APPENDICE B

Il teorema di Stone Weierstrass

DEFINIZIONE B.1. *Siano X un insieme non vuoto e A un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni a valori reali (risp. complessi) su X. Si dice che A è un algebra funzionale reale (risp. complessa) se per ogni $f, g \in A$ si ha che $fg \in A$. Un sottospazio $B \subseteq A$ è detto una sottoalgebra di A se B è un algebra.*

ESEMPIO B.2. Sia X uno spazio topologico e sia $C(X, \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni reali e continue su X. $C(X, \mathbb{R})$ è un'algebra reale funzionale. Il sottospazio $BC(X, \mathbb{R})$ delle funzioni reali limitate e continue su X è una sottoalgebra di $C(X, \mathbb{R})$.

É noto che lo spazio $BC(X, \mathbb{R})$ dotato della norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad (f \in BC(X, \mathbb{R}))$$

è uno spazio di Banach.

DEFINIZIONE B.3. *Date le funzioni $f, g : X \to \mathbb{R}$, si indicano con $f \vee g$ e $f \wedge g$ le funzioni così definite*

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x),\ g(x)\}, \qquad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \qquad (x \in X)\,.$$

OSSERVAZIONE B.4. Si prova facilmente che

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \qquad f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}\,.$$

Quindi, se f e g sono funzioni reali continue su uno spazio topologico X, allora anche $f \vee g$ e $f \wedge g$ sono funzioni reali continue su X.

Per quello che segue è bene ricordare che

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N} \ \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}$$

e che

Lemma B.5. *Se $\alpha > 0$, allora per ogni $x \in [-1, 1]$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$$

e la convergenza della serie è totale in $[-1, 1]$.

Dim. Il comportamento della serie binomiale in $]-1,1[$ è un fatto ben noto La convergenza assoluta della serie binomiale in -1 e 1 segue dal criterio di Raabe osservando che

$$\lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|} - 1 \right) = 1 + \alpha\,. \quad \square$$

Teorema B.6. *Sia X uno spazio topologico e sia A una sottoalgebra di $BC(X, \mathbb{R})$. Allora la chiusura $\overline{A}$ di A rispetto alla norma $||\cdot||_\infty$ è una sottoalgebra di $BC(X, \mathbb{R})$. Inoltre, se $f, g \in \overline{A}$, allora $|f|$, $f \vee g$ e $f \wedge g \in \overline{A}$.*

Dim. Siano $f, g \in \overline{A}$. Allora esistono delle successioni $(f_n)_n,\ (g_n)_n \subset A$ tali che

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \qquad \text{e} \qquad \|g_n - g\|_\infty \to 0\,.$$

Poiché A è un'algebra, $(f_n + g_n)_n,\ (\alpha f_n)_n,\ (f_n g_n)_n \subset A$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dalle seguenti diseguaglianze

$$\begin{aligned}
\|f_n + g_n - f - g\|_\infty &\le \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \\
\|\alpha f_n - \alpha f\|_\infty &= |\alpha| \|f_n - f\|_\infty \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \\
\|f_n g_n - f g\|_\infty &= \|f(g - g_n) + g_n(f - f_n)\|_\infty \\
&\le \|f\| \|g - g_n\| + \|g_n\| \|f - f_n\|
\end{aligned}$$

segue che $f_n + g_n \to f + g$, $\alpha f_n \to \alpha f$ e $f_n g_n \to f g$ in $(BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ quando $n \to \infty$. Di conseguenza, anche $f + g,\ \alpha f,\ f g \in \overline{A}$. Abbiamo così provato che $\overline{A}$ è una sottoalgebra di $BC(X, \mathbb{R})$.
Sia ora $f \in \overline{A}$ con $\|f\| \neq 0$. Per provare che $|f| \in \overline{A}$, procediamo come segue.
Osserviamo che, per il Lemma B.5,

$$\forall t \in [0, 1] \quad \sqrt{t} = [1 + (t-1)]^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (t-1)^k$$

e che la convergenza della serie è uniforme su [0,1].
Posto $p_n(t) := \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} (t-1)^k$, allora p_n è un polinomio di grado n e $\lim_{n\to+\infty} p_n(0) = 0$. Di conseguenza, il polinomio $q_n := p_n - p_n(0)$ è omogeneo e $\lim_{n\to\infty} q_n(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t) - p_n(0) = \sqrt{t}$ uniformemente su $[0, 1]$. In particolare,

$$|t| = \sqrt{t^2} = \lim_{n\to\infty} q_n(t^2)$$

uniformemente su $[-1,1]$.
Poiché $\left|\frac{f}{\|f\|_\infty}\right| \leq 1$, possiamo scrivere che

$$\frac{|f|}{\|f\|_\infty} = \lim_{n\to\infty} q_n\left(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right) \quad \text{in } (BC(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)\,. \tag{B.1}$$

Dato che $f^2 \in \overline{A}$ così che $\frac{f^2}{\|f\|^2} \in \overline{A}$, anche $q_n\left(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right) \in \overline{A}$. Per (B.1) ne segue che $\frac{|f|}{\|f\|} \in \overline{A}$ e quindi che $|f| \in \overline{A}$. □

Definizione B.7. *Sia X un insieme non vuoto e sia A un insieme di funzioni reali definite su X. Si dice che A separa i punti di X se*

$$\forall x,y \in X,\ x \neq y,\ \ \exists f \in A\ \ f(x) \neq f(y).$$

Lemma B.8. *Sia X un insieme non vuoto e sia A uno spazio vettoriale di funzioni reali su X che separa i punti di X e che contiene le funzioni costanti. Allora*

$$\forall x,y \in X,\ x \neq y,\ \forall a,\, b \in \mathbb{R}\ \ \exists f \in A\ \ f(x) = a \ \text{ e } \ f(y) = b\,.$$

Dim. Siano $x, y \in X$ tali che $x \neq y$. Per ipotesi esiste $g \in A$ tale che $g(x) \neq g(y)$. Posto $f := a + \frac{b-a}{g(y)-g(x)}(g - g(x))$, la funzione $f \in A$ poiché è una combinazione lineare della funzione g e di funzioni costanti. Inoltre, la funzione f chiaramente verifica $f(x) = a$ e $f(y) = b$. □

Teorema B.9 (Teorema di Stone-Weierstrass - reale). *Siano X uno spazio topologico compatto e A una sottoalgebra di $C(X,\mathbb{R})$ che separa i punti di X e che contiene le funzioni costanti. Allora A è una sottoalgebra densa di $C(X,\mathbb{R})$.*

Dim. Fissati $f \in C(X,\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$, per provare che esiste $g \in A$ tale che $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ procediamo come segue.

Per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$ scegliamo $h_{x,y} \in A$ tale che $h_{x,y}(x) = f(x)$ e $h_{x,y}(y) = f(y)$. Nel caso in cui $x = y$, poniamo $h_{x,x} = f$. Consideriamo ora l'insieme così definito

$$V_{x,y} := \{t \in X \mid h_{x,y}(t) < f(t) + \varepsilon\}\,.$$

Allora x, $y \in V_{x,y}$ e $V_{x,y}$ è un sottoinsieme aperto di X. Infatti, la funzione $\phi := h_{x,y} - f$ è continua in X così che $V_{x,y} = \phi^{-1}(]-\infty,\varepsilon[)$ è un sottoinsieme aperto di X.
Dato che per ogni $x \in X$ la famiglia $\{V_{x,y} \mid y \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X, esistono $y_1, \ldots, y_n \in X$ tali che

$$X = V_{x,y_1} \cup \ldots \cup V_{x,y_n}\,.$$

A questo punto, per ogni $x \in X$ consideriamo la funzione così definita

$$g_x := h_{x,y_1} \wedge \cdots \wedge h_{x,y_m}\,.$$

Allora $g_x \in \overline{A}$ e $g_x(x) = f(x)$. Inoltre, se $t \in X$, esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $t \in V_{x,y_i}$. Di conseguenza, $g_x(t) \leq h_{x,y_i} < f(t) + \varepsilon$.
Per ogni $x \in X$ poniamo

$$W_x := \{t \in X :\ g_x(t) > f(t) - \varepsilon\}\,.$$

Procedendo come prima, si dimostra che $x \in W_x$ e che W_x è un sottoinsieme aperto di X. Allora $\{W_x \mid x \in X\}$ è anche un ricoprimento aperto di X. Pertanto, esistono $x_1, \ldots, x_m \in X$ tali che

$$X = W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m}\,.$$

Consideriamo ora la funzione così definita

$$g := g_{x_1} \vee \cdots \vee g_{x_m}\,.$$

Allora $g \in \overline{A}$. Inoltre, per ogni $t \in X$ esistono $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ tali che

$$g_x(t) = g_{x_i}(t) < f(t) + \varepsilon \quad \text{e} \quad t \in W_{x_j}$$

il che implica che

$$g_x(t) \geq g_{x_j}(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Pertanto, $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. □

Teorema B.10 (Teorema di approssimazione di Weierstrass). *Siano K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ e $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste un polinomio P tale che $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.*

Dim. Sia A l'insieme di tutti i polinomi del tipo

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_k \in \mathbb{R})$$

con dominio ristretto a K. Allora A è una sottoalgebra di $C(K)$ che contiene le funzioni costanti e che separa i punti di K (basta prendere $P(x) = x$). Per il teorema precedente segue quindi la tesi. □

Concludiamo con alcune considerazioni sulla validità del teorema di Stone-Weierstrass nel caso complesso.

Esempio B.11. Consideriamo un compatto $K \subseteq \mathbb{C}$ con parte interna $\text{int}(K)$ non vuota e l'insieme così definito

$$A := \{f \in C(X, \mathbb{C}) :\ \text{f analitica in } \text{int}(K)\}\,.$$

Allora A è una sottoalgebra di $C(X, \mathbb{C})$, contiene le funzioni costanti e separa i punti di K (basta considerare $f(z) = z$). Inoltre A è una sottoalgebra

chiusa di $C(X,\mathbb{C})$ poiché limiti uniformi di funzioni analitiche sono ancora funzioni analitiche. D'altro canto $A \neq C(X,\mathbb{C})$ poichè ad esempio $g(z) = |z| \notin A$. Quindi il teorema di Stone-Weierstrass non vale nel caso complesso nella formulazione appena vista.
Con un esempio più articolato si può provare anche che lo spazio dei polinomi complessi non è denso nello spazio delle funzioni continue complesse su un compatto di $\mathbb{C}$ (vedi [**15**]).

Teorema B.12 (Teorema di Stone-Weierstrass-complesso). *Siano X uno spazio topologico compatto e A una sottoalgebra di $C(X,\mathbb{C})$ che separa i punti di X, contiene le costanti ed è chiusa rispetto alla coniugazione, i.e., $\overline{f} \in A$ per ogni $f \in A$. Allora A è una sottoalgebra densa di $C(X,\mathbb{C})$.*

Dim. Sia $A_0 := \{\mathrm{Re} f \mid f \in A\}$. Allora A_0 è un sottospazio vettoriale di $C(X,\mathbb{R})$. In particolare, se $f \in A$, allora $\mathrm{Im}\, f = -\mathrm{Re}\, if \in A_0$ e, per ogni $f, g \in A$,

$$\mathrm{Re}\, f \cdot \mathrm{Re}\, g = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2}(fg + f\overline{g}) \in A_0 \,.$$

Pertanto, A_0 è una sottoalgebra di $C(X,\mathbb{R})$ che contiene le funzioni costanti. Inoltre, se $x, y \in X$, con $x \neq y$, esiste $h \in A$ tale che $h(x) \neq h(y)$. Questo implica che $\mathrm{Re}\, h(x) \neq \mathrm{Re}\, h(y)$ oppure $\mathrm{Im}\, h(x) \neq \mathrm{Im}\, h(y)$. Quindi A_0 separa i punti di X. Allora, per il teorema di Stone–Weierstass, possiamo concludere che A_0 è una sottoalgebra densa di $C(X,\mathbb{R})$.
Sia ora $f \in C(X,\mathbb{C})$. Per quanto appena provato, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $h_1,\ h_2 \in A_0$ tali che

$$\|\mathrm{Re}\, f - h_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|\mathrm{Im}\, f - h_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

da cui segue che $\|f - h_1 + ih_2\|_\infty < \varepsilon$. Questo completa la dimostrazione. □

Corollario B.13. *Siano K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ e $f : K \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Allora esiste un polinomio P a coefficienti complessi tale che $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.*

Dim. Sia A l'insieme di tutti i polinomi del tipo

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_k \in \mathbb{R})$$

con dominio ristretto a K. Allora A è una sottoalgebra di $C(K,\mathbb{C})$ che contiene le funzioni costanti, separa i punti di K (basta prendere $P(x) = x$) ed è chiusa rispetto alla coniugazione. Per il teorema precedente segue quindi la tesi. □

Corollario B.14. *Sia* $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$*. Allora lo spazio delle funzioni del tipo*

$$P(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k \qquad (a_k \in \mathbb{C})$$

è denso in $C(X, \mathbb{C})$*.*

Dim. Basta osservare che $\overline{z} = z^{-1}$ in X. $\square$

Corollario B.15. *Siano* K *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{C}$ *e* $f : K \to \mathbb{C}$ *una funzione continua. Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un polinomio* $P(x, y)$ *in due variabili a coefficienti complessi tale che* $\sup_K |f(z) - P(z, \overline{z})| < \varepsilon$*.*

Dim. Basta osservare che l'insieme delle funzioni del tipo $P(z, \overline{z})$, con P polinomio in due variabili a coefficienti complessi, è una sottoalgebra di $C(K, \mathbb{C})$ che verifica tutte le ipotesi del Teorema B.12. $\square$