ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 2 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.925.7

Е. В. ГРИЦУК, В. И. ГРОМАК

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 21.03.2014)

Введение. Свойства решений уравнений Пенлеве изучались с различных точек зрения. Первые исследования в этом направлении связаны с классификацией Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка без подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [1–7]. Задача нахождения условий наличия свойства Пенлеве может рассматриваться и для ОДУ высших порядков, однако в настоящее время нет полной классификации таких уравнений. Уравнения Пенлеве естественно возникают из симметрийных редукций интегрируемых нелинейных уравнений с частными производными. При таком подходе возможно построение иерархий ОДУ высших порядков Пенлеве-типа, что, в частности, явилось одной из причин возобновления интереса к уравнениям Пенлеве-типа и появлением гипотезы Абловица и др. [8], согласно которой все симметрийные редукции интегрируемых нелинейных уравнений с частными производными есть ОДУ Пенлеве-типа. В работах [9, 10] рассмотрены аналитические свойства решений уравнений 4-го и 6-го порядков иерархии K_2 [11], связанной со вторым уравнением Пенлеве. В настоящей работе исследуются аналитические свойства решений уравнений иерархии K_2 произвольного порядка.

1. Структура уравнений иерархии *K*₂. Иерархия уравнений K_2 может быть представлена в виде [11]

$$\left(\frac{d}{dz}+w\right)H_n\left(w'-\frac{1}{2}w^2\right)-zw+\beta=0, \qquad (K_2)$$

где последовательность операторов H_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered}
H_{n+2}(w)=\mathrm{J}(w)\Omega(w)H_n(w), \qquad (1)\\
H_0(w)=1,\ H_1(w)=w''+4w^2,\ n=0,1,2,....,\\
\Omega(w)=D^3+2wD+w_z,\\
\mathrm{J}(w)=D^3+3(wD+Dw)+2(D^2wD^{-1}+D^{-1}wD^2)+8(w^2D^{-1}+D^{-1}w^2),\\
D=\frac{d}{dz},\ D^{-1}=\int(\cdot)dz.
\end{gathered}$$

Для $n=1$ и $n=2$ соответственно имеем

$$w^{(4)}+w^5+5w'w''-5w^2w''-5w(w')^2-zw+\beta=0, \qquad ({}_4K_2)$$

$$w^{(6)}-\frac{4}{3}w^7-w\left(\frac{28}{3}(w')^3+21(w'')^2+28w'w^{(3)}\right)+7w'w^{(4)}-14w^2w'w''-$$
$$-7w^2w^{(4)}+14w''w^{(3)}-28w''(w')^2+14w^4w''+28w^3(w')^2-zw+\beta=0. \qquad ({}_6K_2)$$

Заметим также, что если $H_n(\mathrm{u})=\mathrm{u}$, то уравнение (K_2) эквивалентно второму уравнению Пенлеве в виде $w''-(w)^3/2-zw+\beta=0$.

Т е о р е м а 1. *Уравнение* (K_2), $n \geq 2$, *в явной форме представимо в виде*

$$w_{3n+s} + \gamma_{3n+s} w_0^{3n+s+1} + Q_{3n+s-1}(w_0, w_1, ..., w_{3n+s-2}) - zw + \beta = 0, \tag{2}$$

где $w_m := \dfrac{d^m w}{dz^m}$, $m = 0, 1, ..., 3n + s$, Q_{3n+s-1} – *полином от* $w_0, w_1, ..., w_{3n+s-1}$ *степени* $3n + s - 1$, *вида*

$$Q_{3n+s-1}(w_0, w_1, ..., w_{3n+s-1}) := \sum_{\substack{\langle k\rangle = 3n+s+1 \\ k_0 \leq 3n+s-2}} b_{k_0 k_1 \ldots k_{3n+s-2}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \ldots w_{3n+s-2}^{k_{3n+s-2}}. \tag{3}$$

Через k обозначен мультииндекс $k = (k_0, k_1, ..., k_{3n+s-2})$ *с нормой*

$$\langle k\rangle := \sum_{p=0}^{3n+s-2} (p+1) k_p, \tag{4}$$

$b_{k_0 k_1 \ldots k_{3n+s-24}}$ – *константы, и*

$$\gamma_{3n+s} = \alpha_{4s+4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s}{2}} \prod_{j=0}^{\frac{n+s-4}{2}} \frac{2^5 (3n+s-5-6j)(3n+s-2-6j)}{(3n+s-4-6j)(3n+s-6j)}, \tag{5}$$

где $s = 0$ *при четном n и* $s = 1$ *при нечетном n,* $\alpha_4 = 32/3$, $\alpha_8 = 256/3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся представлением оператора $H_n(w)$ из работы [12]:

$$H_n(w_0) = w_{3n+s-2} + \gamma_{3n+s-2} w_0^{(3n+s)/2} + P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, ..., w_{3n+s-4}), \tag{6}$$

$$P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, ..., w_{3n+s-4}) := \sum_{\substack{\langle k\rangle = 3n+s \\ k_0 \leq (3n+s-4)/2}} b_{k_0 k_1 \ldots k_{3n+s-4}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \ldots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}}.$$

В формуле (6) сделаем подстановку

$$w_0 \to w_1 - \frac{1}{2} w_0^2. \tag{7}$$

Получаем

$$H_n\left(w_1 - \frac{1}{2} w_0^2\right) = w_{3n+s-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s}{2}} \gamma_{3n+s-2} w_0^{3n+s} + \ldots .$$

Тогда

$$\left(\frac{d}{dz} + w_0\right) H_n\left(w_1 - \frac{1}{2} w_0^2\right) = w_{3n+s} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s}{2}} \gamma_{3n+s-2} w_0^{3n+s+1} + Q_{3n+s-1}.$$

Выясним, как изменяются полином $P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, ..., w_{3n+s-4})$ и ограничения на мультииндекс k в результате подстановки (7).

Пусть моном $w_0^{k_0} w_1^{k_1} \ldots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}}$ дает наивысшую степень полинома $P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, ..., w_{3n+s-4})$, т. е. $k_0 + k_1 + \ldots + k_{3n+s-4} = (3n + s - 2)/2$. Согласно подстановке (7), получаем

$$w_0 \to -\frac{1}{2} w_0^2 + w_1, \ \ w_1 \to -w_0 w_1 + w_2, ..., w_j \to -w_0 w_j - (\ldots) + w_{j+1}, \ \ j = 2, 3, ..., 3n + s - 4.$$

Тогда

$$w_0^{k_0} w_1^{k_1} \ldots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}} \to \left(-\frac{1}{2}\right)^{k_0} (-w_0)^{k_0 + k_1 + \ldots + k_{3n+s-4}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \ldots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}} + \tilde{Q}(w_0, w_1, ..., w_{3n+s-3}).$$

Наивысшая степень мономов в первом слагаемом последней суммы равна $2(k_0 + k_1 + \ldots + k_{3n+s-4}) = 3n + s - 2$. Под действием оператора $\left(\dfrac{d}{dz} + w_0\right)$ степень увеличивается на единицу и равна $3n + s - 1$, а порядок дифференцирования становится равным $3n + s - 2$. Значит, степень полинома Q_{3n+s-1}, если и окажется выше, то не за счет слагаемых полинома $P_{(3n+s-2)/2}$.

Убедимся, что и второе слагаемое из (6) не может дать моном степени выше $3n+s-1$. Действительно,

$$\left(w_1-\frac{1}{2}w_0^2\right)^{\frac{3n+s}{2}}=\sum_{l=0}^{\frac{3n+s}{2}}C_{\frac{3n+s}{2}}^{l}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2l}{2}}w_0^{3n+s-2l}w_1^l.$$

Тогда

$$\left(\frac{d}{dz}+w_0\right)\left(w_1-\frac{1}{2}w_0^2\right)^{\frac{3n+s}{2}}=\sum_{l=0}^{\frac{3n+s}{2}}C_{\frac{3n+s}{2}}^{l}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2l}{2}}w_0^{3n+s-2l+1}w_1^l+$$

$$+\sum_{l=0}^{\frac{3n+s}{2}}C_{\frac{3n+s}{2}}^{l}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2l}{2}}\left((3n+s-2l)w_0^{3n+s-2l-1}w_1^{l+1}+lw_0^{3n+s-2l}w_1^{l-1}w_2\right).$$

Мономы первой суммы имеют степень $3n+s+l-1\le 3n+s-1$, при $l\ge 2$. Поэтому следует рассмотреть мономы лишь для случаев $l=0, 1$. Первый тип мономов из второй суммы имеет степень $3n+s-l\le 3n+s-1$, при $l\ge 1$. Поэтому следует рассмотреть мономы лишь для случая $l=0$. Второй тип мономов из второй суммы имеет степень $3n+s-l\le 3n+s-1$, при $l\ge 1$. Но при $l=0$ он отсутствует, поэтому дополнительных исследований здесь не требуется. Итак, рассмотрим случай $l=0$ для первой суммы. Получаем моном w_0^{3n+s+1}, он выписан в формуле (2) с коэффициентом γ_{3n+s} и, следовательно, не входит в полином (3). Теперь рассмотрим случай $l=1$ для первой суммы и $l=0$ для второй. В этом случае имеем моном $w_0^{3n+s-1}w_1$ с коэффициентом $C_{\frac{3n+s}{2}}^{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2}{2}}+(3n+s)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s}{2}}=0$. Таким образом, степень полинома Q_{3n+s-1} не превосходит $3n+s-1$. Далее, умножая неравенство на k_0 из (6) на 2 и учитывая, что степень множителя w_0 равна 1, получаем ограничение $k_0\le 3n+s-3<3n+s-2$. При этом моном $w_0^{3n+s-1}w_1$, получаемый из второго слагаемого формулы (6), как показано выше, имеет коэффициент, равный нулю. Значит, степень $k_0\le 3n+s-2$. Теорема 1 доказана.

2. Порядок подвижного полюса решения уравнения (K_2).

Л е м м а 1. *Если решение уравнения (K_2) имеет подвижный полюс, то только первого порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (2) произведем замену $w\sim a_0(z-z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (2) являются старшая производная и либо слагаемые полинома (3), либо моном $\gamma_{3n+s}w_0^{3n+s+1}$. В первом случае имеем условие $q+3n+s=qk_0+(q+1)k_1+\ldots+(q+3n+s-2)k_{3n+s-2}$, которое с учетом (4) преобразуется в $q+3n+s=(q-1)(k_0+k_1+\ldots+k_{3n+s-2})+\langle k\rangle$. Так как $\langle k\rangle=3n+s+1$, то имеем $(q-1)(k_0+k_1+\ldots+k_{3n+s-2}-1)=0$. Условие $k_0+k_1+\ldots+k_{3n+s-2}=1$ вступает в противоречие с ограничением $\langle k\rangle=3n+s+1$. Значит, $q=1$. Во втором случае имеем условие $q+3n+s=q(3n+s+1)$. Откуда также находим $q=1$. Лемма доказана.

Заметим, что утверждение леммы 1 реализуется, в частности, для рациональных решений. Для уравнений ($_4K_2$) и ($_6K_2$) критерий существования рациональных решений получен в работах [9, 10]. Более общие случаи рассмотрены в статье [13].

3. Исследование решения уравнения (K_2), $n\ge 2$, в окрестности подвижного полюса. Применим метод резонансов для определения номеров коэффициентов a_j, которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении решения

$$w=\sum_{j=0}^{\infty}a_jt^{j-1},\quad t=z-z_0 \tag{8}$$

уравнения порядка $3n+s$ иерархии K_2 в окрестности подвижного полюса z_0, $z_0\in\mathbf{C}$. Произведем замену

$$w\sim a_0t^{-1}+\beta t^{r-1}, \tag{9}$$

тогда

$$w' - \frac{1}{2}w^2 \sim c_0\, t^{-2} + \beta(r - 1 - a_0)t^{r-2},\; c_0 = -\frac{1}{2}(a_0^2 + 2a_0),$$

$$H_n\left(w' - \frac{1}{2}w^2\right) \sim L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0)t^{-3n-s} + \beta(r-1-a_0)R_{3n+s-2}(r, c_0)t^{r-3n-s},$$

$$\left(\frac{d}{dz} + w\right)H_n\left(w' - \frac{1}{2}w^2\right) \sim (a_0 - 3n - s)L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0)t^{-3n-s-1} + \beta\tau_{3n+s}(r, a_0)t^{r-3n-s-1},$$

где резонансный многочлен

$$\tau_{3n+s}(r, a_0) = (r - 1 - a_0)(r - 3n - s + a_0)R_{3n+s-2}(r, c_0) + L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0), \tag{10}$$

а $L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0)$ определяется в [12] рекуррентными формулами

$$L_0(0, c_0) = 1,$$

$$L_{j+1}(0, c_0) = \frac{2(3j+2)(6j+1)}{3(j+1)(3j+1)}(2c_0 + 36j^2 + 48j + 15)(2c_0 + 36j^2 + 12j)(2c_0 + 9j^2 + 12j + 3)L_j(0, c_0), \tag{11}$$

в случае четного n;

$$L_0(1, c_0) = 2c_0(2c_0 + 3),$$

$$L_{j+1}(1, c_0) = \frac{2(3j+4)(6j+5)}{3(j+1)(3j+5)}(2c_0 + 36j^2 + 96j + 63)(2c_0 + 36j^2 + 60j + 24)(2c_0 + 9j^2 + 24j + 15)L_j(1, c_0), \tag{12}$$

в случае нечетного n; $R_{3n+s-2}(r, c_0)$ – резонансный многочлен соответствующего уравнения иерархии K_1. С учетом определения c_0 справедлива

Л е м м а 2. *Для четных n коэффициент a_0 определяется из условия*

$$(a_0 - 3n)\prod_{j=0}^{\frac{n-2}{2}}(a_0 - 6j - 3)(a_0 - 3j - 1)(a_0 + 6j + 5)(a_0 + 6j + 2)(a_0 + 3j + 3)(a_0 - 6j) = 0, \tag{13}$$

для нечетных n коэффициент a_0 определяется из условия

$$\begin{gathered}(a_0 - 1)(a_0 + 2)(a_0 + 3)(a_0 - 3n - 1)\times \\ \times\prod_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}(a_0 - 3j - 3)(a_0 - 6j - 4)(a_0 - 6j - 7)(a_0 + 3j + 5)(a_0 + 6j + 6)(a_0 + 6j + 9) = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Рассмотрим случай четных n, т. е. $s = 0$. Из уравнения (13) следует, что имеем семь типов коэффициентов a_0. Произведем в уравнении (K_2) подстановку (9). Тогда коэффициент при βt^{r-3n-1} определяет резонансный многочлен $\tau_{3n}\left(a_0(l), r\right)$. Последовательно имеем следующие резонансные многочлены.

Для первого типа из (9):

$$a_0^{(1)}(l) = 6l + 3,\; l = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-2}{2},\; n = 2, 4, 6, \ldots,$$

$$\begin{gathered}\tau_{3n}\left(a_0^{(1)}(l), r\right) = (r + 1)(r + 5)(r - 3n - 2)(r - 6l - 4)(r - 3n - 6)(r - 3n + 6l + 3)\times \\ \times\prod_{j=0}^{l-1}(r - 6j - 6l - 3n - 12)(r - 6j - 3n - 12)(r - 6j - 3n - 8)(r + 6j + 7)(r + 12j + 11)(r + 12j + 17)\times \\ \times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}}(r - 6i - 3)(r - 6i - 6)(r - 6i - 6l - 7)(r - 6i + 6l - 2)(r - 6i - 6l - 10)(r - 6i - 12l - 11).\end{gathered} \tag{15}$$

Для второго типа:

$$a_0^{(2)}(l) = 3l + 1,\ l = 0, 1, 2,..., \frac{n-2}{2},\ n = 2, 4, 6,...,$$

$$\tau_{3n}\left(a_0^{(2)}(l), r\right) = (r + 1)(r - 3)(r - 4)(r - 3l - 2)(r - 3n + 3l + 1)(r - 3n - 6l - 2)\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-3j-3n-3)(r-6j-3n-2)(r-6j-9)(r-6j-10)(r+3j+2)(r+6j+7)\times$$

$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}}(r-6i-6)(r-6i-3l-5)(r-6i-6l-7)(r-6i-3l-8)(r-6i-6l-9)(r-6i-6l-10). \quad (16)$$

Для третьего типа:

$$a_0^{(3)}(l) = -6l - 5,\ l = 0, 1, 2,..., \frac{n-2}{2},\ n = 2, 4, 6,...,$$

$$\tau_{3n}\left(a_0^{(3)}(l), r\right) = (r + 1)(r + 5)(r - 3n - 6l - 5)(r + 6l + 4)(r - 3n - 12 - 6)(r - 3n - 6l - 2)\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-6j-3n-2)(r-12j-3n-6)(r-12j-3n-12)(r+6j+7)(r+12j+11)(r+12j+17)\times$$

$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}}(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i+6l-2)(r-6i-6l-7)(r-6i-6l-10)(r-6i-12l-11). \quad (17)$$

Для четвертого типа:

$$a_0^{(4)}(l) = -6l - 2,\ l = 0, 1, 2,..., \frac{n-2}{2},\ n = 2, 4, 6,...,$$

$$\tau_{3n}\left(a_0^{(4)}(l), r\right) = (r + 6l + 1)(r - 3n + 2)(r - 3n - 6l - 2)(r - 3n - 6l + 1)\times$$
$$\times(r - 3n + 6l + 3)(r - 3n + 12l + 4)\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-6j-3n-6l-6)(r-6j-3n-6)(r-6j-3n-2)(r+6j+1)(r+12j+11)(r+12j+5)\times$$

$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}}(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i+6l-2)(r-6i-6l-4)(r-6i-12l-5)(r-6i-6l-7). \quad (18)$$

Для пятого типа:

$$a_0^{(5)}(l) = -3l - 3,\ l = 0, 1, 2,..., \frac{n-2}{2},\ n = 2, 4, 6,...,$$

$$\tau_{3n}\left(a_0^{(5)}(l), r\right) = (r + 1)(r - 3)(r - 4)(r - 3n - 6l - 2)(r + 3l + 2)(r - 3n - 3l - 3)\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-6j-3n+6l-4)(r-6j-3n+6l-3)(r-6j-3n-2)(r+3j+2)(r-3j-3n-3)(r+6j+7)\times$$

$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}}(r-6i-6)(r-6i-9)(r-6i-10)(r-6i-6l-7)(r-6i-3l-8)(r-6i-3l-5). \quad (19)$$

Для шестого типа:

$$a_0^{(6)}(l) = 6l,\ l = 1, 2,..., \frac{n-2}{2},\ n = 4, 6, 8,...,$$

$$\tau_{3n}\left(a_0^{(6)}(l), r\right) = (r + 1)(r + 5)(r + 11)(r - 6l - 1)(r + 6l - 2)(r - 3n + 6l)(r - 3n + 2)\times$$
$$\times (r - 3n - 2)(r - 3n - 6l + 1)(r - 3n + 6l + 3)(r - 3n - 6)(r - 3n - 12)\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{l-2}(r-6j-3n-8)(r-6j-3n-18)(r-6j-3n-6l-12)(r+6j+7)(r+12j+17)(r+12j+23)\times$$

$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}}(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-12l-5)(r-6i-6l-7)(r-6i-6l-4)(r-6i+6l-8). \quad (20)$$

Для седьмого типа:

$$a_0^{(7)}(l) = 3n,\ n = 2, 4, 6,...,$$

$$\tau_{3n}\left(a_0^{(7)}(l), r\right) = (r + 1)(r + 5)(r + 11)(r - 3n - 12)(r - 3n - 2)(r - 3n - 6)\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{\frac{n-4}{2}}(r+6j+7)(r+12j+17)(r+12j+23)(r-3n-12j-24)(r-3n-12j-18)(r-3n-6j-8). \quad (21)$$

Рассмотрим теперь случай нечетных n, т. е. $s = 1$. Из уравнения (14) следует, что имеем 10 типов коэффициентов a_0. Произведем в формуле (K_2) подстановку (9), тогда при βt^{r-3n-2} выделяем резонансный многочлен $\tau_{3n+1}\left(a_0(l), r\right)$. В этом случае имеем следующие резонансные многочлены.

Для первого типа из (10):

$$a_0^{(1)} = 3l + 3,\ l = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2} n = 3, 5, 7, \ldots,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(1)}, r\right) = (r + 1)(r + 5)(r - 2)(r - 3)(r - 8)(r - 9)(r - 3l - 4)\times$$
$$\times(r - 3n + 3l + 2)(r - 3n - 3)(r - 3n - 7)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-6j-3n-13)(r-3j-3n-6)(r-6j-3n+6l-6)(r+3j+4)(r-6j-3n+6l-5)(r+6j+11)\times$$
$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}}(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-12l-5)(r-6i-6l-7)(r-6i-6l-4)(r-6i+6l-8). \quad (22)$$

Для второго типа:

$$a_0^{(2)}(l) = 6l + 4,\ l = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2},\ n = 3, 5, 7, \ldots,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(2)}, r\right) = (r + 1)(r + 7)(r + 6l + 2)(r - 3n + 1)(r - 3n - 3)(r - 3n + 6l + 6)(r - 6l - 5)\times$$
$$\times(r - 3n + 6l + 3)(r - 3n - 6l - 4)(r - 3n - 9)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-12j-3n-21)(r-12j-3n-15)(r-6j-3n-7)(r+6j+5)(r+12j+13)(r+12j+19)\times$$
$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}}(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-8)(r-6i+6l-4)(r-6i-6l-11)(r-6i-12l-13). \quad (23)$$

Для третьего типа:

$$a_0^{(3)}(l) = 6l + 7,\ l = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2},\ n = 3, 5, 7, \ldots,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(3)}, r\right) = (r + 1)(r + 5)(r + 7)(r + 13)(r - 3n - 7)(r - 3n - 9)(r - 3n - 15)\times$$
$$\times (r - 3n + 6l + 6)(r - 6l - 8)(r - 3n - 3)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-12j-3n-27)(r-12j-3n-21)(r-6j-3n-13)(r+6j+11)(r+12j+19)(r+12j+25)\times$$
$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}}(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-11)(r-6i-6l-14)(r-6i-12l-19)(r-6i+6l+2). \quad (24)$$

Для четвертого типа:

$$a_0^{(4)}(l) = -3l - 5,\ l = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2},\ n = 3, 5, 7, \ldots,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(4)}, r\right) = (r + 1)(r + 5)(r - 3n - 7)(r - 3n - 3)(r - 3n + 6l + 7)(r - 3n + 6l + 6)\times$$
$$\times(r - 3n + 6l + 1)(r - 3n + 6l - 3)(r + 3l + 4)(r - 3n - 3l - 6)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-6j-3n-13)(r-3j-3n-6)(r-6j-3n+6l-5)(r+3j+4)(r-3n-6j+6l-6)(r+6j+11)\times$$
$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}}(r-6i-2)(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-3l-10)(r-6i-3l-7)(r-6i-3l-11). \quad (25)$$

Для пятого типа:

$$a_0^{(5)}(l) = -6l - 6,\ l = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2},\ n = 3, 5, 7, \ldots,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(5)}, r\right) = (r + 1)(r + 7)(r - 3n - 3)(r - 3n + 1)(r - 3n - 6l - 9)(r - 3n - 6l - 4)\times$$
$$\times(r - 3n + 6l + 6)(r - 3n - 6l - 7)(r + 6l + 5)(r + 6l + 2)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-6j-3n-6l-15)(r-6j-3n-9)(r-6j-3n-7)(r+6j+5)(r+12j+13)(r+12j+19)\times$$
$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}}(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-8)(r-6i-6l-11)(r-6i-12l-13)(r-6i+6l-4). \quad (26)$$

Для шестого типа:

$$a_0^{(6)}(l) = -6l - 9,\ l = 0, 1, 2,..., \frac{n-3}{2},\ n = 3, 5, 7,...,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(6)}, r\right) = (r+1)(r+5)(r+7)(r+13)(r-3n-6l-10)(r-3n-15)\times$$
$$\times(r-3n-9)(r-3n-7)(r-3n-3)(r+6l+8)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{l-1}(r-12j-3n-27)(r-12j-3n-21)(r-6j-3n-13)(r+6j+11)(r+12j+19)(r+12j+25)\times$$
$$\times\prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}}(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-11)(r-6i+6l+2)(r-6i-12l-19)(r-6i-6l-14). \quad (27)$$

Для седьмого типа:

$$a_0^{(7)} = -3,\ n = 3, 5, 7,...,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(7)}, r\right) = (r+1)(r+2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)\ (r-7)(r-8)(r-12)(r-3n-4)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}}(r-6j-9)(r-6j-10)(r-6j-11)(r-6j-13)(r-6j-14)(r-6j-18). \quad (28)$$

Для восьмого типа:

$$a_0^{(8)} = -2,\ n = 3, 5, 7,...,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(8)}, r\right) = (r+1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-9)(r-3n-3)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}}(r-6j-10)(r-6j-11)(r-6j-12)(r-6j-13)(r-6j-14)(r-6j-15). \quad (29)$$

Для девятого типа:

$$a_0^{(9)} = 1,\ n = 3, 5, 7,...,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(9)}, r\right) = (r+1)(r+2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-12)(r-3n)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}}(r-6j-9)(r-6j-10)(r-6j-11)(r-6j-13)(r-6j-14)(r-6j-18). \quad (30)$$

Для десятого типа:

$$a_0^{(10)} = 3n+1,\ n = 3, 5, 7,...,$$

$$\tau_{3n+1}\left(a_0^{(10)}, r\right) = (r+1)(r+5)(r+7)(r+13)(r+19)(r-3n-3)(r-3n-7)\times$$
$$\times(r-3n-9)(r-3\text{n}-15)(r-3n-21)\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}}(r+6j+11)(r+12j+31)(r+12j+25)(r-3n-12j-33)\times$$
$$\times(r-3n-12j-27)(r-3n-6j-13). \quad (31)$$

Резонансные многочлены $\tau_{3n}\left(1, r\right)$ и $\tau_{3n+1}\left(-2, r\right)$ имеют соответственно $3n - 1$ и $3n$ целых положительных корней. Также можно убедиться, что при указанных ограничениях на i, j, l, n корни каждого из многочленов (15)–(31) целые и однократные. Относительно всех резонансных многочленов уравнения (K_2) во всех случаях справедлива

Т е о р е м а 2. *Резонансные многочлены уравнения* (K_2) *имеют только целые и однократные корни.*

Заметим, что из характера корней резонансных многочленов следует, что уравнение (K_2) не проходит тест Пенлеве, так как одно из условий теста требует, чтобы для каждого баланса (a_0, q) существовал $m - 1$ целый положительный резонанс, где m – порядок уравнения [14]. Тем не менее уравнение (K_2), так же как и уравнения иерархий $\left({}_{2n}P_1\right)$, $\left({}_{2n}P_2\right)$ и K_1, проходит ослабленный тест

Пенлеве, в котором упомянутое условие заменяется на существование хотя бы одного баланса (a_0, q), для которого вместе с резонансом – 1 существует еще m – 1 целый положительный резонанс. Отметим также, что уравнение $\left({}_4P_1\right)$ имеет свойство Пенлеве [15].

Литература

1. *Painleve' P.* // Bull. Soc. Math. France. 1900. Vol. 28. P. 201–261.
2. *Painleve' P.* // Acta Math. 1902. Vol. 25. P. 1–85.
3. *Gambier B.* // Acta Math. 1909. Vol. 33. P. 1–55.
4. *Ince E. L.* Ordinary Differential Equations. Dover; New York, 1956.
5. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
6. *Громак В. И.*, *Лукашевич Н. А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск, 1990.
7. *Кудряшов Н. А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 2004.
8. *Абловиц М.*, *Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М., 1987.
9. *Громак В. И.* // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1017–1026.
10. *Громак В. И.* // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 172–180.
11. *Кудряшов Н. А.* // ТМФ. 2000. Т. 122. С. 72–87.
12. *Грицук Е. В.* // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. 2011. № 4. С. 33–41.
13. *N. A. Kudryashov* // Physics Letters A. 2008. Vol. 372. P. 1945–1956.
14. *Ablowitz M. J.*, *Ramani A.*, *Segur H.* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715–721.
15. *Simomura S. 0*// Nonlinierity. 2001. Vol. 14. P. 193–203.

E. V. GRYTSUK., V. I. GROMAK

ANALYTICAL PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE PENLEVE-TYPE NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The theorem of a general structure of equations in the K_2 hierarchy is proved. The order of movable poles of solutions is determined. The resonant polynomials are constructed in explicit form, and the character of their roots is determined.