ISSN 1561-2430 (print)
УДК 658.512.2

Поступила в редакцию 11.05.2017
Received 11.05.2017

Г. М. Левин, Б. М. Розин

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫПУСКА КОМПЛЕКТОВ ИЗДЕЛИЙ И ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ИХ ИЗГОТОВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНОГО СПРОСА

Рассматривается задача оптимизации на ряде временных интервалов программы выпуска производственной линией комплектов изделий нескольких наименований и интенсивностей их изготовления. Линия состоит из ряда линейно упорядоченных рабочих позиций без буферов. Заготовки из входной последовательности, состоящей из циклически повторяющихся идентичных подпоследовательностей (комплектов), обрабатываются последовательно одна за другой на каждой рабочей позиции линии в порядке их расположения, и в каждый момент времени на каждой позиции обрабатывается только одна заготовка. Работа линии состоит из тактов одновременной обработки на всех позициях всех расположенных на них заготовок соответствующими позициям и заготовкам наборами инструментов. Состав комплекта не изменяется от интервала к интервалу. Диапазоны возможных величин спроса на каждое изделие комплекта и распределение вероятностей спроса в этих диапазонах считаются известными для каждого временного интервала. В качестве целевой функции используется сумма производственных затрат, затрат на хранение невостребованных изделий и/или штрафов за неудовлетворенный спрос на них. Производственные затраты зависят от принимаемой интенсивности обработки и возрастают с увеличением количества комплектов, выпускаемых в текущем интервале. Затраты на хранение невостребованных изделий каждого наименования, а также штрафы за недопоставленные заказчикам изделия не убывают с ростом числа таких изделий. Предложен двухуровневый декомпозиционный метод решения задачи, основанный на идеях многошаговой оптимизации.

Ключевые слова: комплект изделий, размер партии, интенсивность обработки, случайный спрос, минимизация затрат, декомпозиционный метод

G. M. Levin, B. M. Rozin

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

OPTIMIZING THE OUTPUT OF PRODUCT BATCHES AND INTENSITY OF THEIR MANUFACTURE UNDER RANDOM DEMAND

The problem of optimizing the output of multi-product batch and the intensities of its items manufacture in the production line over a number of time intervals is considered. The line has a linearly ordered multiple positions without buffers. Workpieces of the input sequence composed of cyclically repeated identical subsequences (batches) are processed consecutively one by one in each working position in the order of their location in the line. Only a single workpiece is disposed in each position at each time point. The operation of the line consists of takts of simultaneous processing of all workpieces located in respective positions by the sets of tools corresponding to workpieces and positions. The composition of a batch does not vary from interval to interval. The ranges of possible demand quantities for each product and the probability distribution of the demand in these ranges are assumed known for each time interval. The sum of manufacturing cost, costs of storage and/or penalties for unmet demand on products is used as objective function. Manufacturing cost depends on processing intensities to be defined and increases with an increase in the number of batches produced in the current interval. Storage cost of unclaimed product units as well as penalty for product units not supplied to the customer do not decrease with the increase of number of such units. A two-level decomposition method for solving the problem based on the ideas of multi-step optimization is proposed.

Keywords: batch of products, lot size, processing intensity, random demand, cost minimization, decomposition method

Введение. Задачам планирования производства партий изделий с учетом затрат на их выпуск и хранение посвящен ряд исследований (см., напр., [1–4]). Бо́льшая их часть касается выпуска изделий одного наименования. Вместе с тем внимание многих исследователей привлекают также задачи планирования размера партий для одновременного выпуска группы различных изделий. Для решения задач рассматриваемого типа с ограниченной производственной мощностью, являющихся NP-трудными [4], наиболее часто используются методы динамического программирования. В рассмотренных в литературе постановках задач как правило затраты на выпуск определяются известной функцией от его объема.

В работе [5] исследуется комплексная задача совместной оптимизации программы выпуска группы изделий постоянного состава (далее – комплекта изделий) и интенсивностей их изготовления на заданном горизонте планирования при известных величинах спроса на изделия комплекта в каждом временном интервале. Предполагается, что изделия производятся на многопозиционной производственной линии конвейерного типа и имеется возможность оптимизировать интенсивность их изготовления на каждой позиции с учетом планируемой программы выпуска в данном временном интервале. Помимо затрат на изготовление, учитываются также затраты на хранение их невостребованной части и штрафы за недопоставленные вовремя изделия. Допускается отложенный спрос, т. е. недопоставленные изделия могут быть поставлены заказчикам в следующих временных интервалах.

Поскольку во многих ситуациях прогнозировать спрос можно лишь с некоторой вероятностью, зависящей от условий рынка, значительный интерес представляют исследования, в которых спрос на выпускаемые изделия является случайным.

Исследованию стохастических многопродуктовых задач планирования размера выпуска производственной системой на конечном наборе временных интервалов при случайном спросе посвящены, в частности, работы [6–8]. В этих исследованиях допускался отложенный спрос на невыполненные заказы. В [6] неопределенность спроса моделировалась деревом сценариев, что позволило свести задачу к многостадийной смешанной целочисленной задаче стохастического программирования с рекурсией. Предложены основанная на локализации производства формулировка модели и эвристический подход к решению задачи, базирующийся на стратегии фиксации переменных и ослабления ограничений. В [7] целевая функция общих затрат включала стоимость переналадки для серийного производства, стоимость хранения запасов и издержки, связанные с дефицитом. Разработана модель ожидаемых затрат в расчете на единицу времени. Показано, что при некоторых условиях приближенная функция стоимости является выпуклой. В статье [8] особое внимание уделялось оперативности выполнения заказов. Предложена эвристическая процедура решения задачи, являющаяся обобщением для условий случайного спроса эвристики, введенной в [9] для детерминированной задачи планирования размера партий.

Ниже рассмотренная в [5] задача решается в более общей постановке, когда возможный спрос на изделия комплекта является случайным, определяемым заданными функциями распределения, причем эти функции предполагаются взаимно независимыми и различными как для разных изделий комплекта, так и для разных временных интервалов. В качестве основных отличий исследуемой постановки от известных можно отметить следующие. Во-первых, состав комплекта не изменяется от интервала к интервалу (что определяется спецификой используемой производственной линии), в то время как случайно реализуемые объемы спроса на различные изделия комплекта в различных временных интервалах не связаны между собой. Во-вторых, решения о размере выпуска в любом временном интервале принимаются одновременно с выбором интенсивностей изготовления изделий, определяющих как возможность изготовления планируемого количества комплектов, так и стоимость их выпуска. С учетом отсутствия взаимосвязей между функциями распределения спроса на различные изделия комплекта рассматриваемая задача занимает промежуточное место между многопродуктовыми и однопродуктовыми стохастическими задачами.

Получаемые с помощью предлагаемого подхода решения могут быть использованы, в частности, для корректировки в начале каждого очередного временного интервала ранее запланированных программ выпуска комплектов изделий и интенсивностей их изготовления исходя из уточненного (по текущей информации) возможного вероятностного спроса на различные изделия комплекта.

1. Постановка задачи и математическая модель. Рассматривается задача управления программой выпуска и интенсивностью изготовления заданного множества $D = \{1,2,\ldots, m\}$ изделий на временных интервалах $T_1,\ldots,T_t,\ldots,T_n$ горизонта планирования $T = \sum_{t=1}^{n} T_i$ с учетом случайного спроса на различные изделия, затрат на их производство, затрат на хранение невостребованных изделий и/или штрафов за неудовлетворенный вовремя спрос на некоторые из них. Предполагается, что изделия выпускаются идентичными комплектами, каждый из которых включает h_d изделий $d \in D$, $\sum_{d \in D} h_d = h.$

Диапазоны $L_{dt} = [\underline{\lambda}_{dt}, \overline{\lambda}_{dt}]$ возможного спроса λ_{dt} на каждое из изделий $d \in D$ в интервалах $t = 1,\ldots,n$ и функции распределения $P_{dt}(\lambda_{dt})$ этого спроса на L_{dt} предполагаются заданными, причем все λ_{dt} считаются взаимно независимыми случайными величинами и $0 \le \underline{\lambda}_{dt} \le \overline{\lambda}_{dt}$.

Для каждого изделия $d \in D$ задано также число y_{d0}, обозначающее количество таких изделий либо на хранении (при $y_{d0} > 0$) или недопоставленных заказчикам (при $y_{d0} < 0$) к моменту планирования (т. е. к началу временного интервала $t = 1$).

В результате выпуска комплектов и поставок заказчикам различных изделий из их состава к концу каждого интервала $t = 1,\ldots,n$ может образоваться некоторое количество y_{dt} либо уже произведенных и невостребованных заказчиками ($y_{dt} > 0$), либо недопоставленных заказчкам ($y_{dt} < 0$) изделий $d \in D$. Функции $H_{dt}(y_{dt})$ средних затрат на хранение невостребованных изделий или штрафов за недопоставленные изделия $d \in D$ в интервале t предполагаются известными для каждого интервала $t = 1,\ldots,n$, причем эти функции не возрастают при $y_{dt} < 0$, не убывают при $y_{dt} > 0$ и $H_{dt}(0) = 0$.

На момент планирования y_{dt} для всех $d \in D$, $t = 1,\ldots,n$, являются взаимно независимыми случайными величинами, определяемыми как планируемой программой $x_1,\ldots,x_t$ выпуска комплектов, так и возможным спросом λ_{dr} на изделие $d \in D$ в предыдущие (включая текущий) временные интервалы $r = 1,\ldots,t$, т. е.

$$y_{dt} = y_{d0} + \sum_{r=1}^{t} h_d x_r - \Lambda_{dt},$$

где $\Lambda_{dt} = \sum_{r=1}^{t} \lambda_{dr}$ – случайный кумулятивный спрос на это изделие за первые t интервалов. Для всех $t = 1,\ldots,n$ в силу независимости случайных величин $\lambda_{dr} \in L_{dr}$ функции распределения $\overline{P}_{dt}(\Lambda_{dt})$ величин Λ_{dt} в диапазоне $\overline{\Lambda}_{dt} = [\Lambda^1_{dt}, \Lambda^2_{dt}]$ их возможных значений определяются сверткой (см., напр., [10]) заданных функций распределения $P_{dr}(\lambda_{dr})$ возможного спроса λ_{dr} в интервалах $r = 1,\ldots,t$, где $\Lambda^1_{dt} = \sum_{r=1}^{t} \underline{\lambda}_{dr}$ и $\Lambda^2_{dt} = \sum_{r=1}^{t} \overline{\lambda}_{dr}$.

Изготовление комплектов осуществляется на многопозиционной производственной линии конвейерного типа, состоящей из ряда линейно упорядоченных рабочих позиций [5, 11]. Заготовка каждого изделия комплекта последовательно в этом порядке обрабатывается на каждой рабочей позиции, причем в каждый момент времени на каждой позиции может обрабатываться лишь одно изделие. Один такт работы линии состоит в одновременной обработке на каждой из рабочих позиций единственного соответствующего (такту и позиции) изделия.

После завершения любого такта обрабатываемые изделия со своих позиций синхронно перемещаются на следующие, изделие с последней рабочей позиции поступает на позицию разгрузки, а на первую рабочую позицию поступает очередное изделие последовательности. Одновременно на линии могут находиться изделия из нескольких (идентичных) комплектов. Цикл изготовления одного комплекта состоит из h тактов и может включать идентичные такты (характеризуемые идентичным расположением изделий на всех рабочих позициях с соответствующей их одинаковой обработкой). В дальнейшем $I = \{1,\ldots,\eta\}$ – множество номеров различных тактов и k_i – количество идентичных тактов $i \in I$ в цикле, $\sum_{i \in I} k_i = h.$

Изготовление изделия на каждой рабочей позиции может осуществляться одним либо одновременно несколькими (соответствующими позиции и изделию) не связанными между собой блоками инструментов, причем все инструменты одного блока работают параллельно и имеют общий параметр интенсивности обработки (например, минутную подачу). Таким образом, каждый такт $i \in I$ заключается в одновременной обработке различных изделий соответствующим подмножеством J_i блоков (инструментов) из множества J блоков, установленных на линии, причем такт i может включать обработку m_{ij} идентичными блоками $j \in J_i$. Подмножества блоков из семейства $\{J_1,\ldots,J_i,\ldots,J_\eta\}$

могут пересекаться и $\bigcup_{i=1}^{\eta} J_i = J.$ Далее под парой ij подразумевается блок $j \in J$, выполняющий в такте $i \in I$ обработку соответствующего (позиции, на которой блок выполняет обработку, и такту) изделия комплекта.

Обработка каждым блоком инструментов в некотором такте связана с расходом соответствующих возобновляемых ресурсов (в частности, инструментов, изнашиваемых в процессе обработки). Скорость расхода ресурса зависит как от объема обработки, так и от интенсивности ее выполнения [5, 11]. Восстановление любого из ресурсов (в частности, смена инструментов) осуществляется после его полного расходования (износа) по завершении такта, во время которого это произошло. Выполнение очередного такта может начаться лишь после выполнения процесса восстановления соответствующего ресурса (смены инструментов).

В данной работе предполагается, что выбираемая интенсивность обработки изделий блоком $j \in J$ остается одинаковой для всех обрабатываемых им изделий комплекта, т. е. не изменяется от такта к такту в течение текущего временного интервала t, $t = 1,\ldots,n$. Обозначим эту интенсивность (являющуюся искомым параметром) через z_{jt} и положим $z_t = (z_{jt}|j \in J)$ и $z = (z_t|t = 1,\ldots,n)$.

Предельное количество $\overline{x}_t$ комплектов, которое может быть выпущено в интервале $t = 1,\ldots,n,$ исходя из производственных условий, предполагается известным.

Для пар $ij \in G = \{ij|i \in I, j \in J_i\}$ считаются заданными следующие параметры:

– объем V_{ij} обработки изделий блоком j в такте i;

– отрезок $[z_{1jt}, z_{2jt}]$ возможных значений интенсивности z_{jt} в интервале t;

– определенные на этом отрезке функции $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$, представляющие зависимости от принимаемой интенсивности z_{jt} отнесенных к единице объема затрат (включая затраты на ресурсы и их восстановление) на обработку изделий блоком j в такте i и времени восстановления ресурсов соответственно.

При фиксированном значении

$$z_t \in \boldsymbol{Z}_t = \prod_{j \in J} \left[z_{1jt}, z_{2jt} \right]$$

длительность обработки в интервале t изделия блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и длительность этого такта равны $V_{ij}z_{jt}$ и $\max\{V_{ij}z_{jt}|j \in J_i\}$ соответственно, а затраты на обработку изделия блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и затраты времени на восстановление ресурсов, отнесенные к этой обработке, равны соответственно $V_{ij}f_{ijt}(z_{jt})$ и $V_{ij}\varphi_{ijt}(z_{jt})$.

Общие затраты (как материальные, так и временные) на выполнение каждого из тактов $i \in I$ помимо суммарных затрат по всем составляющим его блокам включают также дополнительные затраты. В достаточно общем случае можно принять, что эти дополнительные затраты представляются линейными функциями длительности такта. Параметры E_{1it}, E_{2it}, R_{1it} и R_{2it} указанных линейных зависимостей для каждого интервала $t \in \{1,\ldots,n\}$ предполагаются заданными.

Таким образом, при принятых предположениях общие затраты $F_{1t}(z_t)$ на выполнение всех тактов одного цикла обработки комплекта и общая длительность $F_{2t}(z_t)$ цикла в интервале t в зависимости от значения $z_t \in \boldsymbol{Z}_t$ определяются следующими соотношениями:

$$F_{1t}(z_t) = \sum_{i \in I} k_i \left(E_{1it} + E_{2it} \max_{j \in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j \in J_i} m_{ij} V_{ij} f_{ijt}(z_{jt}) \right),$$

$$F_{2t}(z_t) = \sum_{i \in I} k_i \left(R_{1it} + R_{2it} \max_{j \in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j \in J_i} m_{ij} V_{ij} \varphi_{ijt}(z_{jt}) \right).$$

Выбранные для интервала t интенсивности z_t однозначно определяют максимальное количество $\tilde{x}_t(z_t) = \min\{\overline{x}_t, T_t / F_{2t}(z_t)\}$ комплектов, которые могут быть выпущены в этом интервале.

Введем функцию средних общих затрат за период планирования на выпуск комплектов изделий, хранение невостребованных изделий и штрафы за недопоставленные заказчикам в срок изделия при фиксированных количествах $x = (x_1,\ldots,x_n)$ выпущенных комплектов и интенсивностях $z = (z_t|t = 1,\ldots,n)$ их изготовления за этот период:

$$\Psi(x,z) = \sum_{t=1}^{n} F_{1t}(z_t)x_t + \sum_{t=1}^{n}\sum_{d\in D} M_{\Lambda_{dt}}\left\{H_{dt}\left(h_d\sum_{r=1}^{t} x_r - \Lambda_{dt}\right)\right\}, \tag{1}$$

где $M_a\{g(\cdot)\}$ – математическое ожидание значения функции $g(\cdot)$ случайной величины a.

С учетом изложенного рассматриваемая задача определения оптимальных (в совокупности) программы x выпуска комплектов изделий и интенсивностей z их обработки в каждом интервале времени $t = 1,\ldots,n$ в условиях случайного спроса и ограниченной пропускной способности производственной линии сводится к следующей задаче математического программирования:

$$\Psi(x,z) \to \min, \tag{2}$$

$$F_{2t}(z_t)x_t \le T_t,\ \ t = 1,\ldots,n, \tag{3}$$

$$x_t \in [0, \overline{x}_t],\ \ t = 1,\ldots,n, \tag{4}$$

$$z_t \in \boldsymbol{Z}_t,\ \ t = 1,\ldots,n. \tag{5}$$

В задаче (2)–(5) целевая функция (2) представляет зависимость средних суммарных затрат от объема выпуска комплектов изделий с учетом характера спроса на изделия на всех интервалах горизонта планирования. Ограничение (3) обеспечивает возможность выпуска в интервале t планируемого количества комплектов изделий. Задачу (2)–(5) будем называть в дальнейшем задачей **A**.

Следует отметить, что в реальных ситуациях необходимость решения задачи **A** может возникать по завершении каждого временного интервала t, когда уже известны фактические значения $\tilde{\lambda}_{dr}$ спроса на интервалах $r = 1,\ldots,t$ на изделия $d \in D$ и могут быть уточнены функции распределения спроса на каждое из изделий в последующих интервалах. Поскольку количество y_{dt} невостребованных заказчиками либо недопоставленных им изделий $d \in D$ к концу периода t равно

$$y_{d0} + \sum_{r=1}^{t}(h_d x_r - \tilde{\lambda}_{dr}),$$

то задачу планирования на оставшиеся временные интервалы можно рассматривать как задачу **A** на $n - t$ интервалах $t + 1,\ldots,n$ с исходными величинами y_{dt} вместо y_{d0} и уточненными функциями распределения спроса на этих интервалах.

2. Методы решения. Для решения задачи **A** можно воспользоваться декомпозиционной схемой, укрупненно представленной на рисунке:

– на нижнем уровне для некоторой фиксированной программы выпуска $x = (x_1,\ldots,x_n)$ и каждого $t = 1,\ldots,n$ решается автономная подзадача $\mathbf{B}_t(x_t)$ по определению оптимальных (для этой программы) значений $z_t^*(x_t)$ интенсивностей;

– на верхнем уровне решается координирующая подзадача **C** по определению оптимальной программы x^* выпуска комплектов изделий для всех интервалов горизонта планирования с учетом неопределенности спроса на изделия, совокупности всех рассматриваемых затрат и пропускной способности производственной линии в каждом из интервалов.

При формировании предлагаемой схемы решения задачи **A** использованы общие идеи декомпозиции оптимизационных задач (см., в частности, обзор в [11]).

Нетрудно показать, что если $z_t^*(x_t)$ являются решениями подзадач $\mathbf{B}_t(x_t)$ для $t = 1,\ldots,n$ и $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ – решение подзадачи **C**, то $(x^*,z^*(x^*))$ – решение задачи **A**. Здесь предполагается, что $R_t(x_t) = \infty$, если для некоторого значения x_t подзадача $\mathbf{B}_t(x_t)$ не имеет решения.

Задача **C**:

$$\sum_{t=1}^{n}(R_t(x_t)+\sum_{i\in I}k_iE_{1it})x_t+\sum_{t=1}^{n}\sum_{d\in D}M_{\Lambda_{dt}}\{H_{dt}(h_d\sum_{r=1}^{t}x_r-\Lambda_{dt})\}\to\min,\ (=\Psi^*)$$

$$x_t\in[0,\overline{x}_t],\quad t\in[1,n].$$

$$\downarrow x_t \qquad\qquad \uparrow R_t(x_t)$$

Задача $\mathbf{B}_t(x_t)$:

$$\Phi_{1t}(z_t)=\sum_{i\in I}k_i(E_{2it}\max_{j\in J_i}\{V_{ij}z_{jt}\}+\sum_{j\in J_i}m_{ij}V_{ij}f_{ijt}(z_{jt}))\to\min,\ (=R_t(x_t))$$

$$\Phi_{2t}(z_t)=\sum_{i\in I}k_i(R_{2it}\max_{j\in J_i}\{V_{ij}z_{jt}\}+\sum_{j\in J_i}m_{ij}V_{ij}\varphi_{ijt}(z_{jt}))\le T_t/x_t-\sum_{i\in I}k_iR_{1it}$$

$$z_t\in\boldsymbol{Z}_t,\qquad x_t=\text{const}.$$

Декомпозиционная схема решения задачи **A**

Decomposition scheme for solving the problem **A**

Если функции $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$ выпуклы на отрезках $[z_{1jt},z_{2jt}]$ для всех $i\in I, j\in J_i$ и $t=1,\ldots,n$ (что имеет место во многих реальных ситуациях), то подзадачи $\mathbf{B}_t(x_t)$ являются задачами выпуклого программирования. Для их решения могут быть использованы соответствующие известные методы и реализующие их пакеты программ. В частности, эти подзадачи могут быть сведены к задачам линейного программирования посредством аппроксимации функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$ кусочно-линейными функциями [12], причем, если функции $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$ одинаковы для всех интервалов t, то эти аппроксимации не зависят от t.

В свою очередь, подзадача **C** может решаться как задача многошаговой оптимизации.

Для описания такого подхода к решению подзадачи **C** введем следующие дополнительные обозначения:

– $s_t=\sum_{r=1}^{t}x_r$ – кумулятивное число выпущенных комплектов изделий за t временных интервалов, принимаемое в качестве состояния многошагового процесса после шага $t=1,\ldots,n$, $s_t\in\left[0,\overline{s}_t=\sum_{r=1}^{t}\overline{x}_r\right]$;

– $\tilde{H}_{dt}(s_t)=M_{\Lambda_{dt}}\{H_{dt}(h_ds_t-\Lambda_{dt})\}$ – математическое ожидание затрат в интервале t на хранение невостребованных изделий либо на штрафы за недопоставленные изделия $d\in D$ для состояния s_t;

– $\Theta_t(s_t)$ – наименьшее значение функции $\sum_{r=1}^{t}\left(R_r(x_r)+\sum_{i\in I}k_iE_{1ir}\right)x_r+\sum_{r=1}^{t}\sum_{d\in D}\tilde{H}_{dr}(s_r)$ средних суммарных затрат по всем таким программам выпуска $x^t=(x_1,\ldots,x_r,\ldots,x_t)$, что $x_r\in\left[0,\overline{x}_r\right]$ для всех $r=1,\ldots,t$ и $\sum_{r=1}^{t}x_r=s_t$.

Поскольку $\Psi^*=\min\left\{\Theta_n(s_n)\,|\,s_n\in\left[0,\overline{s}_n\right]\right\}$, то решение подзадачи **C** может быть получено с использованием следующего рекуррентного соотношения динамического программирования:

$$\Theta_t(s_t)=\min\{\Theta_{t-1}(s_{t-1})+\left(R_t(s_t-s_{t-1})+\sum_{i\in I}k_iE_{1it}\right)\times$$

$$\times(s_t-s_{t-1})+\sum_{d\in D}\tilde{H}_{dt}(s_t)\,|\,s_{t-1}\in[0,\overline{s}_{t-1}],s_t-s_{t-1}\in[0,\overline{x}_t]\},\tag{6}$$

$$s_t\in\left[0,\overline{s}_t\right],\quad t=1,\ldots,n,$$

где $\Theta_0(0)=0$.

Трудоемкость решения исходной задачи **A** по предлагаемой декомпозиционной схеме складывается из трудоемкостей трех основных компонент: вычисления значений функций $R_t(x_t)$ (решение подзадач $\mathbf{B}_t(x_t)$ нижнего уровня) и функций $\sum_{d\in D}\tilde{H}_{dt}(s_t)$ для различных значений $x_t\in[0,\overline{x}_t]$ и $s_t\in\left[0,\overline{s}_t=\sum_{r=1}^{t}\overline{x}_r\right]$ $t=1,\ldots,n$, а также решения подзадачи **C** верхнего уровня при известных значениях этих функций. Поскольку достаточно однократного вычисления функций $R_t(x_t)$ и $\sum_{d\in D}\tilde{H}_{dt}(s_t)$ для каждых $x_t\in[0,\overline{x}_t]$, $s_t\in[0,\overline{s}_t]$ и $t=1,\ldots,n$, то число вычисляемых значений функций $R_t(x_t)$ и $\tilde{H}_{dt}(s_t)$ не превосходит $\sum_{t=1}^{n}\overline{x}_t$ и $m\sum_{t=1}^{n}\sum_{r=1}^{t}\overline{x}_r$ соответственно.

Трудоемкость решения подзадачи $\mathbf{B}_t(x_t)$ при фиксированных $x_t\in[0,\overline{x}_t]$, и $t=1,\ldots,n$ определяется структурой и параметрами процесса обработки комплекта изделий на производственной линии (т. е. числом $|I|$ различных тактов в цикле обработки комплекта, количествами $|J_i|$ и составом соответствующих блоков инструментов в тактах), а также сложностью вычисления функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$ зависимости материальных и временных затрат на обработку изделий блоком инструментов от искомой интенсивности обработки z_{jt}, $i\in I, j\in J_i$. В первом приближении можно считать число операций, необходимое для вычисления значений $R_t(x_t)$, не зависящим от параметров x_t. Тогда зависимость трудоемкости вычисления функций $R_t(x_t)$ от параметров n, $\overline{x}_t$, $t=1,\ldots,n$, задачи **A** можно оценить как

$$O\left(\sum_{t=1}^{n}\overline{x}_t\right).$$

В свою очередь трудоемкость вычисления функций $\tilde{H}_{dt}(s_t)$ для фиксированного $s_t\in[0,\overline{s}_t]$ определяется сложностью функций $H_{dt}(y_{dt})$ затрат на хранение невостребованных изделий или штрафов за недопоставленные изделия $d\in D$ в интервале t, диапазонами $L_{dt}=[\underline{\lambda}_{dt},\overline{\lambda}_{dt}]$ возможных значений спроса λ_{dt} и видом функций $P_{dt}(\lambda_{dt})$ распределения этого спроса λ_{dt}, $d\in D$, $t=1,\ldots,n$.

При предположении, что сложность вычисления функций $H_{dt}(y_{dt})$ не зависит от y_{dt}, $t=1,\ldots,n$, трудоемкость вычисления $\tilde{H}_{dt}(s_t)$ можно оценить как

$$O\left(\sum_{r=1}^{t}(\overline{\lambda}_{dr}-\underline{\lambda}_{dr})\right),$$

а зависимость трудоемкости вычисления $\sum_{d\in D}\tilde{H}_{dt}(s_t)$ от параметров m, n, $\overline{x}_t$, $t=1,\ldots,n$, задачи для различных значений $s_t\in\left[0,\sum_{r=1}^{t}\overline{x}_r\right]$ – как

$$O\left(m\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{t}\overline{x}_r\sum_{r=1}^{t}(\overline{\lambda}_{dr}-\underline{\lambda}_{dr})\right)\right).$$

Наконец, при решении подзадачи **C** необходимая для хранения значений функций $R_t(x_t)$ и $\sum_{d\in D}\tilde{H}_{dt}(s_t)$ память может быть оценена как

$$O\left(\sum_{t=1}^{n}\sum_{r=1}^{t}\overline{x}_r\right),$$

а трудоемкость реализации соотношения (6) при известных значениях этих функций – как

$$O\left(\sum_{t=1}^{n}\overline{x}_t\sum_{r=1}^{t-1}\overline{x}_r\right)$$

операций.

При большой трудоемкости точного решения подзадачи **C** ее приближенное решение может быть получено с использованием известных приближенных методов многошаговой оптимизации, в частности метода «плавающих трубок». В этом случае может потребоваться существенно меньшее число вычислений значений функций $R_t(x_t)$ и $\tilde{H}_{dt}(s_t)$. На первом этапе решения можно ограничиться рассмотрением лишь таких программ выпуска $x = (x_1,\ldots,x_t,\ldots,x_n)$, что для всех $t = 1,\ldots,n$ значение $x_t \geq \underline{x}_t$ и x_t кратно a, где $\underline{x}_t$ и a – некоторые выбираемые константы. Очевидно, что в этом случае пространство состояний оптимизируемого многошагового процесса будет образовано лишь такими $s_t \in \left[\sum_{r=1}^{t} \underline{x}_r, \sum_{r=1}^{t} \overline{x}_r\right]$, которые кратны принятому числу a, $t = 1,\ldots,n$.

Заключение. Рассмотрена задача оптимизации средней стоимости серийного выпуска комплекта изделий нескольких наименований и интенсивностей обработки заготовок изделий набором блоков инструментов на многопозиционной производственной линии ограниченной мощности на ряде временных интервалов. При расчете средней стоимости выпуска учитываются суммарные затраты на изготовление комплектов и математическое ожидание затрат на хранение невостребованных в текущем интервале уже произведенных изделий и штрафов за недопоставленные заказчику вовремя изделия в условиях случайного спроса на них.

Предложена двухуровневая декомпозиционная схема решения этой задачи. На нижнем уровне для каждого временного интервала решаются подзадачи оптимизации интенсивностей обработки изделий соответствующими блоками инструментов при фиксированном объеме выпуска. На верхнем уровне методом динамического программирования оптимизируются количества выпускаемых комплектов для всех интервалов. Если зависимости удельных (отнесенных к единице объема) затрат на обработку изделий от принимаемой ее интенсивности представляются для каждого блока инструментов выпуклыми функциями, то подзадачи нижнего уровня являются задачами выпуклого программирования. Отмечается один из эффективных подходов к их решению.

В дальнейшем предполагается исследовать более общие постановки рассмотренной выше задачи, в которых, в частности,

учитывается влияние интенсивности изготовления изделий на количество брака, причем это влияние может быть различным для разных изделий,

фактический спрос и степень его удовлетворения на отдельные изделия в начальные временные интервалы влияет на последующих интервалах как на возможный спрос на эти изделия, так и на штрафы за их возможную недопоставку.

Список использованных источников

1. Karimi, B. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms / B. Karimi, S. Fatemi Ghomi, J. M. Wilson // Omega. – 2003. – Vol. 31, № 5. – P. 365–378.

2. Ullah, H. A Literature Review on Inventory Lot Sizing Problems / H. Ullah, S. Parveen // Global Journal of Researches in Engineering. – 2010. – Vol. 10, № 5. – P. 21–36.

3. Jans, R. Modeling industrial lot sizing problems: a review / R. Jans, Z. Degraeve // Int. J. Prod. Res. – 2008. – Vol. 46, № 6. – P. 1619–1643.

4. Ng, C. T. A simple FPTAS for a single-item capacitated economic lot-sizing problem with monotone cost structure / C. T. Ng, M. Y. Kovalyov, T. C. E. Cheng // Eur. J. Oper. Res. – 2010. – Vol. 200, № 2. – P. 621–624.

5. Левин, Г. М. Оптимизация выпуска и интенсивностей обработки группы деталей при нестационарном спросе / Г. М. Левин, Б. М. Розин, А. Б. Долгий // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016.– № 3. – С. 102–109.

6. Brandimarte, P. Multi-item capacitated lot-sizing with demand uncertainty / P. Brandimarte // Int. J. Prod. Res. – 2006. – Vol. 44, № 15. – P. 2997–3022.

7. Lee, S.-D. Economic lot sizing in a production system with random demand / S.-D. Lee, C.-M. Yang, S.-C. Lan // Int. J. Prod. Res. – 2016. – Vol. 47, № 5. – P. 1142–1154.

8. Tempelmeier, H. ABCβ - a heuristic for dynamic capacitated lot sizing with random demand under a fillrate constraint / H. Tempelmeier, S. Herpers // Int. J. Prod. Res. – 2010. – Vol. 48, № 17. – P. 5181–5193.

9. Maes, J. Multi Item Single Level Capacitated Dynamic Lotsizing Heuristics: A Computational Comparison (Part II: Rolling Horizon) / J. Maes, L. N. Van Wassenhove // IIE Transactions. – 1986. – Vol. 18, № 2. – P. 124–129.

10. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

11. Левин, Г. М. Декомпозиционные методы оптимизации проектных решений / Г. М. Левин, В. С. Танаев. – Минск: Наука и техника, 1978. – 240 с.

12. Левин, Г. М. Линейная аппроксимация задачи оптимизации интенсивностей последовательно-параллельного выполнения пересекающихся множеств операций / Г. М. Левин, Б. М. Розин, А. Б. Долгий // Информатика. – 2014. – № 3. – С. 44–51.

References

1. Karimi B., Fatemi Ghomi S., Wilson J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, 2003, vol. 31, no. 5, pp. 365–378. Doi: 10.1016/s0305-0483(03)00059-8

2. Ullah H., Parveen S. A Literature Review on Inventory Lot Sizing Problems. *Global Journal of Researches in Engineering*, 2010, vol. 10, no. 5, pp. 21–36.

3. Jans R., Degraeve Z. Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research*, 2008, vol. 46, no. 6, pp. 1619–1643. Doi: 10.1080/00207540600902262

4. Ng C. T., Kovalyov M. Y., Cheng T. C. E. A simple FPTAS for a single-item capacitated economic lot-sizing problem with monotone cost structure. *European Journal of Operational Research*, 2010, vol. 200, no. 2, pp. 621–624. Doi: 10.1016/j.ejor.2009.01.040

5. Levin G. M., Rozin B. M., Dolgui A. B. Optimizing the output and the intensities of processing a batch of parts under non-stationary demand. *Vestsi Natsyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fisika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2016, no. 3, pp. 102–109 (in Russian).

6. Brandimarte P. Multi-item capacitated lot-sizing with demand uncertainty. *International Journal of Production Research*, 2006, vol. 44, no. 15, pp. 2997–3022. Doi: 10.1080/00207540500435116

7. Lee S.-D., Yang C.-M., Lan S.-C. Economic lot sizing in a production system with random demand. *International Journal of Systems Science*, 2014, vol. 47, no. 5, pp. 1142–1154. Doi: 10.1080/00207721.2014.915354

8. Tempelmeier H., Herpers S. ABCβ - a heuristic for dynamic capacitated lot sizing with random demand under a fillrate constraint. *International Journal of Production Research*, 2010, vol. 48, no. 17, pp. 5181–5193. Doi: 10.1080/00207540903179782

9. Maes J., Van Wassenhove L. N. Multi Item Single Level Capacitated Dynamic Lotsizing Heuristics: A Computational Comparison (Part II: Rolling Horizon). *IIE Transactions*, 1986, vol. 18, no. 2, pp. 124–129. Doi: 10.1080/07408178608975339

10. Gnedenko B. V. *Probability theory course*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2005. 448 p. (in Russian).

11. Levin G., Tanaev V. *Decomposition techniques for optimization of design decisions*. Minsk, Nauka i Technika Publ., 1978. 240 p. (in Russian).

12. Levin G. M., Rozin B. M., Dolgui A. B. Linear approximation for intensities optimization problem of sequential-parallel execution of intersecting operation sets. *Informatika* [Informatics], 2014, no. 3, pp. 44–51. (in Russian).

Информация об авторах

Левин Генрих Моисеевич – доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории исследования операций, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, г. Минск, 220012, Республика Беларусь). E-mail: levin@newman.bas-net.by

Розин Борис Матвеевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории исследования операций, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, г. Минск, 220012, Республика Беларусь). E-mail: rozin@newman.bas-net.by

Information about the authors

Levin Genrikh Moiseevich – D. Sc. (Engineering), Principle Researcher of the Operational Research Laboratory, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: levin@newman.bas-net.by

Rozin Boris Matveevich – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher of the Operational Research Laboratory, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rozin@newman.bas-net.by

Для цитирования

Левин, Г. М. Оптимизация выпуска комплектов изделий и интенсивностей их изготовления в условиях случайного спроса / Г. М. Левин, Б. М. Розин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 110–118.

For citation

Levin G. M., Rozin B. M. Optimizing the output of product batches and the intensity of their manufacture under random demand. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 110–118. (in Russian).