN} u - (D_{NN} u)_r = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{(i,j) \neq (N,N)} a_{ij} \left(D_{ij} u - (D_{ij} u)_r \right).$$

Usando (5.25), otteniamo

$$\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \le c(\nu_0, M_0) r^{N+2} \int_{B_1^+} |D^2u - \lambda|^2$$

così la tesi è completamente provata se $r \le \frac{1}{2}$ e $R = 1$.

Se $r \ge \frac{1}{2}$ ed $R = 1$ risulta

$$\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \le \int_{B_r^+} |D^2u - \lambda|^2 \le 2^{N+2} r^{N+2} \int_{B_R^+} |D^2u - \lambda|^2.$$

Per avere la tesi nel caso generale ricorriamo come sempre a un cambiamento di variabili: poniamo $v(x) = u(Rx)$ per $|x| \le 1$, applichiamo la disuguaglianza appena dimostrata alla funzione v con $r' = \frac{r}{R}$ e infine cambiamo di nuovo variabile. □

Osservazione 5.5.12 Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f & \text{in } B_R^+ \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R^+ \end{cases}$$

con $f \in L^2(B_R^+)$.

Sappiamo che il metodo variazionale fornisce un'unica soluzione $u \in H^2(B_R^+) \cap H_0^1(B_R^+)$ per la quale vale la stima

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(B_R^+)} &\le c(\nu_0, M_0, R) \left(\|f\|_{L^2(B_R^+)} + \|u\|_{H^1(B_R^+)} \right) \\ &\le c(\nu_0, M_0, R) \|f\|_{L^2(B_R^+)}. \end{aligned}$$

In particolare

$$\|D^2u\|_{L^2(B_R^+)} \le c(\nu_0, M_0, R) \|f\|_{L^2(B_R^+)}. \tag{5.26}$$

Con la stessa dimostrazione del caso dell'intera palla (vedi (5.8)), si prova che nella (5.26) la costante c non dipende da R.

Passiamo a considerare il problema non omogeneo.

Teorema 5.5.13 *Sia $u \in H^2(B_R^+) \cap H_T^1(B_R^+)$ soluzione dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f,$$

con $f \in L^2(B_R^+)$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0) > 0$ tale che per ogni $r < R$

$$\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \le c \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R^+} |D^2u - (D^2u)_R|^2 + \int_{B_R^+} |f - f_R|^2 \right). \tag{5.27}$$

DIM. Introduciamo la funzione ausiliaria $z(x) = u(x) - \frac{x_N^2}{2a_{NN}} f_R \in H^2(B_R^+) \cap H^1_T(B_R^+)$. Risulta

$$\begin{aligned} D_{ij}z &= D_{ij}u \quad (i,j) \neq (N,N), \\ D_{NN}z &= D_{NN}u - \tfrac{f_R}{a_{NN}} \end{aligned}$$

e quindi

$$D_{ij}z - (D_{ij}z)_r = D_{ij}u - (D_{ij}u)_r$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}z &= \sum_{(i,j)\neq(N,N)} a_{ij}D_{ij}u + a_{NN}D_{NN}u - a_{NN}\frac{f_R}{a_{NN}} \\ &= \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}u - f_R = f - f_R. \end{aligned}$$

Scriviamo $z = v + w$ dove $w \in H^2(B_R^+) \cap H^1_0(B_R^+)$ è la soluzione variazionale dell'equazione $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}w = f - f_R$ e $v = z - w \in H^2(B_R^+) \cap H^1_T(B_R^+)$ per differenza risolve l'equazione omogenea. Sappiamo, per l'Osservazione 5.5.12, che

$$\|D^2w\|_{L^2(B_R^+)} \leq c(\nu_0, M_0)\|f - f_R\|_{L^2(B_R^+)}$$

e per il Teorema 5.5.11 che

$$\int_{B_r^+} |D^2v - (D^2v)_r|^2 \leq c(\nu_0, M_0)\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R^+} |D^2v - (D^2v)_R|^2.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_{B_r^+} |D^2w - (D^2w)_r|^2 &\leq \int_{B_r^+} |D^2w|^2 \leq \int_{B_R^+} |D^2w|^2 \\ &\leq c(\nu_0, M_0)\int_{B_R^+} |f - f_R|^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |D^2v - (D^2v)_R|^2 &\leq 2|D^2z - (D^2z)_R|^2 + 2|D^2w - (D^2w)_R|^2 \\ &= 2|D^2u - (D^2u)_R|^2 + 2|D^2w - (D^2w)_R|^2. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 &= \int_{B_r^+} |D^2z - (D^2z)_r|^2 \\
&= \int_{B_r^+} |D^2v - (D^2v)_r + D^2w - (D^2w)_r|^2 \\
&\leq 2\int_{B_r^+} |D^2v - (D^2v)_r|^2 + 2\int_{B_r^+} |D^2w - (D^2w)_r|^2 \\
&\leq c(\nu_0, M_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R^+} |D^2u - (D^2u)_R|^2\right. \\
&\qquad \left. + \int_{B_R^+} |f - f_R|^2\right).
\end{aligned}$$

□

Passiamo a considerare adesso il caso dei coefficienti variabili. Supponiamo che i coefficienti a_{ij} del nostro operatore siano funzioni uniformemente continue e poniamo $\omega(\delta) = \max_{i,j}\omega(a_{ij},\delta)$, $M_0 = \max_{i,j}\|a_{ij}\|_\infty$. Sia $u \in H^2(B_R^+) \cap H_T^1(B_R^+)$ tale che

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = f.$$

Consideriamo la semipalla B_R^+ centrata nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$. Possiamo allora scrivere

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0) D_{ij} u = f + \sum_{i,j=1}^N \left(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\right) D_{ij} u := F$$

e applicando la disuguaglianza (5.27) otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 &\leq c(\nu_0, M_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R^+} |D^2u - (D^2u)_R|^2\right. \\
&\qquad \left. + \int_{B_R^+} |F - F_R|^2\right).
\end{aligned}$$

Siccome

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^+} |F - F_R|^2 &\leq \int_{B_R^+} |F - f_R|^2 \\
&\leq 2\int_{B_R^+} |f - f_R|^2 + 2\int_{B_R^+} \left|\sum_{i,j=1}^N \left(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\right) D_{ij} u\right|^2 \\
&\leq 2\int_{B_R^+} |f - f_R|^2 + 2\,\omega^2(R)\int_{B_R^+} |D^2u|^2
\end{aligned}$$

otteniamo in definitiva

$$\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \leq c(\nu_0, M_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R^+}|D^2u-(D^2u)_R|^2 + \int_{B_R^+}|f-f_R|^2 + \omega^2(R)\int_{B_R^+}|D^2u|^2\right). \tag{5.28}$$

Abbiamo a questo punto tutti gli strumenti per dimostrare il Teorema 5.5.1. Prendiamo dunque un operatore completo

$$A = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij} + \sum_{i=1}^N b_i D_i + c$$

con coefficienti α-hölderiani in $\mathbb{R}^N$ $(0 < \alpha < 1)$. Siano ν_0 la costante di ellitticità e k_0 tale che

$$\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \leq k_0.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 5.5.1.
Supponiamo dapprima $b_i \equiv c \equiv 0$.

Sia $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$. Il nostro obiettivo è provare una stima del tipo

$$\int_{\Omega(x_0,r)} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \leq c\, r^{N+2\alpha}([Au]_\alpha + \|u\|_\infty)$$

(usando la caratterizzazione integrale delle funzioni hölderiane) dove

$$\Omega(x_0, r) = B_r(x_0) \cap \mathbb{R}^N_+.$$

Sia $r < R$, sicchè $\Omega(x_0, r) \subset \Omega(x_0, R)$. Esaminiamo separatamente vari casi.

Primo caso: $x_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$.

In queste ipotesi $\Omega(x_0, r) = B_r^+(x_0)$ e possiamo applicare la stima (5.28). Allora

$$\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \leq c(\nu_0, k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}[D^2u]_\alpha^2 R^{N+2\alpha} + [f]_\alpha^2 R^{N+2\alpha} + \|D^2u\|_\infty^2 R^{N+2\alpha}\right),$$

dove

$$f = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}u.$$

Secondo caso: $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^N_+$.

Questa volta $\Omega(x_0,r)=B_r$ e per la stima (5.12) risulta

$$\begin{aligned}\int_{B_r}|D^2u-(D^2u)_r|^2 &\leq c(\nu_0,k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|D^2u-(D^2u)_R|^2\right.\\ &\quad\left.+\int_{B_R}|f-f_R|^2+\omega^2(R)\int_{B_R}|D^2u|^2\right)\\ &\leq c(\nu_0,k_0)\Big(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}[D^2u]^2_\alpha R^{N+2\alpha}+[f]^2_\alpha R^{N+2\alpha}\\ &\quad+\|D^2u\|^2_\infty R^{N+2\alpha}\Big)\,. \qquad (5.29)\end{aligned}$$

Terzo caso: $B_R(x_0)\not\subseteq\mathbb{R}^N_+$ e $x_0^N<r$ ($x_0=(x_0',x_0^N)$).

Consideriamo $B^+_{2r}(x_0')$, la semipalla di raggio $2r$ centrata in $(x_0',0)$. Siccome questa contiene $\Omega(x_0,r)$ risulta

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(x_0,r)}|D^2u-(D^2u)_{\Omega(x_0,r)}|^2 &\leq \int_{\Omega(x_0,r)}|D^2u-(D^2u)_{B^+(x_0',2r)}|^2\\ &\leq \int_{B^+(x_0',2r)}|D^2u-(D^2u)_{B^+(x_0',2r)}|^2\end{aligned}$$

e a questo punto siamo nella stessa situazione del primo caso: possiamo riscrivere la stessa stima con $2R$ al posto di R e $2r$ al posto di r.

Quarto caso: $B_R(x_0)\not\subseteq\mathbb{R}^N_+$ e $r<x_0^N<R$.

Consideriamo la palla $B'=B_{R'}(x_0)$ centrata nel punto x_0 e di raggio $R'=x_0^N$. Utilizzando i casi già discussi, usiamo la stima (5.12) tra $B_r(x_0)$ e B', quindi la stima del passo 3 tra B' e $B^+_{2R'}(x_0')$, infine la stima (5.28) tra $B^+_{2R'}(x_0')$ e $B^+_{2R}(x_0')$ per ottenere

In definitiva, abbiamo provato che per ogni $r<R$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(x_0,r)}|D^2u-(D^2u)_{\Omega(x_0,r)}|^2 &\leq c(\nu_0,k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}[D^2u]^2_\alpha R^{N+2\alpha}\right.\\ &\quad\left.+[f]^2_\alpha R^{N+2\alpha}+\|D^2u\|^2_\infty R^{N+2\alpha}\right)\end{aligned}$$

Ponendo $R=pr$ con $p>1$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{N+2\alpha}}\int_{\Omega(x_0,r)}|D^2u-(D^2u)_{\Omega(x_0,r)}|^2 &\leq c(\nu_0,k_0)\left(p^{2\alpha-2}[D^2u]^2_\alpha\right.\\ &\quad\left.+[f]^2_\alpha p^{N+2\alpha}+\|D^2u\|^2_\infty p^{N+2\alpha}\right)\end{aligned}$$

Prendendo il sup su $r>0$ e $x_0\in\mathbb{R}^N_+$ otteniamo

$$[D^2u]^2_\alpha\leq c(\nu_0,k_0,\alpha)\left(p^{2\alpha-2}[D^2u]^2_\alpha+[f]^2_\alpha p^{N+2\alpha}+\|D^2u\|^2_\infty p^{N+2\alpha}\right)$$

per ogni $p>1$. Scegliamo ora p sufficientemente grande affinchè $c(\nu_0,k_0,\alpha)$ $p^{2\alpha-2}=\frac{1}{2}$. Ciò implica che

$$[D^2u]^2_\alpha\leq c(\nu_0,k_0,\alpha)\left([f]^2_\alpha+\|D^2u\|^2_\infty\right).$$

Passiamo ora al caso generale in cui sono presenti i coefficienti b_i e c. Ponendo $A_0u = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}u$ e tenendo conto della prima parte risulta

$$\begin{aligned}[D^2u]_\alpha &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left([A_0u]_\alpha + \|D^2u\|_\infty\right)\\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left([Au]_\alpha + \|u\|_{1,\alpha} + \|D^2u\|_\infty\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left([Au]_\alpha + \|u\|_2\right).$$

Usiamo la stima interpolativa $\|u\|_2 \leq \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty$ (Teorema 4.2.3), scegliamo ε tale che $\varepsilon c(\nu_0, k_0, \alpha) = \frac{1}{2}$ e raccogliamo infine tutto a primo membro per avere la stima dell'enunciato. □

5.6 Stime di Schauder in un aperto limitato regolare

Consideriamo un aperto limitato Ω con bordo $C^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ e come sempre l'operatore uniformemente ellittico

$$A = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij} + \sum_{i=1}^N b_iD_i + c \tag{5.30}$$

avente i coefficienti α-hölderiani in Ω. Supponiamo

$$\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \leq k_0, \quad \nu_0 > 0.$$

Definiamo

$$C_0^{2,\alpha}(\Omega) = \left\{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u = 0 \text{ su } \partial\Omega\right\}.$$

Vogliamo estendere i coefficienti dell'operatore A in tutto $\mathbb{R}^N$ in modo che le estensioni risultino di classe $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e il nuovo operatore sia ancora uniformemente ellittico.

Se $\Omega = B_R$, allora possiamo definire estensioni radiali ponendo

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x) & \text{se } |x| \leq R \\ a_{ij}\left(\frac{x}{|x|}R\right) & \text{se } |x| > R. \end{cases}$$

Analogamente per b_i e c.

Si verifica facilmente che le norme hölderiane al più raddoppiano e che la costante di ellitticità ν_0 rimane invariata.

Se $\Omega = B_R^+$, mediante una riflessione possiamo ricondurci in B_R e da qui di nuovo con un'estensione radiale costruiamo dei coefficienti definiti in tutto $\mathbb{R}^N$. Anche in tal caso è facile verificare che le norme hölderiane e la costante ν_0 si modificano al più per fattori moltiplicativi.

Pertanto se $u \in C^{2,\alpha}(B_R)$ e supp$u \subseteq B_r$ con $r < R$, allora di fatto $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e applicando le stime di Schauder in tutto $\mathbb{R}^N$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha,B_R} = \|u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\tilde{A}u\|_{\alpha,\mathbb{R}^N} + \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^N}\right) \\ &= c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|Au\|_{\alpha,B_R} + \|u\|_{\infty,B_R}\right) \end{aligned} \tag{5.31}$$

dove $\tilde{A}$ è l'operatore avente per coefficienti $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c}$.

E' facile così dedurre stime di Schauder in una palla a partire da quelle in $\mathbb{R}^N$, ma per una classe di funzioni molto più piccola di $C_0^{2,\alpha}(B_R)$, dato che le funzioni considerate si annullano al bordo insieme alle derivate prime e seconde, proprietà questa che in generale non è verificata da una qualunque funzione di $C_0^{2,\alpha}(B_R)$.

Analogamente se $u \in C^{2,\alpha}(B_R^+)$ è tale che $u = 0$ su $\partial B_R^+ \cap \mathbb{R}^{N-1}$ e supp$u \subset B_r^+$ con $r < R$ allora $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}_+^N)$ e possiamo usare le stime di Schauder nel semispazio con l'operatore $\tilde{A}$ per avere

$$\|u\|_{2,\alpha,B_R^+} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|Au\|_{\alpha,B_R^+} + \|u\|_{\infty,B_R^+}\right). \tag{5.32}$$

Queste stime, che non sono ancora sufficienti per i nostri scopi, ci permetteranno di far funzionare il metodo delle carte locali.

Consideriamo Ω e Λ aperti limitati di $\mathbb{R}^N$. Sia $H : \overline{\Lambda} \to \overline{\Omega}$ una trasformazione bigettiva di classe $C^{2,\alpha}$ con inversa $J : \overline{\Omega} \to \overline{\Lambda}$ di classe $C^{2,\alpha}$ tale che $H(\partial\Lambda) = \partial\Omega$.

Data $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ definiamo

$$v(y) = u(H(y)), \qquad y \in \Lambda.$$

Allora $v \in C^{2,\alpha}(\Lambda)$ e se u si annulla su $\partial\Omega$ v si annulla su $\partial\Lambda$. Dunque è ben definita la seguente applicazione

$$M : C_0^{2,\alpha}(\Omega) \to C_0^{2,\alpha}(\Lambda), \qquad u \mapsto Mu = v \tag{5.33}$$

con $(Mu)(y) = u(H(y))$. Si può facilmente verificare che M è lineare, limitata e invertibile con inversa data da

$$\begin{gathered} M^{-1} : C_0^{2,\alpha}(\Lambda) \to C_0^{2,\alpha}(\Omega) \\ (M^{-1}v)(x) = v(Jx) \end{gathered}$$

Consideriamo l'operatore

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x)$$

definito in Ω. Se $u(x) = v(Jx)$, si ottiene facendo un calcolo esplicito e ponendo $y = Jx$

$$Au(x) = \tilde{A}v(y) = \sum_{h,k=1}^{N} \alpha_{hk}(y) D_{y_h y_k} v(y) + \sum_{k=1}^{N} \beta_k D_{y_k} v(y) + \gamma(y) v(y) \tag{5.34}$$

dove

$\alpha_{hk}(y) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(H(y)) D_{x_j} J_h(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y))$,

$\beta_k(y) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(H(y)) D_{x_i x_j} J_k(H(y)) + \sum_{i=1}^{N} b_i(H(y)) J_k(H(y))$,

$\gamma(y) = c(H(y))$.

Le ipotesi relative al cambio di variabile assicurano che

$$\alpha_{hk},\ \beta_k,\ \gamma\ \in C^{0,\alpha}(\Gamma).$$

Inoltre

$$\tilde{k_0} \leq c_1(J)\, k_0 \qquad\qquad \tilde{\nu_0} \geq c_2(J)\, \nu_0$$

dove $c_1(J)$ e $c_2(J)$ dipendono solo dal cambio di variabile fissato (e quindi dall'aperto) e non dall'operatore A. Osserviamo infine che nella notazione introdotta si ha

$$Au(x) = \tilde{A}v(Jx)$$

cioè

$$Au = M^{-1}\tilde{A}Mu.$$

Teorema 5.6.1 (Stime di Schauder in Ω) *Sia Ω un aperto limitato di classe $C^{2,\alpha}$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, k_0, \Omega) > 0$ tale che per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ si ha*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \Omega) \left(\|Au\|_\alpha + \|u\|_\infty \right). \tag{5.35}$$

DIM. Per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) con

$$H_x : \overline{B_1} \to \overline{U_x} \text{ di classe } C^{2,\alpha}, \quad H_x^{-1} = J_x : \overline{U_x} \to \overline{B_1} \text{ di classe } C^{2,\alpha},$$

$$H_x(B_1^+) = U_x \cap \Omega.$$

Poniamo $V_x = H_x(B_{\frac{1}{2}})$. Per ogni $x \in \Omega$ esiste $B_{2R_x}(x) \subset \Omega$. Per compattezza si ha

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B_{R_i}(x_i) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}.$$

Posto $n = n_1 + n_2$, prendiamo $(\eta_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ partizione dell'unità relativa al ricoprimento ottenuto. Allora

$$u = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u \qquad \text{e quindi} \qquad \|u\|_{2,\alpha} \leq \sum_{i=1}^{n} \|\eta_i u\|_{2,\alpha}.$$

Se $i \leq n_1$ allora $\eta_i u \in C^{2,\alpha}(B_{2R_{x_i}}(x_i))$ e $\mathrm{supp}(\eta_i u) \subset B_{R_{x_i}}(x_i)$. Applicando (5.31) otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta_i u\|_{2,\alpha,\Omega} &= \|\eta_i u\|_{2,\alpha,B_{2R_{x_i}}(x_i)} \\
&\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,B_{2R_{x_i}}(x_i)} + \|\eta_i u\|_{\infty,B_{2R_{x_i}}(x_i)}\right) \\
&\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega}\right) \\
&\leq c(\nu_0, k_0, \alpha, \Omega)\left(\|Au\|_{\alpha} + \|u\|_2\right). \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

Sia adesso $n_1 + 1 \leq i \leq n$. Operiamo il seguente cambio di variabile

$$v_i(y) := (\eta_i u)(H_i(y)) = M_i(\eta_i u)(y)$$

e osserviamo che $v_i \in C_T^{2,\alpha}(B_1^+)$ e $\mathrm{supp}(\eta_i u) \subset V_i = H_i(B_{\frac{1}{2}})$. Pertanto possiamo applicare (5.32) a v_i e avere

$$\begin{aligned}
\|v_i\|_{2,\alpha,B_1^+} &\leq c(\nu_0, k_0, H_i)\left(\|\tilde{A}v_i\|_{\alpha,B_1^+} + \|v_i\|_\infty\right) \\
&\leq c(\nu_0, k_0, H_i)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,U_{x_i}} + \|\eta_i u\|_\infty\right) \\
&\leq c(\nu_0, k_0, H_i)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,\Omega} + \|u\|_\infty\right)
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\|\eta_i u\|_{2,\alpha,\Omega} \leq c(\nu_0, k_0, \Omega)\left(\|Au\|_\alpha + \|u\|_2\right).$$

Sommando su $i = 1, \cdots, n$

$$\|u\|_{2,\alpha,\Omega} \leq c(\nu_0, k_0, \Omega)\left(\|Au\|_\alpha + \|u\|_2\right).$$

Concludiamo la dimostrazione applicando la disuguaglianza interpolativa $\|u\|_2 \leq \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty$ e scegliendo ε tale che $\varepsilon c(\nu_0, k_0, \Omega) = \frac{1}{2}$. □

Osservazione 5.6.2 Ricordiamo che il nostro obiettivo è risolvere il problema

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Se $c \leq 0$, allora il principio del massimo in un aperto limitato assicura l'unicità della soluzione nella classe $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Come sempre, la parte più laboriosa è quella relativa all'esistenza.

Corollario 5.6.3 *Nelle ipotesi del Teorema 5.5.1 e se $c \leq 0$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \Omega)\|Au\|_\alpha,$$

per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$.

DIM. Basta usare il Teorema 5.5.1 e la Proposizione 3.1.9. □

Possiamo ora dimostrare il teorema di esistenza per la soluzione del problema di Dirichlet per un operatore generale in un aperto limitato regolare.

Teorema 5.6.4 (Esistenza) *Sia Ω un aperto limitato con bordo di classe $C^{2,\alpha}$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $Au = f$.*

DIM. Per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) con

$$H_x : \overline{B_1} \to \overline{U_x} \text{ di classe } C^{2,\alpha}, \quad H_x^{-1} = J_x : \overline{U_x} \to \overline{B_1} \text{ di classe } C^{2,\alpha},$$

$$H_x(B_1^+) = U_x \cap \Omega.$$

Poniamo $V_x = H_x(B_{\frac{1}{2}})$.

Per ogni $x \in \Omega$ sia $B_{2R_x}(x) \subset \Omega$. Per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito per $\overline{\Omega}$

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B_{R_i}(x_i) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}. \tag{5.37}$$

Poniamo $n = n_1+n_2$ e prendiamo $(\eta_i^2)_{i=1,2,\cdots,n}$ partizione dell'unità relativa a tale ricoprimento.

Sia $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Allora possiamo scrivere $f = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 f$. Fissiamo $\lambda > 0$.

Se $i \leq N_1$ allora $\eta_i f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, supp$(\eta_i f) \subseteq B_{R_{x_i}}(x_i)$. Estendiamo radialmente l'operatore A dalla palla $B_{R_{x_i}}(x_i)$ a tutto $\mathbb{R}^N$ e indichiamo con $R(\lambda)$ il risolvente dell'operatore così ottenuto. Osserviamo che $R(\lambda) : C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \to C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Poniamo

$$R_i(\lambda)f := \eta_i \cdot R(\lambda)(\eta_i f)$$

e notiamo che

$$R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{2,\alpha}(\Omega) \quad \text{e} \quad \operatorname{supp} R_i(\lambda)f \subseteq B_{R_i}(x_i).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)R_i(\lambda)f &= (\lambda - A)\eta_i R(\lambda)(\eta_i f) \\
&= \eta_i(\lambda - A)R(\lambda)(\eta_i f) + [\lambda - A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f) \\
&= \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f
\end{aligned}$$

dove $[\cdot,\cdot]$ indica il commutatore e per definizione

$$S_i(\lambda)f = [\lambda - A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f).$$

Cerchiamo di stimare quest'ultimo operatore. E' immediato verificare che $[\lambda - A, \eta_i I] = -[A, \eta_i I]$. Inoltre

$$[A, \eta_i I]g = A(\eta_i g) - \eta_i(Ag) = B_i g$$

dove B_i è un operatore differenziale al più del primo ordine i cui coefficienti dipendono da quelli di A e dalla funzione η_i. Ne segue che

$$\|[A, \eta_i I]g\|_\alpha \le c(k_0, \eta_i)\|g\|_{1,\alpha}$$

e quindi, prendendo $g = R(\lambda)(\eta_i f)$ e applicando il Corollario 5.4.6 otteniamo

$$\begin{aligned}\|S_i(\lambda)f\|_\alpha &\le c(k_0, \eta_i)\|R(\lambda)(\eta_i f)\|_{1,\alpha} \\ &\le c(k_0, \eta_i)\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}\|\eta_i f\|_\alpha \\ &\le c(k_0, \eta_i)\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f\|_\alpha\end{aligned} \tag{5.38}$$

se $\lambda \ge 1$.

Sia ora $n_1 + 1 \le i \le n$. Poniamo

$$v(y) = (\eta_i f)(H_i(y)) = M_i(\eta_i f)(y)$$

dove M_i è definito in (5.33). Allora $v \in C^{0,\alpha}(B_1^+)$ e supp$v \subset B_{\frac{1}{2}}$. Indichiamo con $\tilde{A}$ l'operatore ottenuto effettuando il cambiamento di variabili dato da M_i, cioè $\tilde{A} = M_i A M_i^{-1}$. Risulta

$$R_i(\lambda)f := M_i^{-1}\left(M_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A})^{-1}M_i(\eta_i f)\right) \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$$
$$\operatorname{supp} R_i(\lambda)f \subset V_{x_i}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}(\lambda - A)R_i(\lambda)f &= M_i^{-1}(\lambda - \tilde{A})M_i M_i^{-1}M_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(M_i(\eta_i f)\right) \\ &= M_i^{-1}\left(M_i(\eta_i)M_i(\eta_i f)\right) \\ &\quad + M_i^{-1}\left([\lambda - \tilde{A}, M_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(M_i(\eta_i f)\right)\right) \\ &= \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f\end{aligned} \tag{5.39}$$

dove ora $S_i(\lambda) = M_i^{-1}\left([\lambda - \tilde{A}, M_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(M_i(\eta_i f)\right)\right)$. Come prima, se $\lambda \ge 1$ applicando la Proposizione 5.5.5 risulta

$$\|S_i(\lambda)f\|_\alpha \le c(\nu_0, k_0, H_i)\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f\|_\alpha. \tag{5.40}$$

A questo punto poniamo

$$V(\lambda) = \sum_{i=1}^n R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C_0^{2,\alpha}(\Omega).$$

Osserviamo che

$$(\lambda - A)V(\lambda)f = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 f + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f = f + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f$$

e quindi

$$(\lambda - A)V(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{e} \quad (\lambda - A)V(\lambda) = I + \sum_{i=1}^{n} S_i(\lambda).$$

Ora, grazie a (5.38) e a (5.40) possiamo scegliere λ_0 tale che $\sum_{i=1}^{n} \|S_i(\lambda_0)\|_\alpha \leq \frac{1}{2}$. Ciò assicura che l'operatore $I + \sum_{i=1}^{n} S_i(\lambda_0)$ è invertibile in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ con inverso $W(\lambda_0)$ tale che $\|W(\lambda_0)\| \leq 2$. Inoltre siccome

$$(\lambda_0 - A)V(\lambda_0)W(\lambda_0) = I$$

su $C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $\lambda_0 - A$ è iniettivo, risulta $(\lambda_0 - A)^{-1} = V(\lambda_0)W(\lambda_0)$.

Se $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, le stime di Schauder per l'operatore $A - \lambda$ forniscono una costante $c = c(\nu_0, k_0, \lambda_0, \Omega) > 0$ tale che per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ si ha

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \lambda_0, \Omega)\|(\lambda - A)u\|_\alpha. \tag{5.41}$$

La stima (5.41) permette di applicare il metodo di continuità agli operatori

$$L_0 = \lambda_0 - A, \quad L_1 = -A$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 5.6.5 In $\mathbb{R}^N$ e in $\mathbb{R}^N_+$ abbiamo dimostrato per il risolvente di A la seguente stima

$$\|(\lambda - A)^{-1}f\|_r \leq c(\nu_0, k_0)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|f\|_\alpha,$$

con $\lambda \geq 1$ e $0 \leq r \leq \alpha + 2$. La stessa continua a valere in un aperto Ω regolare. Infatti, nella notazione del teorema precedente, risulta $(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda, A) = V(\lambda)W(\lambda)$, con $V(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} R_i(\lambda)$, dove $R_i(\lambda)$ è sostanzialmente il risolvente nello spazio o nel semispazio per il quale sappiamo che vale $\|R_i(\lambda)g\|_r \leq c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|g\|_\alpha$ e $\|W(\lambda)\| \leq 2$. Pertanto se $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, si ha

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - A)^{-1}f\|_r &= \|V(\lambda)W(\lambda)f\|_r \\
&\leq c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|W(\lambda)f\|_r \\
&\leq 2c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|f\|_\alpha.
\end{aligned}$$

5.7 Problema di Dirichlet non omogeneo

In questa sezione supponiamo che $c \leq 0$ e consideriamo il problema

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.42}$$

Se $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, ponendo $v = u - g$ si vede che

$$\begin{cases} Av = Au - Ag = f - Ag & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

per cui risolvendo questo problema (e lo sappiamo fare) si trova la soluzione di (5.42) semplicemente prendendo $u = v + g$. Inoltre, abbiamo la stima

$$\|v\|_{2,\alpha} \leq c\|f - Ag\|_\alpha \leq c\left(\|f\|_\alpha + \|Ag\|_\alpha\right) \leq c\left(\|f\|_\alpha + \|g\|_{2,\alpha}\right).$$

Tuttavia l'ipotesi $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ è abbastanza innaturale, nel senso che la regolarità richiesta è eccessiva. Per esempio nel caso particolare del Laplaciano

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

è sufficiente che $g \in C(\partial\Omega)$. Vediamo allora come procedere nel caso generale.

Per risolvere il problema (5.42) cerchiamo la soluzione nella forma $u = v + w$, dove v e w devono soddisfare rispettivamente

$$\begin{cases} Av = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} Aw = 0 & \text{in } \Omega \\ w = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Il primo dei due problemi è quello che sappiamo già risolvere. Ci concentriamo dunque sul secondo. Richiamiamo per questo il Lemma 3.1.5.

Lemma 5.7.1 *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soddisfa $-Au \geq 0$ in Ω e $u \geq 0$ su $\partial\Omega$, allora $u \geq 0$ in Ω.*

Introduciamo l'*operatore di Green*

$$\mathcal{G} : C^{2,\alpha}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$$
$$g \mapsto \mathcal{G}(g)$$

dove $u = \mathcal{G}(g)$ è l'unica soluzione classica del problema

$$\begin{cases} Au = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.43}$$

$\mathcal{G}$ è ben posto per quanto osservato prima ed è lineare per l'unicità della soluzione del problema (5.43).

La seguente proposizione elenca altre proprietà di $\mathcal{G}$.

Proposizione 5.7.2 *Siano g, g_1 e g_2 $\in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Allora risulta*

(1) $g \geq 0 \Rightarrow \mathcal{G}(g) \geq 0$;

(2) $g_1 \leq g_2 \Rightarrow \mathcal{G}(g_1) \leq \mathcal{G}(g_2)$*;*

(3) $\|\mathcal{G}(g)\|_\infty \leq \|g\|_\infty k$*, dove* $k = \|\mathcal{G}(1)\|_\infty$.

DIM. La dimostrazione del punto (1) segue dal lemma richiamato poco sopra osservando che, posto $u = \mathcal{G}(g)$, risulta $Au = 0$ e $u = g \geq 0$ al bordo.

(2) segue dalla linearità di $\mathcal{G}$ e da (1).

Per (3) si ha infine

$$
\begin{aligned}
-\|g\|_\infty 1 \leq g(x) \leq \|g\|_\infty 1 \quad &\Rightarrow \quad -\|g\|_\infty \mathcal{G}(1) \leq \mathcal{G}(g) \leq \|g\|_\infty \mathcal{G}(1) \\
&\Rightarrow \quad \|\mathcal{G}(g)\|_\infty \leq \|g\|_\infty k
\end{aligned}
$$

□

Per il nostro obiettivo è utile il seguente teorema, che dimostreremo in seguito.

Teorema 5.7.3 (Stime di Schauder interne) *Sia* $0 < \alpha < 1$*. Consideriamo l'operatore*

$$
A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c
$$

definito in Ω *aperto qualunque di* $\mathbb{R}^N$ *e tale che*

$$
\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \leq k_0, \quad \nu_0 > 0
$$

(non facciamo restrizioni sul segno di c*). Allora per ogni* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ *esiste una costante* $c = c(\nu_0, k_0, \alpha, \mathit{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)) > 0$ *tale che per ogni* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *risulta*

$$
\|u\|_{2,\alpha,\Omega_0} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha, \Omega_0, \Omega) \left(\|Au\|_{\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega}\right). \tag{5.44}
$$

Proposizione 5.7.4 *Sia* Ω *di classe* $C^{2,\alpha}$ *e supponiamo* $c \leq 0$*. Allora per ogni* $g \in C(\partial\Omega)$ *esiste un'unica* $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tale che*

$$
\begin{cases}
Au = 0 & \text{in } \Omega \\
u = g & \text{su } \partial\Omega
\end{cases}
$$

DIM. L'unicità della soluzione segue dal principio del massimo 5.7.1. Dimostriamo l'esistenza. Siano $g \in C(\partial\Omega)$ e $\tilde{g} \in C(\overline{\Omega})$ estensione di g. Consideriamo una successione $(g_n) \subset C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $g_n \to \tilde{g}$ uniformemente in $\overline{\Omega}$. Per ogni n, $u_n = \mathcal{G}(g_n) \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ risolve

$$
\begin{cases}
Au_n = 0 & \text{in } \Omega \\
u_n = g_n & \text{su } \partial\Omega
\end{cases}
$$

e si ha

$$
\|u_n - u_m\|_{\infty,\Omega} = \|\mathcal{G}(g_n) - \mathcal{G}(g_m)\|_{\infty,\Omega} \leq k\|g_n - g_m\|_{\infty,\partial\Omega}.
$$

Ne segue che u_n converge a una funzione $u \in C(\overline{\Omega})$ uniformemente in $\overline{\Omega}$ e siccome $u_{n|\partial\Omega} = g_n$ risulta $u_{|\partial\Omega} = g$.

Fissiamo $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Dal Teorema 5.7.3 sappiamo che

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|_{2,\alpha,\Omega_0} &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha, \Omega_0, \Omega)\left(\|Au_n - Au_m\|_{\alpha,\Omega} + \|u_n - u_m\|_{\infty,\Omega}\right)\\ &= c(\nu_0, k_0, \alpha, \Omega_0, \Omega)\|u_n - u_m\|_{\infty,\Omega}.\end{aligned}$$

Pertanto (u_n) è di Cauchy in $C^{2,\alpha}(\Omega_0)$. Da ciò segue che $u_n \to u$ in $C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ e quindi $u \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$. Data l'arbitrarietà di Ω_0 risulta dunque $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Infine passando al limite nell'equazione $Au_n = 0$ si ha che $Au = 0$.

□

Passiamo ora a formulare un risultato di risolubilità per il problema (5.42).

Teorema 5.7.5 *Sia Ω di classe $C^{2,\alpha}$ e supponiamo $c \leq 0$. Per ogni $g \in C(\partial\Omega)$ e per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che*

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Le tecniche già impiegate permettono di provare alcuni risultati di regolarità locale.

Corollario 5.7.6 *(i) Se Ω è di classe $C^{2,\alpha}$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ è tale che $Au \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ allora $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

(ii) Sia Ω aperto qualsiasi: se $u \in C^2(\Omega)$ e $Au \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ allora $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

DIM. (i) Poniamo $f = Au \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} Av = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Sia $v \in C^{2,\alpha}_0(\Omega)$ l'unica soluzione. Per differenza $u - v \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ e $A(u - v) = 0$. Per unicità quindi $u = v$.

(ii) Consideriamo $B_R \subset\subset \Omega$ ed $f = Au \in C^{0,\alpha}(B_R)$. Il problema

$$\begin{cases} Av = f & \text{in } B_R \\ v = u & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $v \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_R) \cap C(\overline{B_R})$, per il Teorema 5.7.5. Pertanto la differenza $u - v$ appartiene a $C^{2,\alpha}(B_R) \cap C(\overline{B_R})$ e risolve

$$\begin{cases} A(u - v) = 0 & \text{in } B_R \\ (u - v) = 0 & \text{su } \partial B_R. \end{cases}$$

Ne segue che $u = v$ in B_R e quindi $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_R)$. □

Riprendiamo il Teorema 5.7.3 di regolarità interna e diamo adesso la dimostrazione. Il passo fondamentale è nel seguente lemma.

Lemma 5.7.7 *Sia* $0 < \alpha < 1$. *Consideriamo l'operatore*

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

definito in B_{2R} *e tale che*

$$\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \le k_0, \quad \nu_0 > 0.$$

Allora esiste una costante positiva $C = C(\nu_0, k_0, \alpha, R)$ *tale che per ogni* $u \in C^{2,\alpha}(B_{2R})$ *risulta*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_R)} := \|u\|_{2,\alpha,R} \le C(\nu_0, k_0, \alpha, R)(\|Au\|_{\alpha,2R} + \|u\|_{\infty,2R}). \quad (5.45)$$

DIM. Sia $u \in C^{2,\alpha}(B_{2R})$. Definiamo la successione $R_n = R\sum_{j=0}^n 2^{-j}$. Allora $R_0 = R$, $R_\infty = 2R$ e $R_{n+1} - R_n = R\, 2^{-(n+1)}$. Sia $\eta_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \le \eta_n \le 1$, $\eta_n \equiv 1$ su $B_n := B_{R_n}$, supp$\eta_n \subseteq B_{n+1}$ e

$$\|D^k \eta_n\|_\infty \le \frac{L}{R^k} 2^{k(n+1)},$$

per $k = 1, 2, 3$ e $L > 0$ indipendente da n. Applicando le stime di Schauder in $\mathbb{R}^N$ alla funzione $\eta_n u$ otteniamo

$$\|\eta_n u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \le C(\nu_0, k_0, \alpha) \left([A(\eta_n u)]_{\alpha,\mathbb{R}^N} + \|\eta_n u\|_{\infty,\mathbb{R}^N}\right). \quad (5.46)$$

Il commutatore $[A, \eta_n I]u = A(\eta_n u) - \eta_n Au$ è un operatore differenziale del primo ordine i cui coefficienti dipendono da quelli di A, dalla funzione η_n e dalle sue derivate fino al secondo ordine. Risulta pertanto

$$\|[A, \eta_n I]u\|_{\alpha,n+1} \le C(k_0)\|u\|_{1,\alpha,n+1}\|\eta_n\|_{2,\alpha}.$$

Applicando il teorema di Lagrange si ha poi $\|\eta_n\|_{2,\alpha} \le \|\eta_n\|_3 \le 8R^{-3}8^n$. Allora

$$\|[A, \eta_n I]u\|_{\alpha,n+1} \le C(k_0, R) 8^n \|u\|_{1,\alpha,n+1}.$$

Analogamente

$$\begin{aligned} [\eta_n Au]_{\alpha,n+1} &\le \|\eta_n\|_{\infty,n+1}[Au]_{\alpha,n+1} + [\eta_n]_{\alpha,n+1}\|Au\|_{\infty,n+1} \\ &\le [Au]_{\alpha,n+1} + 2^n C(k_0, R)\|u\|_{2,n+1}. \end{aligned}$$

Quindi da (5.46) otteniamo

$$\|\eta_n u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \le C(\nu_0, k_0, \alpha, R) \left([Au]_{\alpha,n+1} + 8^n \|u\|_{2,n+1}\right). \quad (5.47)$$

Siccome $C^2(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{2}{2+\alpha}}(C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N), C_b(\mathbb{R}^N))$, si ha

$$\|u\|_{2,n+1} \leq \|\eta_{n+1}\, u\|_{2,\mathbb{R}^N} \leq C(N)\|\eta_{n+1}\, u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N}^{\frac{2}{2+\alpha}}\|\eta_{n+1}\, u\|_{\infty}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}.$$

Posto $\vartheta = \frac{2}{2+\alpha}$, si ha allora per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|\eta_{n+1}\, u\|_{2,\mathbb{R}^N} \leq C(N)\left(\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta}}\, \|\eta_{n+1}\, u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} + \varepsilon^{-\frac{1}{1-\vartheta}}\|\eta_{n+1}\, u\|_{\infty}\right).$$

La stima (5.47) allora fornisce

$$\begin{aligned}\|\eta_n\, u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \quad &\leq \quad C(\nu_0, k_0, \alpha, R)\Big(\|Au\|_{\alpha,2R} + 8^n\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta}}\|\eta_{n+1}\, u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \\ &\qquad + 8^n\varepsilon^{-\frac{1}{1-\vartheta}}\|u\|_{\infty,2R}\Big).\end{aligned}$$

Scegliamo $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ t.c. $C8^n\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta}} = \xi$ con $\xi > 0$ indipendente da n. Con questa scelta $C8^n\varepsilon^{-\frac{1}{1-\vartheta}} = C_1 8^{\frac{n}{1-\vartheta}}\xi^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}}$ e quindi

$$\|\eta_n\, u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \leq C\|Au\|_{\alpha,2R} + \xi\,\|\eta_{n+1}\, u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} + C_1\, 8^{\frac{n}{1-\vartheta}}\,\xi^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}}\,\|u\|_{\infty,2R}.$$

Prendendo $\xi < 1$ in modo tale che $8^{\frac{1}{1-\vartheta}}\xi < 1$, moltiplicando l'ultima stima per ξ^n e sommando su n si vede che tutte le serie convergono e che

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\|\eta_n\, u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \quad &\leq \quad \frac{C}{1-\xi}\|Au\|_{\alpha,2R} + \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\|\eta_n\, u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \\ &\qquad + \frac{C_2}{1-\xi\, 8^{\frac{1}{1-\vartheta}}}\|u\|_{\infty,2R}\end{aligned}$$

con $C_2 = C_1\xi^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}}$. Pertanto

$$\|u\|_{2,\alpha,R} \leq \|\eta_0\, u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \leq \frac{C}{1-\xi}\|Au\|_{\alpha,2R} + \frac{C_2}{1-\xi\, 8^{\frac{1}{1-\vartheta}}}\|u\|_{\infty,2R}.$$

□

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 5.7.3 Siano $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Poniamo $d = \text{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$ e sia $R < \frac{d}{2}$. Con questa scelta, se $x_0 \in \Omega_0$ allora $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$ e applicando il lemma precedente abbiamo

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,\alpha,B_R(x_0)} \quad &\leq \quad C(\nu_0, k_0, \alpha, R)(\|Au\|_{\alpha,B_{2R}(x_0)} + \|u\|_{\infty,B_{2R}(x_0)}) \\ &\leq \quad C(\nu_0, k_0, \alpha, R)(\|Au\|_{\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega}).\end{aligned}$$

Facendo variare $x_0 \in \Omega_0$ con un numero finito di palle si ottiene la tesi. □

5.8 Stime di Schauder di ordine superiore

Nelle sezioni precedenti abbiamo assunto che i coefficienti dell'operatore A e il dato f fossero di classe $C^{0,\alpha}$ e abbiamo provato esistenza e unicità della soluzione dell'equazione $\lambda u - Au = f$ con condizioni di Dirichlet nella classe $C^{2,\alpha}$. In questa sezione studiamo regolarità superiore della soluzione in presenza di maggiore regolarità dei coefficienti di A e di f.

Come al solito

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

e sia $\nu_0 > 0$ la costante di ellitticità uniforme. Il punto cruciale è costituito dalla seguente stima interna.

Teorema 5.8.1 *Siano $k \in \mathbb{N}_0$ e $R > 0$ e assumiamo che $a_{ij}, b_i, c \in C^{k,\alpha}(B_{2R})$ con $\|a_{ij}\|_{k,\alpha;B_{2R}}, \|b_i\|_{k,\alpha;B_{2R}}, \|c\|_{k,\alpha;B_{2R}} \leq k_0$. Sia $u \in C^{2,\alpha}(B_{2R})$ tale che $Au = f \in C^{k,\alpha}(B_{2R})$. Allora $u \in C^{k+2,\alpha}(B_R)$ ed esiste $C = C(\nu_0, k_0, k, \alpha, R)$ > 0 tale che*

$$\|u\|_{k+2,\alpha;B_R} \leq C\,(\|Au\|_{k,\alpha;B_{2R}} + \|u\|_{\infty;B_{2R}}).$$

DIM. Per $k = 0$ il risultato segue dal Teorema 5.7.3. Proviamolo per $k = 1$. Se $r \in \{1, ..., N\}$ e $0 < h < R/4$, introduciamo il quoziente differenziale di u nella direzione di e_r definito da

$$\delta_{h,r} u(x) = \frac{u(x + he_r) - u(x)}{h}.$$

Siccome

a) $\delta_{h,r}(\phi u)(x) = \phi(x + he_r)\delta_{h,r} u(x) + \delta_{h,r}\phi(x) u(x)$,

b) $\delta_{h,r} Du = D\delta_{h,r} u$, con Du generica derivata di u,

se $Au = f$ si verifica facilmente che $v = \delta_{h,r} u$ soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} Av(x) &= \delta_{h,r} f(x) - \sum_{i,j=1}^{N} (\delta_{h,r} a_{ij})(x) D_{ij} u(x + he_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N} (\delta_{h,r} b_i)(x) D_i u(x + he_r) - (\delta_{h,r} c)(x) u(x + he_r) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Siccome per ipotesi $D_r f \in C^{0,\alpha}(B_{2R})$, dalla rappresentazione

$$(\delta_{h,r} f)(x) = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + hse_r) ds = \int_0^1 (D_r f)(x + hse_r) ds$$

e dal fatto che $0 < h < R/4$ si vede che $\delta_{h,r}f \in C^{0,\alpha}(B_{\frac{3R}{2}})$ con $\|\delta_{h,r}f\|_{\alpha;B_{\frac{3R}{2}}} \leq \|D_r f\|_{\alpha;B_{2R}}$. Analogamente $\delta_{h,r}a_{ij},\ \delta_{h,r}b_i,\ \delta_{h,r}c \in C^{0,\alpha}(B_{3R/2})$ e

$$\|\delta_{h,r}a_{ij}\|_{\alpha;B_{3R/2}},\ \|\delta_{h,r}b_i\|_{\alpha;B_{3R/2}},\ \|\delta_{h,r}c\|_{\alpha;B_{3R/2}} \leq k_0.$$

Applicando le stime interne (5.44) alla funzione v con $\Omega = B_{3R/2}$ e $\Omega_0 = B_R$ otteniamo

$$\|v\|_{2,\alpha;B_R} \leq C(\nu_0, k_0, R, \alpha)(\|g\|_{\alpha;B_{3R/2}} + \|v\|_{\infty;B_{3R/2}}),$$

ossia $(\delta_{h,r}u)$ è equilimitata rispetto ad h in $C^{2,\alpha}(B_R)$. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà, esiste un'estratta che, per $h \to 0$, converge uniformemente con derivate prime e seconde a $D_r u$, che è il limite puntuale di $\delta_{h,r}u$. Ne segue che $D_r u \in C^{2,\alpha}(B_R)$, pertanto è lecito derivare l'equazione $Au = f$ rispetto a x_r ottenendo

$$A(D_r u) = D_r f - \sum_{i,j=1}^{N} D_r a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i=1}^{N} D_r b_i D_i u - D_r c\, u. \tag{5.48}$$

Applicando due volte (5.44) risulta

$$\begin{aligned}
\|D_r u\|_{2,\alpha;B_R} &\leq C(\nu_0, k_0, R, \alpha)(\|D_r f\|_{\alpha;B_{\frac{3R}{2}}} + \|u\|_{2,\alpha;B_{\frac{3R}{2}}} \\
&\quad + \|D_r u\|_{\infty;B_{\frac{3R}{2}}}) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, R, \alpha)(\|D_r f\|_{\alpha;B_{3R/2}} + \|f\|_{\alpha;B_{2R}} + \|u\|_{\infty;B_{2R}}) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, R, \alpha)(\|f\|_{1,\alpha;B_{2R}} + \|u\|_{\infty;B_{2R}}).
\end{aligned}$$

Risulta così provato il teorema per $k = 1$. Notiamo che in realtà gli stessi argomenti provano che $D_r u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_{2R})$, per ogni r e l'equazione (5.48) è soddisfatta puntualmente in B_{2R}.

Sia $k \geq 1$, supponiamo l'asserto vero per k e proviamolo per $k+1$. Assumiamo pertanto che $a_{ij}, b_i, c \in C^{k+1,\alpha}(B_{2R})$, $f \in C^{k+1,\alpha}(B_{2R})$. L'ipotesi induttiva già assicura che $u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_{2R})$. Inoltre, se $r \in \{1, ..., N\}$, allora $D_r u$ verifica l'equazione (5.48) in B_{2R}. Per l'ipotesi del passo $k+1$, il secondo membro appartiene a $C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_{2R})$. Applicando l'ipotesi induttiva otteniamo quindi che $D_r u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_{2R})$ e

$$\begin{aligned}
\|D_r u\|_{k+2,\alpha;B_R} &\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha)(\|D_r f\|_{k,\alpha;B_{3R/2}} + \|u\|_{k+2,\alpha;B_{3R/2}}) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha)(\|f\|_{k+1,\alpha;B_{2R}} + \|u\|_{\infty;B_{2R}}).
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di r segue la tesi. □

Ora ci proponiamo di applicare le stime interne dimostrate per regolarizzare la soluzione $C^{2,\alpha}$ ottenuta nelle sezioni precedenti nel caso in cui i dati del problema siano più regolari. Esaminiamo in ordine i casi dell'intero spazio, del semispazio e di un aperto limitato regolare.

Proposizione 5.8.2 *Siano $k \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda > 0$ e assumiamo che $a_{ij}, b_i, c \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ con $c \leq 0$. Sia $k_0 > 0$ tale che $\|a_{ij}\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N}, \|b_i\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N}, \|c\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N} \leq k_0$. Se $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, allora la soluzione $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ dell'equazione $\lambda u - Au = f$ appartiene a $C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\|u\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N} \leq C(\nu_0, k_0, k, \lambda, \alpha)\|(\lambda - A)u\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N}. \tag{5.49}$$

DIM. Per $k = 0$ la tesi è provata dal Teorema 5.4.4 e dalla stima (5.15). Assumiamo quindi $k \geq 1$. Se $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, allora sicuramente $Au = \lambda u - f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Applicando il Teorema 5.8.1 con $k = 1$, $B_1(x_0)$ e $B_2(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ arbitrario, risulta che $u \in C^{3,\alpha}(B_1(x_0))$ e tenendo conto della stima (5.15) si ha

$$\begin{aligned}
\|u\|_{3,\alpha;B_1(x_0)} &\leq C(\nu_0, k_0, 1, \alpha, \lambda)\left(\|Au\|_{1,\alpha;B_2(x_0)} + \|u\|_{\infty;B_2(x_0)}\right) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\left(\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N} + \|u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N}\right) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\left(\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N} + \|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N}\right) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\,\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore su x_0 otteniamo che $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e soddisfa la stima $\|u\|_{3,\alpha;\mathbb{R}^N} \leq C\,\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N}$. Iterando il procedimento si completa la dimostrazione. □

Proposizione 5.8.3 *Siano $k \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda > 0$ e assumiamo che $a_{ij}, b_i, c \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ con $c \leq 0$. Sia $k_0 > 0$ tale che $\|a_{ij}\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+}, \|b_i\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+}, \|c\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq k_0$. Se $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ allora la soluzione $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \textit{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \textit{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

appartiene a $C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $\|u\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\nu_0, k_0, k, \lambda, \alpha)\|(\lambda - A)u\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$.

DIM. Il Teorema 5.5.4 e il Corollario 5.5.2 provano la tesi per $k = 0$. Sia adesso $k \geq 1$. Osserviamo che per regolarità interna $u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$. In particolare $u \in C^{k+2}(\mathbb{R}^N_+)$ e quindi si può derivare l'equazione $\lambda u - Au = f$. Se $r \leq N - 1$, allora la derivata tangenziale $D_r u$ soddisfa ancora la stessa condizione al bordo per cui, posto $v = D_r u$, risulta

$$\begin{cases} \lambda v - Av = D_r f + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} D_r a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} D_r b_i D_i u + D_r c\, u = g & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ v = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Osserviamo che $v \in C_b(\mathbb{R}^N_+) \cap C^2(\mathbb{R}^N_+)$. Inoltre, esiste $w \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che

$$\begin{cases} \lambda w - Aw = g & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ w = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Per unicità (Teorema 3.1.13) $v = w$ e quindi $D_r u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e tenendo conto della stima del Corollario 5.5.2 risulta

$$\begin{aligned}\|D_r u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\,(\|D_r f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+}) \\ &\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\,\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}.\end{aligned}$$

Rimane da stimare la derivata terza di u rispetto a x_N. Derivando l'equazione $\lambda u - Au = f$ rispetto a x_N e ricavando $D^3_N u$ otteniamo

$$\begin{aligned}D^3_N u &= \frac{1}{a_{NN}}\Bigg(\lambda D_N u - D_N f - \sum_{(i,j)\neq(N,N)} a_{ij} D_{ij} D_N u - \sum_{i,j=1}^{N} D_N a_{ij} D_{ij} u \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N} D_N b_i D_i u - D_N c\, u\Bigg)\end{aligned}$$

e quindi la stima di $\|D^3_N u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ segue da quella già fatta per le altre derivate. In definitiva $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $\|u\|_{3,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\,\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$.

Ripetendo lo stesso argomento per un numero finito di passi si giunge alla tesi. □

Osservazione 5.8.4 Nelle stesse ipotesi della proposizione precedente, se $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $g \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$, allora esiste un'unica $u \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

e

$$\|u\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\nu_0, k_0, k, \lambda, \alpha)(\|f\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}).$$

Infatti, basta prendere $\tilde{g} \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ estensione di g tale che $\|\tilde{g}\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\|g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$ e scrivere la soluzione nella forma $u = v + \tilde{g}$, dove $v \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ risolve

$$\begin{cases} \lambda v - Av = f - (\lambda\tilde{g} - A\tilde{g}) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ v = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Nel caso di un aperto limitato Ω di classe $C^{k+2,\alpha}$ lo stesso risultato si ottiene mediante carte locali e partizioni dell'unità.

Proposizione 5.8.5 *Sia Ω un aperto limitato di classe $C^{k+2,\alpha}$ in $\mathbb{R}^N$, con $k \in \mathbb{N}_0$. Supponiamo che $a_{ij}, b_i, c \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ con $c \leq 0$ e $\|a_{ij}\|_{k,\alpha;\Omega}, \|b_i\|_{k,\alpha;\Omega}, \|c\|_{k,\alpha;\Omega} \leq k_0$. Se $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, allora la soluzione $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ del problema*

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

appartiene a $C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ e $\|u\|_{k+2,\alpha;\Omega} \leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha, \Omega)\|f\|_{k,\alpha;\Omega}$.

DIM. Sia $k \geq 1$. Per ogni $x \in \partial\Omega$ sia (U_x, H_x) carta locale con

$$\begin{aligned} &H_x : \overline{B_1} \to \overline{U_x} \text{ di classe } C^{k+2,\alpha}, \\ &H_x^{-1} = J_x : \overline{U_x} \to \overline{B_1} \text{ di classe } C^{k+2,\alpha}, \\ &H_x(B_1^+) = U_x \cap \Omega. \end{aligned}$$

Poniamo $V_x = H_x(B_{\frac{1}{2}})$. Inoltre, per ogni $x \in \Omega$ sia $B(x, 2R_x) \subset \Omega$. Per compattezza si ha

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_i) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}.$$

Posto $n = n_1 + n_2$, prendiamo $(\eta_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ partizione dell'unità relativa al ricoprimento ottenuto. Allora $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \eta_i u$.

Se $i \leq n_1$, dal Teorema 5.8.1 risulta $\eta_i u \in C^{k+2,\alpha}(B(x_i, R_{x_i}))$ e

$$\begin{aligned} \|\eta_i u\|_{k+2,\alpha,\Omega} &= \|\eta_i u\|_{k+2,\alpha,B(x_i,R_{x_i})} \\ &\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha) \Big(\|A(\eta_i u)\|_{k,\alpha,B(x_i,2R_{x_i})} \\ &\quad + \|\eta_i u\|_{\infty,B(x_i,2R_{x_i})} \Big) \\ &\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha) \left(\|A(\eta_i u)\|_{k,\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega} \right) \\ &\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha, \Omega) \left(\|Au\|_{k,\alpha,\Omega} + \|u\|_{k+2,\Omega} \right). \end{aligned}$$

Sia adesso $n_1 + 1 \leq i \leq n$. Consideriamo il cambio di variabile

$$v_i(y) := (\eta_i u)(H_i(y)), \quad y \in B_1^+$$

e osserviamo che $v_i \in C^{2,\alpha}(B_1^+)$ con $v_i = 0$ su $B_1 \cap \mathbb{R}^{N-1}$ e supp $v_i \subset B_{\frac{1}{2}}$. Indichiamo con $\tilde{A}_i$ l'operatore in B_1^+, ottenuto da A mediante il cambio di variabili considerato (per una rappresentazione esplicita vedi (5.34)). Notiamo che i coefficienti di $\tilde{A}_i$ appartengono a $C^{k,\alpha}(B_1^+)$. Inoltre, si ha che $A(\eta_i u)(x) = \eta_i(x) f(x) + B_i u(x) = g_i(x)$, dove B_i è un operatore differenziale del primo ordine con coefficienti che dipendono dal cambio di variabili e $g_i \in C^{1,\alpha}(U_{x_i} \cap \Omega)$ con supp $g_i \subset V_{x_i}$. Pertanto la funzione v_i soddisfa $(\tilde{A}_i v_i)(y) = \tilde{g}_i(y) := g_i(H_i(y)) \in C^{1,\alpha}(B_1^+)$ con supp $\tilde{g}_i \subset B_{\frac{1}{2}}$. Dalla Proposizione 5.8.3 segue che $v_i \in C^{3,\alpha}(B_{\frac{1}{2}}^+)$ e

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{3,\alpha,B_1^+} &\leq C(\nu_0, k_0, H_i) \left(\|\tilde{A} v_i\|_{1,\alpha,B_1^+} + \|v_i\|_{\infty,B_{\frac{1}{2}}^+} \right) \\ &\leq C(\nu_0, k_0, H_i) \left(\|A(\eta_i u)\|_{1,\alpha,U_{x_i}\cap\Omega} + \|\eta_i u\|_{\infty,U_{x_i}\cap\Omega} \right) \\ &\leq C(\nu_0, k_0, H_i) \left(\|\eta_i f\|_{1,\alpha,\Omega} + \|B_i u\|_{1,\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega} \right). \end{aligned}$$

Ne segue che $\eta_i u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$ e

$$\|\eta_i u\|_{3,\alpha,\Omega} \leq C(\nu_0, k_0, \Omega)\left(\|f\|_{1,\alpha,\Omega} + \|u\|_{3,\Omega}\right).$$

Ripetendo il procedimento un numero finito di passi, si trova che $\eta_i u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ e

$$\|\eta_i u\|_{k+2,\alpha;\Omega} \leq C(\|f\|_{k,\alpha;\Omega} + \|u\|_{k+2,\Omega}),$$

con $C = C(\nu_0, k_0, \alpha, k, \Omega)$.
Sommando su $i = 1, \cdots, n$, interpolando $\|u\|_{k+2,\Omega}$ tra $\|u\|_{k+2,\alpha,\Omega}$ e $\|u\|_{\infty,\Omega}$ e stimando quest'ultimo termine mediante il principio del massimo 3.1.9, concludiamo la dimostrazione. □