ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.925

Поступила в редакцию 12.04.2017
Received 12.04.2017

Е. Е. Кулеш, И. П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Исследуется одно дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка на наличие свойства Пенлеве. Дифференциальные уравнения являются моделями разных физических процессов, таких как задачи о нелинейных волнах, процессов турбулентности, волн дрейфа в плазме и т. д. Широко используется гипотеза Абловица о том, что все редукции полностью интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям со свойством Пенлеве. Свойство Пенлеве служит основой классификации и приведения к каноническому виду нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных подобно тому, как это свойство позволяет классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных выше третьего порядка по свойству Пенлеве еще далека от своего завершения. Это связано с тем, что известные методы исследования дают в основном лишь необходимые условия наличия свойства Пенлеве. Для доказательства достаточности можно, например, свести исследуемое уравнение подходящей заменой к уравнению, наличие свойства Пенлеве для которого уже установлено. Поэтому особый интерес представляют методы, позволяющие строить уравнения, априори имеющие свойство Пенлеве. Во введении приводится известное в литературе определение свойства Пенлеве для дифференциального уравнения в частных производных, а также описание основного метода исследования – метода резонансов. В основной части исследована резонансная структура исследуемого уравнения, проверено выполнение необходимых условий наличия свойства Пенлеве. Для достижения поставленной цели решены задачи построения рядов, представляющих решение дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка, которые содержат шесть произвольных функций. Доказана сходимость полученных рядов с помощью построения мажорантных рядов. Найдены слагаемые меньшего веса, при наличии которых для уравнения будет выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве, а также подстановка, линеаризирующая полученное уравнение. Построены рациональные относительно функции φ решения по отрицательным резонансам.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, свойство Пенлеве, метод резонансов, подвижная критическая особенность, ряд, рациональные решения

Для цитирования. Кулеш, Е. Е. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных шестого порядка / Е. Е. Кулеш, И. П. Мартынов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 7–19.

E. E. Kulesh, I. P. Martynov

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

ONE SIX-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract. One six-order partial differential equation in the presence of the Painleve property is considered in this work. Differential equations are the models of different physical processes such as tasks of nonlinear waves, processes of turbulence, drift waves in plasma, etc. Ablowitz's hypothesis is widely used that all reductions of completely integrable partial differential equations lead to ordinary differential equations with the Painleve property. The Painleve property is the basis of classification and reduction to the canonical form of nonlinear partial differential equations, just like this property allows one to classify ordinary differential equations. The Painleve property classification of partial differential equations higher than the third order is still far from complete. This is due to the fact that the known methods of research give generally only necessary conditions for existence of the Painleve property. To prove the sufficiency, for example, it is possible to reduce the investigated equation by a suitable replacement to the equation, for which the presence of the Painleve property has already been found. Therefore, of particular interest are the methods allowing one to build the equations with the *a priori* Painleve property. Introduction contains the definition of the Painleve property for a partial differential equation known in the literature and describes the main method of research — resonance method. In the main part, the resonant structure is investigated and the fulfillment of necessary conditions for the presence of the Painleve property is checked. To achieve this goal, we solved the problems of constructing series representing the solution of the six-order partial differential equations containing six arbitrary functions. The convergence of the obtained series is proved by using majorant series. The terms of lesser weight are found, in the presence of which for the equation a necessary condition for existence of the Painleve property, as well as a suitable substitution reducing the obtained equation to the linear one will be satisfied. Rational solutions are built in terms of negative resonances with respect to the function φ.

Keywords: partial differential equation, Painleve property, resonance method, mobile critical singularity, series, rational solutions

For citation. Kulesh E. E., Martynov I. P. One sixth-order partial differential equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 7–19 (in Russian).

Введение. Дифференциальные уравнения в частных производных используются для описания различных по своей природе физических явлений: задачи о нелинейных волнах, возникающих при стекании тонкого слоя жидкости по наклонной плоскости, процессов турбулентности, волн дрейфа в плазме, фронта пламени, проблемы взаимодействия волн большой амплитуды, возникающих в физике плазмы, нелинейной оптике, физике ферромагнетиков и др. Наиболее известной математической моделью, описывающей такие нелинейные волны, является модель Кортевега – де Вриза, полученная в 1895 г. Стремление как можно более точно передать физическую природу исследуемого объекта ведет к усложнению математической модели и увеличению порядка входящих в нее уравнений. Если еще несколько десятилетий назад при моделировании волновых процессов в основном использовались эволюционные уравнения третьего порядка с одной пространственной переменной, то сейчас применяют уравнения пятого и более высоких порядков.

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) могут содержать особые точки различного характера. Если функция при обходе вокруг особой точки меняет свое значение, то такая особая точка называется критической. Кроме того, к критическим относят также существенно особые точки. Особые точки решений дифференциальных уравнений, положение которых зависит (не зависит) от начальных данных, называются подвижными (неподвижными) особыми точками.

В работах Пенлеве и его учеников были получены важные результаты по проблеме отсутствия в решениях обыкновенных дифференциальных уравнений подвижных критических особых точек. Это свойство дифференциальных уравнений называют теперь свойством Пенлеве.

Изучение поведения решений дифференциальных уравнений в окрестности особых точек – важная проблема. И хотя она, с одной стороны, является локальной, с другой – тесно связана с проблемой изучения поведения решения в целом.

В последние десятилетия внимание многих математиков, как отечественных, так и зарубежных, привлекают задачи выделения уравнений и систем со свойством Пенлеве, изучения свойств их решений, построения специальных классов решений, преобразований Бэклунда и т. д.

Широко используется гипотеза Абловица о том, что все редукции полностью интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям со свойством Пенлеве (возможно, после замены переменных). Однако эта гипотеза требует проверки на свойство Пенлеве всех редукций к ОДУ, что не всегда удобно. Дж. Вейсс, М. Табор и Г. Карневале ввели понятие свойства Пенлеве для дифференциальных уравнений в частных производных и применили тест Пенлеве непосредственно для дифференциальных уравнений в частных производных без приведения их к ОДУ [1].

В отличие от функции одной комплексной переменной, особенности функции многих комплексных переменных не могут быть изолированными. В случае двух комплексных переменных x, t особенности возникают вдоль аналитических многообразий, заданных уравнением $\varphi(x,t) = 0$.

О п р е д е л е н и е. Дифференциальное уравнение в частных производных имеет свойство Пенлеве, если все подвижные особенности его общего решения, если они существуют, являются полярными [2].

Если особое многообразие Φ, заданное уравнением $\varphi(x,t)=0$, является полярным для решения дифференциального уравнения в частных производных, то в окрестности этого многообразия имеет место представление решения в виде ряда Лорана, содержащее конечное число слагаемых с отрицательными степенями, т. е. в виде ряда

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x,t)\varphi^{k-s}, \tag{1}$$

где $u_0(x,t)\neq 0$, $u_k(x,t)$ – аналитические функции в окрестности Φ, $s\in \mathrm{N}$.

Для исследования дифференциального уравнения в частных производных n-го порядка на наличие свойства Пенлеве используется метод резонансов (его также называют тест Пенлеве, или сингулярный анализ). В исследуемое уравнение подставляют ряд

$$w(x,t)=u_0\varphi^{-s}+\ldots+u_r\varphi^{r-s}+\ldots, \tag{2}$$

где $u_0=u_0(x,t)\neq 0$, $u_k=u_k(x,t)$ – аналитические функции в окрестности Φ, $s\in \mathrm{N}$, число s определим, приравнивая наименьшие степени φ доминантных слагаемых уравнения. В результате получим выражение вида

$$A(u_0)\varphi^{-d}+\ldots+R(r)u_r\varphi^{r-d}+\ldots=0,$$

где $d\geq s+n$, $A(u_0)$ – многочлен от u_0, $R(r)$ — многочлен n-й степени от r с коэффициентами, зависящими от u_0. Число d при этом называют весом доминантных слагаемых. Из уравнения $A(u_0)=0$ найдем u_0. Подставляя найденные u_0 в уравнение $R(r)=0$, найдем соответствующие значения r, называемые резонансными числами. Наборы

$$(s,u_0;r_1,\ldots,r_n) \tag{3}$$

определяют резонансную структуру исследуемого дифференциального уравнения в частных производных. Чтобы оно имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы все резонансные числа при всех s и u_0 были целыми, различными и во всех наборах (3) среди резонансных чисел содержалась –1.

Если разложение (2) является локальным представлением общего решения, то оно будет, согласно [3, с. 351], иметь n произвольных функций, среди которых $n-1$ коэффициентов $u_r(x,t)$, называемых резонансными коэффициентами, и функция $\varphi(x,t)$, отвечающая резонансному числу $r=-1$. Уравнение может иметь разные доминантные степени s в (2), каждая из которых будет иметь свою собственную резонансную структуру. Необходимо, чтобы при каждом значении s и при всех u_0 резонансные коэффициенты с номерами $r_i\geq 0$ из (3) оставались произвольными. Это свойство будем называть *необходимым условием A*.

Проверка необходимого условия A часто связана с громоздкими вычислениями. М. Крускал установил, что можно считать $\varphi=x+\gamma(t)$ или $\varphi=t+\psi(x)$, поскольку потеря общности не влияет на резонансную структуру уравнения [2]. Теорема существования неявной функции утверждает, что вблизи поверхности Φ функция $\varphi(x,t)$ может быть представлена в виде $\varphi(x,t)=x-\gamma(t)$, где $\varphi\big(\gamma(t),t\big)=0$ при условии, что $\varphi_x(x,t)\neq 0$ на поверхности Φ. Тогда $\varphi_x=1$. Заменив x на $\varphi-\gamma(t)$ в коэффициентах $u_k(x,t)$ и переразложив ряд (1), получим ряд по степеням φ с коэффициентами, зависящими только от t:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\varphi^{k-s}. \tag{4}$$

Необходимым условием B наличия свойства Пенлеве для дифференциального уравнения в частных производных n-го порядка будем называть произвольность функции φ и $n-1$ резонансных коэффициентов u_{r_i}, $i=\overline{1,n-1}$ ряда (4), представляющего решение дифференциального уравнения в частных производных. Следует отметить, что тем не менее построение ряда вида (1) дает более полную информацию о свойствах решений уравнения, позволяет установить некоторые свойства решений, построить специальные решения, иерархии решений, преобразования Бэклунда и т. д.

Свойство Пенлеве служит основой классификации и приведения к каноническому виду нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных подобно тому, как оно позволяет классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных n-го порядка по свойству Пенлеве при $n \geq 3$ еще далека от своего завершения. Это связано с тем, что известные методы исследования дают в основном лишь необходимые условия наличия свойства Пенлеве. Для доказательства достаточности можно, например, свести исследуемое уравнение подходящей заменой к уравнению, наличие свойства Пенлеве для которого уже установлено. Поэтому особый интерес представляют методы, позволяющие строить уравнения, априори имеющие свойство Пенлеве.

Многие эволюционные дифференциальные уравнения в частных производных имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)\right)=\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{5}$$

где в левой части стоят доминантные слагаемые, а справа – слагаемое меньшего веса. Так как резонансная структура этого уравнения определяется левой частью, то для наличия свойства Пенлеве у уравнения (5) необходимо, чтобы уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)\right)=0 \tag{6}$$

обладало этим свойством. Уравнение (6) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, где t – параметр. Первый интеграл уравнения (6) имеет вид

$$F\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)=C. \tag{7}$$

Очевидно, если уравнение (6) имеет свойство Пенлеве, то и уравнение (7) также имеет свойство Пенлеве.

Например, уравнение Кортевега – де Вриза и модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза можно записать соответственно в виде

$$\left(u_{xx}-6u^2\right)_x=u_t,$$

$$\left(u_{xxx}-2u^3\right)_x=u_t.$$

Уравнения $u_{xx}=6u^2+C$, $u_{xx}=2u^3+C$ имеют свойство Пенлеве.

Таким образом, если известно, что некоторое обыкновенное дифференциальное уравнение (7) имеет свойство Пенлеве, то имеет смысл исследовать на наличие свойства Пенлеве дифференциальное уравнение в частных производных (5).

Постановка задачи. В данной работе ставится задача построить дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка со свойством Пенлеве и найти некоторые его решения.

В работе [4] показано, что обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{V}+6yy^{IV}+15y'y'''+10y''^{2}+15y^{2}y'''+60yy'y''+$$
$$+15y'^{3}+20y^{3}y''+45y^{2}y'^{2}+15y^{4}y'+y^{6}=C,$$

где C = const, имеет свойство Пенлеве. Построим на его основе дифференциальное уравнение в частных производных

$$\Big(w_{xxxxx}+6ww_{xxxx}+15w_xw_{xxx}+10w_{xx}{}^{2}+15w^{2}w_{xxx}+60ww_xw_{xx}+$$
$$+15w_x{}^{3}+20w^{3}w_{xx}+45w^{2}w_x{}^{2}+15w^{4}w_x+w^{6}\Big)_x=w_t+F, \tag{8}$$

где правая часть содержит слагаемые меньшего веса

$$F=A_1w_{xxxxx}+A_2w_{xxxxt}+A_3w_{xxxtt}+A_4w_{xxttt}+A_5w_{xtttt}+A_6w_{ttttt}+w(B_1w_{xxxx}+B_2w_{xxxt}+$$
$$+B_3w_{xxtt}+B_4w_{xttt}+B_5w_{tttt})+w^{2}(C_1w_{xxx}+C_2w_{xxt}+C_3w_{xtt}+C_4w_{ttt})+$$
$$+w_x(D_1w_{xxx}+D_2w_{xxt}+D_3w_{xtt}+D_4w_{ttt})+w_t(D_5w_{xxx}+D_6w_{xxt}+D_7w_{xtt}+D_8w_{ttt})+$$
$$+E_1w_{xx}^2+E_2w_{xt}^2+E_3w_{tt}^2+E_4w_{xx}w_{xt}+E_5w_{xx}w_{tt}+E_6w_{xt}w_{tt}+$$
$$+ww_x(G_1w_{xx}+G_2w_{xt}+G_3w_{tt})+ww_t(G_4w_{xx}+G_5w_{xt}+G_6w_{tt})+$$
$$+w^{3}(J_1w_{xx}+J_2w_{xt}+J_3w_{tt})+K_1w_x^3+K_2w_x^2w_t+K_3w_xw_t^2+K_4w_t^3+$$
$$+w^{2}(L_1w_x^2+L_2w_xw_t+L_3w_t^2)+w^{4}(M_1w_x+M_2w_t)+Nw^{6}+$$
$$+O_1w_{xxxx}+O_2w_{xxxt}+O_3w_{xxtt}+O_4w_{xttt}+O_5w_{tttt}+w(P_1w_{xxx}+P_2w_{xxt}+$$
$$+P_3w_{xtt}+P_4w_{ttt})+w_x(Q_1w_{xx}+Q_2w_{xt}+Q_3w_{tt})+w_t(R_1w_{xx}+R_2w_{xt}+R_3w_{tt})+$$
$$+w^{2}(S_1w_{xx}+S_2w_{xt}+S_3w_{tt})+w(T_1w_x^2+T_2w_xw_t+T_3w_t^2)+w^{3}(U_1w_x+U_2w_t)+$$
$$+U_3w^{5}+V_1w_{xxx}+V_2w_{xxt}+V_3w_{xtt}+V_4w_{ttt}+w(W_1w_{xx}+W_2w_{xt}+W_3w_{tt})+$$
$$+X_1w_x^2+X_2w_xw_t+X_3w_t^2+w^{2}(X_4w_x+X_5w_t)+X_6w^{4}+Y_1w_{xx}+Y_2w_{xt}+$$
$$+Y_3w_{tt}+Y_4w^{3}+w(Y_5w_x+Y_6w_t)+Z_1w_x+Z_2w^{2}+Z_3w+Z_4,$$

коэффициенты $A_1,A_2,...,Z_4$ являются аналитическими функциями, зависящими от (x,t).

Проверка выполнения необходимого условия *B*. Определим резонансную структуру уравнения (8). Будем искать решение уравнения (8) в виде ряда (4), где $\varphi=\varphi(x,t)$, $\varphi_x=1$, $u_k=u_k(t)$. Приравнивая наименьшие степени каждого слагаемого левой части уравнения (8), найдем $s = 1$. Тогда ряд (4) примет вид

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\varphi^{k-1}=\frac{u_0}{\varphi}+u_1+u_2\varphi+u_3\varphi^{2}+\dots . \tag{9}$$

Подставляя ряд (9) в уравнение (8) и приравнивая коэффициенты при φ^{-7}, получим для определения u_0 уравнение

$$u_0^6-15u_0^5+85u_0^4-225u_0^3+274u_0^2-120u_0=0. \tag{10}$$

Приравнивая коэффициенты при φ^{r-7}, получим уравнение для определения резонансных чисел

$$(r-6)(2u_0-5+r)(r^{4}+(4u_0-10)r^{3}+(7u_0^2-35u_0+35)r^{2}+$$
$$+(6u_0^3-45u_0^2+95u_0-50)r+3u_0^4-30u_0^3+95u_0^2-100u_0+24)=0. \tag{11}$$

Из (10), (11) найдем $u_0 = 1,\ r = -1,1,2,3,4,6;\ \ u_0 = 2,\ r = -1,-2,1,2,3,6;\ \ u_0 = 3,\ r = -1,-2,-3,1,2,6;$ $u_0 = 4,\ r = -1,-2,-3,-4,1,6;\ \ u_0 = 5,\ r = -1,-2,-3,-4,-5,6.$

Рассмотрим вначале уравнение (8) при $F = 0$:

$$w_{xxxxxx} + 6ww_{xxxxx} + 21w_x w_{xxxx} + 15w^2 w_{xxxx} + 35w_{xx}w_{xxx} + 90ww_x w_{xxx} + 20w^3 w_{xxx} + \\ +60ww_{xx}^2 + 150w^2 w_x w_{xx} + 105w_x^2 w_{xx} + 15w^4 w_{xx} + 90ww_x^3 + 60w^3 w_x^2 + 6w^5 w_x = w_t. \qquad (12)$$

Проверим выполнение необходимого условия B наличия свойства Пенлеве для уравнения (12). Приравнивая коэффициенты при $\varphi^{-6},\ldots,\varphi^{-2}$, получим следующие условия:

$$u_0 u_1 (u_0 - 1)(u_0 - 2)(u_0 - 3)(u_0 - 4) = 0; \qquad (13)$$

$$u_0 (u_0 - 1)(u_0 - 2)(u_0 - 3)\left((2u_0 - 3)u_2 + 5u_1^2\right) = 0; \qquad (14)$$

$$u_0 (u_0 - 1)(u_0 - 2)\left((3u_0^2 - 6u_0 + 11)u_3 + 15(u_0 - 1)u_1 u_2 + 10u_1^3\right) = 0; \qquad (15)$$

$$u_0 (u_0 - 1)((2u_0 - 1)(u_0^2 - u_0 + 8)u_4 + 10(u_0^2 - u_0 + 2)u_1 u_3 + \\ +5(u_0^2 - u_0 + 1)u_2^2 + 10(2u_0 - 1)u_1^2 u_2 + 5u_1^4) = 0; \qquad (16)$$

$$6u_0 (u_0^4 + 15u_0^2 + 8)u_5 + 30(u_0^2 + 5)u_0^2 u_1 u_4 + 60(u_0^2 + 1)u_0 u_1^2 u_3 + \\ +30(u_0^2 + 3)u_0^2 u_2 u_3 + 30(2u_0^2 + 1)u_0 u_1 u_2^2 + 60u_0^2 u_1^3 u_2 + 6u_0 u_1^5 + \varphi_t = 0. \qquad (17)$$

Коэффициент при φ^{-1} равен 0. Значит, резонансное условие, отвечающее произвольности u_6, выполнено автоматически при любом u_0.

При $u_0 = 1$ резонансные условия (13)–(16) выполняются. Значит, коэффициенты u_1, u_2, u_3, u_4 и φ_t являются произвольными функциями от t. Из (17) найдем

$$u_5 = -\frac{1}{24}\left(u_1^5 + 10u_1^3 u_2 + 20u_1^2 u_3 + 15u_1 u_2^2 + 30u_1 u_4 + 20u_2 u_3\right) - \frac{\varphi_t}{6}. \qquad (18)$$

При $u_0 = 2$ резонансные условия (13)–(15) выполняются. Значит, коэффициенты u_1, u_2, u_3 являются произвольными функциями от t. Из (16), (17) найдем

$$u_4 = -\frac{1}{6}\left(u_1^4 + 6u_1^2 u_2 + 8u_1 u_3 + 3u_2^2\right);\ \ u_5 = \frac{1}{6}\left(u_1^5 + 5u_1^3 u_2 + 5u_1^2 u_3 - 5u_2 u_3\right) - \frac{\varphi_t}{1008}.$$

При $u_0 = 3$ резонансные условия (13), (14) выполняются. Значит, коэффициенты u_1, u_2 являются произвольными функциями от t. Из (15)–(17) найдем

$$u_3 = -\frac{1}{2}\left(u_1^3 + 3u_1 u_2\right);\ \ u_4 = \frac{1}{2}\left(u_1^4 + 2u_1^2 u_2 - u_2^2\right);\ \ u_5 = -\frac{1}{4}\left(u_1^5 - 5u_1 u_2^2\right) - \frac{\varphi_t}{4032}.$$

При $u_0 = 4$ резонансное условие (13) выполняется. Значит, коэффициент u_1 является произвольной функцией от t. Из (14)–(17) найдем

$$u_2 = -u_1^2;\ \ u_3 = u_1^3;\ \ u_4 = -u_1^4;\ \ u_5 = u_1^5 - \frac{\varphi_t}{12096}.$$

При $u_0 = 5$ из (13)–(17) найдем

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0,\ \ u_5 = \frac{\varphi_t}{30240}.$$

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 1. *Для уравнения* (12) *выполнено необходимое условие B наличия свойства Пенлеве.*

Доказательство сходимости ряда (9). Отметим, что ряд (9) представляет лишь формальное решение уравнения (12). Докажем его сходимость при $u_0 = 1$. В этом случае u_1, u_2, u_3, u_4, u_6 – резонансные коэффициенты, u_5 задается формулой (18), а остальные коэффициенты ряда определяются рекуррентными формулами

$$
\begin{gathered}
-(k+8)(k+6)(k+5)(k+4)(k+3)(k+1)u_{k+7} = 30(k+5)^2(k^2+3k-13)u_{k+6}u_1 + \\
+30(2k^3+3k^2-82k-231)u_{k+5}u_2 + 30(k+4)(2k^2+3k-19)u_{k+5}u_1^2 - \\
-30(8k^2+57k+57)u_{k+4}u_3 + 60(k+4)(3k+8)u_{k+4}u_1u_2 + 30(2k^2+12k+23)u_{k+4}u_1^3 + \\
+30(77-17k)u_{k+3}u_4 + 30(16k+28)u_{k+3}u_1u_3 + 30(11k+29)u_{k+3}u_2^2 + 360(k+2)u_{k+3}u_1^2u_2 + \\
+6(5k+9)u_{k+3}u_1^4 + 2520u_{k+2}u_5 + 900u_{k+2}u_1u_4 + 900u_{k+2}u_2u_3 - 4u_{k+2}u_1^3u_2 + \\
-(k+1)u_{k+2}\varphi_t - u_{(k+1)t} + \sum_{s=0}^{k}\Big(6(s+4)(s+5)(s^3+6s^2+11s+46)u_{s+6}u_{k-s+1} + \\
+3(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(7k-7s+17)u_{s+5}u_{k-s+2} + \\
+5(k-s+1)\Big(-7s^4+(7k-10)s^3+(42k+115)s^2+(77k+298)s+54k+216\Big)u_{s+4}u_{k-s+3} + \\
+60\Big(s^4-2(k+1)s^3+(k^2+k-6)s^2-(4k+19)s+k^3+8k^2+13k-16\Big)u_{s+3}u_{k-s+4} + \\
+60(5s+9)(k-s+1)(k-s+2)u_{s+3}u_{k-s+3}u_1 + 30(20k-37s+63)u_{s+2}u_{k-s+5} + \\
+60\Big(-s^3+3(k+1)s^2-(3k^2+9k-2)s+k^3+6k^2+8k-2\Big)u_{s+2}u_{k-s+4}u_1 + \\
+30\Big(-11s^2+(13k+17)s-2k^2+3k+16\Big)u_{s+2}u_{k-s+3}u_2 + \\
+60\Big(-2s^2+(k+1)s+k^2+6k+9\Big)u_{s+2}u_{k-s+3}u_1^2 + 30(s+1)u_{s+2}u_{k-s+2}(2u_3+4u_1u_2+u_1^3) + \\
+270(k-s+5)u_{s+1}u_{k-s+6} - 30(9k-9s+29)u_{s+1}u_{k-s+4}u_2 - 60(9k-9s+20)u_{s+1}u_{k-s+3}u_3 - \\
-u_{s+1}u_{k-s+3}(120u_1u_2+6u_1^3) + u_{s+1}u_{k-s+2}(900u_4-240u_1u_3-120u_2^2-18u_1^2u_2) + \\
+\sum_{i=0}^{s}\big(60(k-s+4)(k-s+3)(k-s-1)u_{i+1}u_{s-i+2}u_{k-s+4} + \\
+15(k-s+4)\Big(-s^3+3(k+2)s^2-(3k^2+12k+11)s+k^3+6k^2+11k+26\Big)u_{i+1}u_{s-i+1}u_{k-s+5} + \\
+60(k-s+1)(k-s+2)u_{i+1}u_{k-s+3}(u_{s-i+2}u_1-u_{s-i+3}) - \\
-6u_{i+1}u_{s-i+1}(20u_{k-s+3}u_2+40u_{k-s+2}u_3+u_{k-s+3}u_1^2+2u_{k-s+2}u_1u_2) + \\
+30(k-s+1)u_{i+1}u_{k-s+2}(2u_{s-i+4}+2u_{s-i+3}u_1+2u_{s-i+2}u_2+u_{s-i+2}u_1^2) + \\
+90(i+1)(k-s+1)(k-s+2)(k-s+3)u_{i+2}u_{s-i+1}u_{k-s+4} + \\
+60(i+1)(i+2)(s-i+1)(s-i+2)u_{i+3}u_{s-i+3}u_{k-s+1} + \\
+15(s-i+1)\Big(\Big(7s^2-(14k+27)s+7k^2+27k+38\Big)i+27s^2-(54k+87)s+27k^2+87k+78\Big)u_{i+2}u_{s-i+2}u_{k-s+3} - \\
-270(i+1)(s-i+3)u_{i+2}u_{s-i+4}u_{k-s+1} + 180(i+1)(s-i+1)u_{i+2}u_{s-i+2}u_{k-s+2}u_1 + \\
+\sum_{j=0}^{i}\big(20(k-s+4)(k-s+3)(k-s-1)u_{j+1}u_{i-j+1}u_{s-i+1}u_{k-s+4} + \\
+30(k-s+1)(k-s+2)(5s-5i+7)u_{j+1}u_{i-j+1}u_{s-i+2}u_{k-s+3} - 6u_{j+1}u_{i-j+1}u_{s-i+1}u_{k-s+3}u_1 - \\
-90(j+1)(i-j+1)(s-i+1)u_{j+2}u_{i-j+2}u_{s-i+2}u_{k-s+1} - 6u_{j+1}u_{i-j+1}u_{s-i+1}u_{k-s+2}u_2 + \\
+30(k-s+1)u_{j+1}u_{i-j+1}u_{k-s+2}(2u_{s-i+3}+u_{s-i+2}u_1) + 180(s-i+1)(k-s+1)u_{j+1}u_{i-j+2}u_{s-i+2}u_{k-s+2} + \\
+\sum_{p=0}^{j}\Big(\Big(15s^2-15(2k+3)s+15k^2+45k+24\Big)u_{p+1}u_{j-p+1}u_{i-j+1}u_{s-i+1}u_{k-s+3} +
\end{gathered}
$$

$$+30(k-s+1)(2s-2i+3)u_{p+1}u_{j-p+1}u_{i-j+1}u_{s-i+2}u_{k-s+2}+$$

$$+\sum_{q=0}^{p}(k-s+1)u_{q+1}u_{p-q+1}u_{j-p+1}u_{i-j+1}u_{s-i+1}u_{k-s+2}\Big)\Big)\Big)\Big),\quad k=0,1,\dots . \tag{19}$$

Пусть T_1 – область голоморфности коэффициентов u_k, $k = 0,1,2,\dots$. Выберем δ так, чтобы выполнялись условия

$$|\gamma|\le\frac{1}{8\delta},\ |u_1|\le\frac{\delta}{8},\ |u_2|\le\frac{\delta^2}{8},\ |u_3|\le\frac{\delta^3}{8},\ |u_4|\le\frac{\delta^4}{8},\ |u_6|\le\frac{\delta^6}{8} \tag{20}$$

при всех $t\in T\subset T_1$, где T – замкнутый круг радиуса ρ, причем $\rho\ge\frac{1}{\delta^6}$. Используя интегральную формулу Коши $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}$, получим

$$|\varphi_t|=|\gamma_t|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\gamma(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{|\gamma(\tau)|}{|\tau-t|^2}|d\tau|\le\frac{1}{16\pi\delta\rho}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{8\delta\rho}\le\frac{\delta^5}{8}.$$

Из (18) и (20) следует также следующая оценка:

$$|u_5|\le\frac{1}{24}\left(|u_1^5|+10|u_1^3u_2|+20|u_1^2u_3|+15|u_1u_2^2|+30|u_1u_4|+20|u_2u_3|\right)+\frac{|\varphi_t|}{6}\le$$

$$\le\frac{1}{24}\left(\frac{\delta^5}{8^5}+\frac{10\delta^5}{8^4}+\frac{20\delta^5}{8^3}+\frac{15\delta^5}{8^3}+\frac{30\delta^5}{8^2}+\frac{20\delta^5}{8^2}\right)+\frac{\delta^5}{48}\le\frac{\delta^5}{8}.$$

Таким образом, $|u_k|\le\frac{\delta^k}{8}$, $k=\overline{1,6}$. Пусть $|u_n|\le\frac{\delta^n}{8}, \forall n<k+7$. Докажем, что тогда $|u_{k+7}|\le\frac{\delta^{k+7}}{8}$. Из (19) найдем

$$(k+8)(k+6)(k+5)(k+4)(k+3)(k+1)|u_{k+7}|\le\frac{\delta^{k+7}}{8}\left(\frac{15}{4}k^4+\frac{915}{16}k^3+\frac{38955}{128}k^2+\right.$$

$$+\frac{2869711}{2048}k+\frac{6197221}{2048}+\sum_{s=0}^{k}\left(-\frac{25}{4}s^5+\left(\frac{21}{8}k-3\right)s^4+\left(\frac{35}{8}k^2+\frac{205}{8}k-\frac{75}{8}\right)s^3+\right.$$

$$+\left(\frac{135}{4}k^2+\frac{2285}{16}k+\frac{14325}{64}\right)s^2+\left(\frac{445}{8}k^2+\frac{47835}{128}k+\frac{2073695}{2048}\right)s+\frac{135}{16}k^3+\frac{13935}{128}k^2+$$

$$+\frac{31077}{64}k+\frac{3233451}{2048}+\sum\left(\frac{15}{16}i^4-\frac{15}{8}si^3-\left(\frac{105}{64}k^2+\frac{105}{32}ks+\frac{45}{64}s^2+\frac{405}{64}k+\frac{585}{64}s+\frac{2325}{128}\right)i^2+\right.$$

$$+\left(\frac{45}{32}k^3-\frac{165}{64}k^2s+\frac{15}{2}ks^2+\frac{15}{64}s^3+\frac{15}{4}k^2-\frac{1275}{64}ks+\frac{825}{64}s^2+\frac{45}{32}k-\frac{1455}{128}s+\frac{15}{2}\right)i+$$

$$+\frac{15}{64}k^4+\frac{15}{32}k^3s-\frac{15}{32}ks^3-\frac{15}{64}s^4+\frac{75}{16}k^3+\frac{225}{64}k^2s+\frac{675}{32}ks^2+\frac{225}{64}s^3+\frac{4035}{128}k^2+\frac{165}{16}ks+$$

$$+\frac{6225}{128}s^2+\frac{152415}{2048}k+\frac{31665}{2048}s+\frac{21273}{256}+\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{45}{256}(s-i+1)(i-j)j-\frac{45}{256}i^2-\right.$$

$$-\left(\frac{75}{256}(k-s)^2+\frac{315}{256}k-\frac{45}{32}s+\frac{15}{16}\right)i+\frac{5}{16}k^3-\frac{165}{256}k^2s+\frac{45}{128}ks^2-\frac{5}{256}s^3+\frac{585}{256}k^2-$$

$$-\frac{855}{256}ks+\frac{135}{128}s^2+\frac{6695}{2048}k-\frac{4415}{2048}s-\frac{4659}{2048}+\sum_{p=0}^{j}\left(-\frac{15}{1024}(k-s+1)i+\frac{15}{4096}k^2+\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.+\frac{45}{2048}ks-\frac{45}{4096}s^2+\frac{135}{4096}k+\frac{15}{4096}s+\frac{57}{2048}+\frac{1}{32768}\sum_{q=0}^{p}(k-s+1)\right)\right)\right)\right)\right),\quad k=0,1,\dots .$$

Тогда

$$|u_{k+7}| \le \frac{\delta^{k+7}}{8} \cdot \frac{1}{(k+8)(k+6)(k+5)(k+4)(k+3)(k+1)} \cdot \left(\frac{4539869}{4718592} k^6 + \frac{41210603}{1572864} k^5 + \right.$$

$$\left. + \frac{785493107}{4718592} k^4 + \frac{1089501793}{1572864} k^3 + \frac{1158217171}{589824} k^2 + \frac{553414781}{131072} k + \frac{153540065}{32768} \right).$$

Отсюда следует, что $|u_{k+7}| \le \dfrac{\delta^{k+7}}{8}$, $k = 0,1,\ldots$. Таким образом, согласно методу математической индукции заключаем, что $|u_k| \le \dfrac{\delta^k}{8}, \forall k \in \mathrm{N}$. Пусть $|\varphi| = |x+\gamma| \le |x| + |\gamma| < \sigma + \dfrac{1}{8\delta} < M$. Тогда для ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_{k+1}\varphi^k$ можно построить мажорантный ряд $\dfrac{\delta}{8}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\delta M)^k$, который сходится при $M < \delta^{-1}$.

Т е о р е м а 2. *Ряд* (9) *с коэффициентами* (18), (19) *сходится при* $0 \ne |\varphi| < M < \delta^{-1}$, *где* δ *определяется условиями* (20), $|x| < \sigma, \sigma + \dfrac{1}{8\delta} < M$, *а значит, является решением уравнения* (12) *в указанной области.*

Проверка выполнения необходимого условия *A*. Будем искать далее решение уравнения (12) в виде ряда (9), где $\varphi = \varphi(x,t)$, $\varphi_x \ne 1$, $u_k = u_k(x,t)$. Первый коэффициент принимает значения $u_0 = k\varphi_x$, где $k = \overline{1,5}$. Пусть $u_0 = \varphi_x$. Первое резонансное условие, отвечающее произвольности u_1, имеет вид

$$30\varphi_x u_0(u_0-\varphi_x)(u_0-2\varphi_x)(u_0-3\varphi_x)(u_0-4\varphi_x)u_1 +$$
$$+720\varphi_x^3 u_{0x} + 1800\varphi_x^3\varphi_{xx}u_0 - 2568\varphi_x^4 u_0 u_{0x} - 2826\varphi_x^3\varphi_{xx}u_0^2 +$$
$$+2550\varphi_x^3 u_0^2 u_{0x} + 1425\varphi_x^2\varphi_{xx}u_0^3 - 990\varphi_x^2 u_0^3 u_{0x} - 270\varphi_x\varphi_{xx}u_0^4 +$$
$$+150\varphi_x u_0^4 u_{0x} + 15\varphi_{xx}u_0^5 - 6u_0^5 u_{0x} = 0$$

и выполняется с учетом вида u_0. Аналогично можно проверить выполнение резонансных условий, отвечающих произвольности u_2, u_3, u_4. Приравнивая коэффициенты при φ^{-2}, получим уравнение, из которого найдем

$$u_5 = \frac{-1}{144\varphi_x^5}(\varphi_{xxxxxx} - \varphi_t + 88\varphi_x^2\varphi_{xxx}u_3 + 90\varphi_x^2 u_1 u_{2xx} + 60\varphi_x^2 u_{1xx}u_2 + 60\varphi_x u_1^2 u_{1xx} +$$
$$+20\varphi_{xxx}u_1^3 + 180\varphi_x^3 u_1 u_{3x} + 120\varphi_x^3 u_{1x}u_3 + 120\varphi_x^3 u_2 u_{2x} + 120\varphi_x^2 u_1^2 u_{2x} +$$
$$+60\varphi_x u_1^3 u_{1x} + 234\varphi_x^2\varphi_{xx}u_{3x} + 120\varphi_x^2 u_{1x}u_{2x} + 126\varphi_x\varphi_{xx}^2 u_3 +$$
$$+90\varphi_x u_1 u_{1x}^2 + 21\varphi_x\varphi_{xxxx}u_2 + 30\varphi_x u_1 u_{1xxx} + 15\varphi_{xxxx}u_1^2 + 45\varphi_{xx}^2 u_{2x} +$$
$$+45\varphi_{xx}u_{1x}^2 + 6\varphi_{xxxxx}u_1 + 20\varphi_{xxx}u_{1xx} - 180\varphi_x^4 u_1 u_4 - 120\varphi_x^4 u_2 u_3 +$$
$$+120\varphi_x^3 u_1^2 u_3 + 90\varphi_x^3 u_1 u_2^2 + 60\varphi_x^2 u_1^3 u_2 + 81\varphi_x\varphi_{xx}u_{2xx} + 64\varphi_x\varphi_{xxx}u_{2x} +$$
$$+60\varphi_x u_{1x}u_{1xx} + 15\varphi_{xx}u_{1xxx} + 15\varphi_{xxxx}u_{1x} + 15\varphi_{xx}u_1^4 + 306\varphi_x^3\varphi_{xx}u_4 +$$
$$+105\varphi_x^2\varphi_{xx}u_2^2 + 35\varphi_{xx}\varphi_{xxx}u_2 + 60\varphi_{xx}u_1 u_{1xx} - 60\varphi_{xxx}u_1 u_{1x} +$$
$$+300\varphi_x^2\varphi_{xx}u_2 u_3 + 180\varphi_x^2 u_1 u_{1x}u_2 + 150\varphi_x\varphi_{xx}u_x^2 u_2 + 90\varphi_x\varphi_{xxx}u_1 u_2 +$$
$$+210\varphi_x\varphi_{xx}u_1 u_{2x} + 150\varphi_x\varphi_{xx}u_{1x}u_2 + 60\varphi_{xx}^2 u_1 u_2 + 90\varphi_{xx}u_1^2 u_{1x} +$$
$$+24\varphi_x^2 u_{2xxx} + 144\varphi_x^4 u_{4x} + 72\varphi_x^3 u_{3xx} + 6\varphi_x u_1^5 + 6\varphi_x u_{1xxxx}). \qquad (21)$$

С учетом вида коэффициентов u_0 и u_5 убеждаемся, что резонансное условие, отвечающее произвольности коэффициента u_6, также выполняется. Аналогично можно убедиться в выполнении всех резонансных условий при $u_0 = k\varphi_x$, где $k = \overline{2,5}$.

Т е о р е м а 3. *Для уравнения* (12) *выполнено необходимое условие A наличия свойства Пенлеве.*

Исследуем некоторые свойства решений уравнения (12). Введем теперь ограничения на коэффициенты ряда (9) и функцию φ. Пусть $u_0 = \varphi_x$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_6 = 0$. Функцию φ выберем таким образом, чтобы коэффициент u_5 также был равен нулю. Из (21) следует, что условие $u_5 = 0$ примет вид

$$\varphi_{xxxxxx} = \varphi_t. \tag{22}$$

Таким образом, $u_k = 0$, $k = \overline{1,6}$. Легко убедиться, что тогда $u_k = 0$ и при k = 7,8,… . Значит, (9) примет вид

$$w(x,t) = \frac{\varphi_x}{\varphi}. \tag{23}$$

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 4. *Если функция* φ *удовлетворяет условию* (22)*, то* (23) *является решением уравнения* (12).

Уравнению (22) удовлетворяет функция $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x + \lambda_k^6 t}$, где $\lambda_k, c_k, k = \overline{1,n}$ – некоторые константы. С учетом (23) найдем

$$w = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k e^{\lambda_k x + \lambda_k^6 t}}{\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x + \lambda_k^6 t}}. \tag{24}$$

Т е о р е м а 5. *Уравнение* (12) *имеет решение* (24).

Построение правой части уравнения (8), удовлетворяющего необходимым условиям наличия свойства Пенлеве. Далее проверим выполнение необходимого условия *B* наличия свойства Пенлеве для уравнения (8). Разложим каждый коэффициент правой части в ряд по степеням φ, например

$$A_1 = A_{10} + A_{11}\varphi + A_{12}\varphi^2 + A_{13}\varphi^3 + \ldots, \qquad A_{1k} = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k A_1}{\partial x^k}\bigg|_{\varphi=0}.$$

Подставляя ряд (9) при $\varphi = \varphi(x,t)$, $\varphi_x = 1$, $u_k = u_k(t)$ в уравнение (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ, найдем нерезонансные коэффициенты и резонансные условия. Подберем коэффициенты правой части так, чтобы все резонансные условия были выполнены. Первое резонансное условие, отвечающее произвольности u_1, имеет вид

$$120 A_{60}\varphi_t^5 + f = 0, \tag{25}$$

где *f* не содержит слагаемых с φ_t^5. Так как функция φ должна быть произвольной, то для выполнения резонансного условия (25) необходимо требовать $A_{60} \equiv 0$. Так как $A_{60} = A_6\big|_{\varphi=0}$, где функция $\varphi = x + \gamma(t)$, а $\gamma(t)$ – произвольная, то $A_6 = 0$. Тогда условие (25) примет вид

$$(2E_{30} + 3D_{80} - 60A_{50} + 12B_{50})\varphi_t^4 + g = 0,$$

где *g* не содержит слагаемых с φ_t^4. Чтобы функция φ была произвольной, необходимо требовать $E_{30} = -\frac{3}{2}D_{80} + 30A_{50} - 6B_{50}$. Отсюда получим

$$E_3 = -\frac{3}{2}D_8 + 30A_5 - 6B_5.$$

Рассуждая аналогично и введя обозначение $A_1 = A,\ O_1 = B,\ V_1 = C,\ Y_1 = E,\ Z_1 = G,\ Z_4 = H,$ приведем уравнение (8) к виду

$$\begin{gathered} w_{xxxxxx} + 6ww_{xxxxx} + 21w_x w_{xxxx} + 15w^2 w_{xxxx} + 35w_{xx}w_{xxx} + 90ww_x w_{xxx} + \\ +20w^3 w_{xxx} + 60ww_{xx}^2 + 105w_x^2 w_{xx} + 150w^2 w_x w_{xx} + 15w^4 w_{xx} + \\ +90ww_x^3 + 6w^5 w_x = w_t + A(w_{xxxxx} + 5ww_{xxxx} + 10w^2 w_{xxx} + 15w_x w_{xxx} + \\ +10w_{xx}^2 + 50ww_x w_{xx} + 10w^3 w_{xx} + 15w_x^3 + 30w^2 w_x^2 + 5w^4 w_x) + \\ +B(w_{xxxx} + 4ww_{xxx} + 10w_x w_{xx} + 6w^2 w_{xx} + 12ww_x^2 + 4w^3 w_x) + \\ +A_x w(w_{xxx} + 4ww_{xx} + 3w_x^2 + 6w^2 w_x + w^4) + \\ +C(w_{xxx} + 3ww_{xx} + 3w^2 w_x + 3w_x^2) + (B_x - A_{xx})w(w_{xx} + 3ww_x + w^3) + \\ +(A_{xxx} - B_{xx} + C_x)w(w_x + w^2) + E(w_{xx} + 2ww_x) + Gw_x + \\ +(-A_{xxxx} + B_{xxx} - C_{xx} + E_x)w^2 + (A_{xxxxx} - B_{xxxx} + C_{xxx} - E_{xx} + G_x)w + H, \end{gathered} \tag{26}$$

где $A,\ B,\ C,\ E,\ G,\ H$ – аналитические функции от (x,t).

Т е о р е м а 6. *Чтобы уравнение* (8) *имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы оно имело вид* (26).

Выполнив в уравнении (26) замену $w = \dfrac{u_x}{u}$, проинтегрировав по x и умножив на u, приведем его к линейному уравнению

$$u_{xxxxxx} = u_t + \tilde{A}u_{xxxxx} + \tilde{B}u_{xxxx} + \tilde{C}u_{xxx} + \tilde{E}u_{xx} + \tilde{G}u_x + \tilde{H}u, \tag{27}$$

где $\tilde{A} = A,\ \ \tilde{B} = B - A_x,\ \ \tilde{C} = C - B_x + A_{xx},\ \ \tilde{E} = E - C_x + B_{xx} - A_{xxx},\ \ \tilde{G} = G - E_x + C_{xx} - B_{xxx} + A_{xxxx},$ $\tilde{H}_x = H.$

Построение рациональных относительно φ решений уравнения (26). Построим сначала рациональные решения обыкновенного дифференциального уравнения, соответствующего (26),

$$\begin{gathered} w_{xxxxxx} + 6ww_{xxxxx} + 21w_x w_{xxxx} + 15w^2 w_{xxxx} + 35w_{xx}w_{xxx} + 90ww_x w_{xxx} + 20w^3 w_{xxx} + \\ +60ww_{xx}^2 + 150w^2 w_x w_{xx} + 105w_x^2 w_{xx} + 15w^4 w_{xx} + 90ww_x^3 + 60w^3 w_x^2 + 6w^5 w_x = 0, \end{gathered}$$

отвечающие отрицательным резонансам. Согласно алгоритму, описанному в [5], при $u_0 = 2,\ r = -2$ получим решение $w = \dfrac{2x}{x^2 - h}$, где h = const. Решение уравнения (26) будем искать в виде

$$w = \frac{2\varphi}{\varphi^2 - h}, \tag{28}$$

где $h = h(t),\ \varphi = \varphi(x,t),\ \varphi_x = 1.$ Подставляя (28) в (26), получим

$$\begin{gathered} \big(4(A_{xxx} - B_{xx} + C_x - E) + 2h_t - 2(A_{xxxxx} - B_{xxxx} + C_{xxx} - E_{xx} + G_x)h\big)\varphi - \\ -2(2A_{xxxx} - 2B_{xxx} + 2C_{xx} - 2E_x + G + \varphi_t + Hh)\varphi^2 + Hh^2 + \\ +2(A_{xxxxx} - B_{xxxx} + C_{xxx} - E_{xx} + G_x)\varphi^3 + H\varphi^4 - 2(G + \varphi_t)h = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Чтобы (29) выполнялось при всех φ, необходимо требовать выполнение условий

$$A_{xxx} - B_{xx} + C_x - E = 0,\ \ G_x = H = 0,\ \ \varphi_t = -G,\ \ h_t = 0.$$

Аналогично получаем рациональные по φ решения уравнения (26) для остальных отрицательных резонансов.

Т е о р е м а 7. *Пусть* $\varphi = \varphi(x,t)$, $\varphi_x = 1$, $h = h(t)$, $g = g(t)$.

1. *Если* $A_{xxx} - B_{xx} + C_x - E = 0$, $G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{2\varphi}{\varphi^2 - h}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = 0$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 2$, $r = -2$.

2. *Если* $A_{xx} - B_x + C = 0$, $E_x = G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{3\varphi^2 - h}{\varphi(\varphi^2 - h)}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = 6E$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 3$, $r = -2$.

3. *Если* $A_{xx} - B_x + C = 0$, $E = G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{3\varphi^2}{\varphi^3 - h}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = 0$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 3$, $r = -3$.

4. *Если* $A_{xx} - B_x = 0$, $C = E_x = G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{4\varphi(\varphi^2 - h)}{\varphi^4 - 2\varphi^2 h + 2h^2 - g}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = 6E$, $g_t = 20Eh - 24(A_x - B)$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 4$, $r = -2$.

5. *Если* $A_x - B = 0$, $C = E = G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{4\varphi^3 - h}{\varphi(\varphi^3 - h)}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = 0$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 4$, $r = -3$.

6. *Если* $A_{xx} - B_x = 0$, $C = E = G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{4\varphi^3}{\varphi^4 - h}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = -24(A_x - B)$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 4$, $r = -4$.

7. *Если* $A = B_x = C = E_x = G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{5\varphi^4 - 6\varphi^2 h + 2h^2 - g}{\varphi(\varphi^4 - 2\varphi^2 h + 2h^2 - g)}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = 10E$, $g_t = 28Eh + 120B$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 5$, $r = -2$.

8. *Если* $A = B = C = E = G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{5\varphi^3 - h}{\varphi(\varphi^3 - h)}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = 0$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 5$, $r = -3$.

9. *Если* $A = B_x = C = E = G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{5\varphi^4 - h}{\varphi(\varphi^4 - h)}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = 120B$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 5$, $r = -4$.

10. *Если* $A_x = B = C = E = G_x = H = 0$, *то функция* $w = \dfrac{5\varphi^4}{\varphi^5 - h}$, *где* $\varphi_t = -G$, $h_t = 120A$, *является решением уравнения* (26)*, отвечающим* $u_0 = 5$, $r = -5$.

Заключение. Исследована резонансная структура дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка (8), проверено выполнение необходимых условий *A* и *B* наличия свойства Пенлеве для уравнения (12). Для достижения поставленной цели решены задачи построения рядов, представляющих решение рассматриваемого уравнения, содержащих шесть произвольных функций. Доказана сходимость полученных рядов. Найдены слагаемые меньшего веса, при наличии которых для уравнения (8) будет выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве. Найдена подстановка, линеаризирующая полученное уравнение (26). Построено одно решение уравнения (12), а также рациональные относительно функции φ решения по отрицательным резонансам для уравнения (26).

Список использованных источников

1. Weiss, J. The Painleve property for partial differential equations / J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale // J. Math. Phys. – 1983. – Vol. 24, № 3. – P. 522–526.

2. Cosgrove, C. Painleve classification of all semilinear partial differential equations of the second order. I. Hyperbolic equations in two independent variables / C. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 1993. – Vol. 89, № 1. – P. 1–61.

3. Мартынов, И. П. Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем / И. П. Мартынов, Н. С. Березкина, В. А. Пронько. – Гродно: ГрГУ, 2009. – 395 с.

4. Exton, H. On non-linear ordinary differential equations with fixed critical points / H. Exton // Rendiconti di Matematica. – 1971. – Vol. 4, № 3. – P. 385–628.

5. Здунек, А. Г. О рациональных решениях дифференциальных уравнений / А. Г. Здунек, И. П. Мартынов, В. А. Пронько // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. – 2000. – № 3. – С. 33–39.

References

1. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equations. *Journal of Mathematical Physics*, 1983, vol. 24, no. 3. pp. 522–526. Doi: 10.1063/1.525721

2. Cosgrove C. Painleve classification of all semilinear partial differential equations of the second order. I. Hyperbolic equations in two independent variables, *Studies in Applied Mathematics,* 1993, vol. 89, no. 1, pp. 1–61. Doi: 10.1002/sapm19938911

3. Martynov I. P., Berezkina N. S., Pronko V. A. *Analytical theory of nonlinear equations and systems*. Grodno, Yanka Kupala State University of Grodno, 2009. 395 p. (in Russian).

4. Exton H. On non-linear ordinary differential equations with fixed critical points. *Rendiconti di Matematica*, 1971, vol. 4, no. 3, pp. 385–628.

5. Sdunek A. G., Martynov I. P., Pronko V. A. On the rational solutions of differential equations. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2000, no. 3, pp. 33–39 (in Russian).

Информация об авторах

Кулеш Елена Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: kulesh@grsu.by

Мартынов Иван Платонович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: martynov@grsu.by

Information about the authors

Elena E. Kulesh – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: martynov@grsu.by

Ivan P. Martynov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: martynov@grsu.by