ВЕСЦI НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМII НАВУК БЕЛАРУСI № 1 2014
СЕРЫЯ ФIЗIКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.1

О. И. ДУГИНОВ

ПОКРЫТИЕ РАСЩЕПЛЯЕМОГО ГРАФА НАИМЕНЬШИМ ЧИСЛОМ ПОЛНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ПОДГРАФОВ

Институт математики НАН Беларуси

(*Поступила в редакцию 06.12.2013*)

Введение. В данной работе исследуется вычислительная сложность задач покрытия графа наименьшим числом биклик (полных двудольных подграфов) в классе расщепляемых графов.

Рассматриваются только конечные неориентированные графы $G = (V, E)$ без кратных ребер и петель с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Используется стандартная теоретико-графовая терминология [1, 2]. Пусть $S \subseteq V$ – подмножество вершин графа G. Подграф графа G, порожденный множеством S, обозначается как $G[S]$ и $G - S = G[V \setminus S]$. Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если существует разбиение его множества вершин $V = U_1 \cup U_2$ такое, что U_1, U_2 – независимые множества в G, и обозначается как $G = ((U_1, U_2), E)$. Здесь одно из множеств U_1, U_2 может быть пустым. Если при этом $E = \{u_1u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$, то G называется *полным двудольным*. Полный двудольный граф $G = ((U_1, U_2), E)$ является *связным*, если выполняется одно из условий: $|U_1| + |U_2| = 1$ или $E \neq \varnothing$.

Бикликой графа G называется *связный* полный двудольный (не обязательно вершинно-порожденный) подграф $B = ((U_1, U_2), \Sigma)$ графа G. При этом биклика B называется *звездой* с центром в вершине v, если $U_1 = \{v\}$ или $U_2 = \{v\}$. Биклика, которая содержит только одну вершину, называется *тривиальной*. Стоит отметить важное обстоятельство. Если граф G содержит изолированную вершину v, то существует ровно одна биклика графа G, которая включает вершину v – тривиальная биклика, состоящая из вершины v. Будем говорить, что биклика B графа G покрывает ребро $e \in E(G)$, если e содержится в B, т. е. $e \in \Sigma$. Пусть S – некоторое множество (не обязательно всех) биклик графа G. В случае, когда хотя бы одна биклика из S покрывает $e \in E(G)$, будем говорить, что S покрывает e. Биклики графа имеют широкое практическое применение. Они используются для моделирования прикладных задач, которые возникают в области биоинформатики, анализа данных, искусственного интеллекта и др. [3, 4].

Множество S биклик графа G называется *бикликовым покрытием мощности* $|S|$ графа G, если каждое ребро G содержится хотя бы в одной биклике из S. Другими словами, бикликовое покрытие графа G – множество биклик G, которое покрывает каждое ребро G. Наименьшее число биклик в бикликовом покрытии графа G обозначается как $bc(G)$.

Множество S биклик графа G называется *бикликовым покрытием вершин мощности* $|S|$ графа G, если каждая вершина графа G содержится хотя бы в одной биклике из S. Обозначим через $b(G)$ наименьшее число биклик в бикликовом покрытии вершин G.

В данной работе рассматриваются следующие две задачи распознавания, которые связаны с параметрами $bc(G)$ и $b(G)$ графа G.

Бикликовое покрытие

Условие: задан граф G и натуральное число k.

Вопрос: существует ли бикликовое покрытие графа G мощности не более k?

Отметим, что этот вопрос эквивалентен следующему вопросу: верно ли, что $bc(G) \leq k$? В оптимизационной версии задачи *Бикликовое покрытие* требуется найти наименьшее (по мощности) бикликовое покрытие заданного графа.

Бикликовое покрытие вершин

Условие: задан граф G и натуральное число k.

Вопрос: существует ли бикликовое покрытие вершин графа G мощности не более k?

Вопрос, сформулированный выше, эквивалентен следующему: верно ли, что $b(G) \leq k$? В оптимизационной версии задачи *Бикликовое покрытие вершин* требуется найти наименьшее (по мощности) бикликовое покрытие вершин заданного графа.

Задача *Бикликовое покрытие* имеет широкое применение в области искусственного интеллекта, биологии и теории потоков [4, 5]. Задача *Бикликовое покрытие вершин* применяется в области анализа данных и безопасности сетей, в сфере электронной торговли и поиска информации [3, 6, 7].

Обе рассматриваемые задачи являются **NP**-полными и остаются **NP**-полными в классе двудольных графов [3]. Цель данной работы состоит в том, чтобы установить вычислительную сложность этих задач в классе расщепляемых графов. Мы покажем, что в этом классе графов обе задачи остаются **NP**-полными.

Впервые понятие расщепляемого графа было введено С. Фолдесом и П. Хаммером в [8] и независимо Р. И. Тышкевич и А. А. Черняк в [9]. *Расщепляемым графом* называется граф, который допускает разбиение его множества вершин на клику и независимое множество. Класс расщепляемых графов содержится в хорошо известном классе хордальных графов. Более того, граф G расщепляемый тогда и только тогда, когда оба графа G и $\overline{G}$ являются хордальными [8]. В терминах запрещенных порожденных подграфов, расщепляемый граф характеризуется как граф, который не содержит графы C_4, $\overline{C}_4$, C_5 в качестве порожденных подграфов [8]. Многие, в общем случае **NP**-трудные задачи становятся полиномиально разрешимыми в классе расщепляемых графов.

Вычислительная сложность задачи *Бикликовое покрытие* для расщепляемых графов устанавливается в п. 1, задачи *Бикликовое покрытие вершин* – в п. 2.

1. Бикликовое покрытие расщепляемого графа. Известно, что задача *Бикликовое покрытие* является **NP**-полной в следующих классах графов: двудольные графы [10], хордальные двудольные графы [11]. В то же время эта задача становится полиномиально разрешимой в таких классах графов, как домино-свободные двудольные графы [4], C_4-свободные двудольные графы [11], выпуклые двудольные графы [12], интервальные двудольные графы [13], последовательно-параллельные графы [14], графы с ограниченной путевой шириной [15].

Т е о р е м а 1. *Задача Бикликовое покрытие является* **NP**-*полной в классе расщепляемых графов.*

Для того чтобы доказать эту теорему, нам потребуется два утверждения. Следующая очевидная лемма дает структурное свойство биклик графа.

Л е м м а 1. *Пусть G – граф и $B = ((U_1, U_2), \Sigma)$ – любая его биклика, X – собственное подмножество множества $U_1 \cup U_2$. При удалении из B множества вершин X образуется биклика или пустой граф* (*т. е. граф, не содержащий ребер*).

Л е м м а 2. *Пусть $G_1 = (V, E)$ – граф, $X \subseteq V$ – любое независимое множество G_1. Для двудольного графа $G_2 = ((X, V \setminus X),\ E')$, где $E' = \{uv \in E : u \in X, v \in V \setminus X\}$ верно $bc(G_2) \leq bc(G_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G_1 = (V, E)$ – граф и X – произвольное независимое множество в G_1. Если $X = \varnothing$, то $bc(G_2) = 0$ и неравенство $bc(G_2) \leq bc(G_1)$ очевидно выполняется. Пусть $X \neq \varnothing$. Обозначим $\overline{X} = V \setminus X$. Рассмотрим двудольный граф $G_2 = ((X, \overline{X}), E')$, где $E' = \{uv \in E : u \in X,\ v \in \overline{X}\}$. Граф G_2 является подграфом G_1 и получается из G_1 путем удаления всех ребер G_1, оба конца которых принадлежат $\overline{X}$. Требуется доказать, что $bc(G_2) \leq bc(G_1)$.

Пусть S – наименьшее бикликовое покрытие графа G_1, которое состоит из биклик $((A_i, B_i), \Sigma_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, bc(G_1)\}$. Построим бикликовое покрытие S' графа G_2 такое, что $|S'| \leq |S|$. Для этого разобьем множество S на три непересекающихся подмножества $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, где

$$S_1 := \{((A_i, B_i), \Sigma_i) \in S : \Sigma_i \subseteq E'\},$$
$$S_2 := \{((A_i, B_i), \Sigma_i) \in S : \Sigma_i \cap E' \neq \varnothing, \Sigma_i \setminus E' \neq \varnothing\},$$
$$S_3 := \{((A_i, B_i), \Sigma_i) \in S : \Sigma_i \cap E' = \varnothing\}.$$

Заметим, что каждое ребро графа G_1, принадлежащее E', покрывается множеством биклик $S_1 \cup S_2$, и каждая биклика из S_1 является бикликой графа G_2. Каждую биклику $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ из S_2 преобразуем в биклику графа G_2, которую обозначим как $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ таким образом, что все ребра из E', покрытые бикликой $((A_i, B_i), \Sigma_i)$, будут покрыты и $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$.

Рассмотрим произвольную биклику $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ из S_2. Так как $\Sigma_i \cap E' \neq \varnothing$ и $\Sigma_i \setminus E' \neq \varnothing$, то имеет место хотя бы одно из следующих двух условий: $A_i \cap X \neq \varnothing$, $A_i \cap \overline{X} \neq \varnothing$ или $B_i \cap X \neq \varnothing$, $B_i \cap \overline{X} \neq \varnothing$. Без потери общности предположим, что имеет место первое условие. Докажем, что в этом случае $B_i \subseteq \overline{X}$. Доказательство проведем от противного. Допустим, что $B_i \cap X \neq \varnothing$, и рассмотрим вершину $b \in B_i \cap X$. Зафиксируем некоторую вершину $x \in A_i \cap X$. Так как в графе G_1 каждая вершина из A_i смежна с каждой вершиной из B_i, то вершины b и x смежны. Последнее невозможно, так как X – независимое множество G_1. Поэтому $B_i \cap X = \varnothing$ и $B_i \subseteq \overline{X}$.

Таким образом, выполняется $A_i \cap X \neq \varnothing$, $A_i \cap \overline{X} \neq \varnothing$, $B_i \subseteq \overline{X}$. Положим $A_i^* := A_i \cap X$, $B_i^* := B_i$ и $\Sigma_i^* := \Sigma_i \cap E'$. Легко видеть, что $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ – биклика графа G_2. Обозначим

$$S_2' := \{((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*) : ((A_i, B_i), \Sigma_i) \in S_2\}.$$

Покажем, что множество $S' := S_1 \cup S_2'$ биклик графа G_2 является бикликовым покрытием графа G_2. Известно, что множество биклик $S_1 \cup S_2$ графа G_1 покрывает каждое ребро $e \in E'$. Если ребро e покрыто бикликой из S_1, то оно, очевидно, покрывается и множеством биклик S'. Если же e покрыто бикликой $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ из S_2, то ребро e покрыто бикликой $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ из S_2'. Следовательно, и в этом случае S' покрывает e. Поэтому S' – бикликовое покрытие двудольного графа G_2, количество биклик в котором не более чем $|S_1| + |S_2'| \leq |S_1| + |S_2| \leq |S| = bc(G_1)$. Таким образом, $bc(G_2) \leq bc(G_1)$. Лемма 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Задача *Бикликовое покрытие* принадлежит классу **NP** [10]. Мы построим полиномиальное сведение задачи *Бикликовое покрытие* в классе двудольных графов (которая является **NP**-полной) к задаче *Бикликовое покрытие* в классе расщепляемых графов. Пусть $G = ((X, Y), E)$ – двудольный граф без изолированных вершин, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$.

Преобразуем двудольный граф G в расщепляемый граф $\Gamma = (V', E')$ следующим образом (в качестве примера см. рис. 1).

1. Изначально положим $V' := X \cup Y$, $E' := E$.
2. В графе Γ каждые две различные вершины из Y соединим ребром.
3. Добавим к графу Γ множество новых вершин $Y' := \{y_1', y_2', \dots, y_q'\}$.
4. Каждые две различные вершины из Y' соединим ребром.
5. Соединим ребром каждую вершину y_i' из Y' с каждой вершиной y_j из Y.

Построенный таким образом граф $\Gamma = (V', E')$ имеет множество вершин $V = X \cup Y \cup Y'$ и множество ребер $E' = E \cup \{y_i y_j : 1 \leq i < j \leq q\} \cup \{y_i' y_j' : 1 \leq i < j \leq q\} \cup \{y_i' y_j : 1 \leq i, j \leq q\}$. Граф Γ является

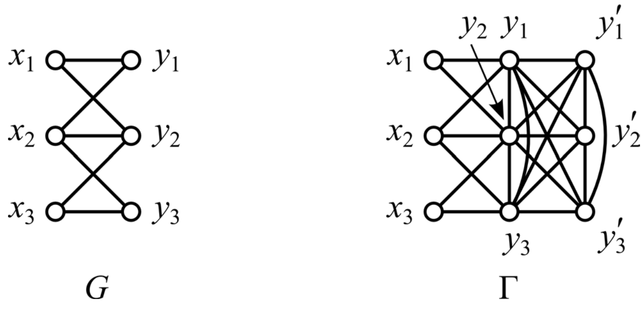

Рис. 1. Пример преобразования двудольного графа G в расщепляемый граф Γ

расщепляемым, в котором X – независимое множество, а $Y \cup Y'$ – клика. Очевидно, что такое преобразование двудольного графа в расщепляемый можно осуществить за полиномиальное время. Утверждается, что $bc(\Gamma) = bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$. Это равенство вытекает из следующих двух лемм.

Л е м м а 3. $bc(\Gamma) \le bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим наименьшее бикликовое покрытие S графа G, которое состоит из биклик $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ и $A_i \subseteq X$, $B_i \subseteq Y$, $i = 1, 2, ..., bc(G)$. Построим бикликовое покрытие S' графа Γ такое, что $|S'| = |S| + \lceil \log_2 q \rceil$. Так как G является подграфом Γ, то каждая биклика из S является бикликой Γ. Заметим, что каждое ребро e графа Γ, принадлежащее E, покрывается множеством биклик S. Преобразуем каждую биклику $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ из S в биклику $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ графа Γ, где $A_i^* := A_i \cup Y'$, $B_i^* := B_i$ и $\Sigma_i^* := \Sigma_i \cup \{y'_r y_s : y'_r \in Y', y_s \in B_i\}$. Обозначим $S_1 := \{((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*) : 1 \le i \le bc(G)\}$. Так как S покрывает все ребра Γ, принадлежащие E, то множество биклик S_1 также покрывает все ребра Γ, которые принадлежат множеству E. Это следует из построения биклик S_1. Покажем, что S_1 покрывает каждое ребро Γ, принадлежащее множеству $\{y'_r y_s : 1 \le r, s \le q\}$.

Рассмотрим произвольное ребро Γ вида $y'_r y_s$, где $y'_r \in Y'$ и $y_s \in Y$, $1 \le r$, $s \le q$. Так как исходный граф G без изолированных вершин, то в G существует ребро e, инцидентное вершине y_s. Пусть $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ – биклика из S, которая покрывает e. Так как $A_i \subseteq X$, $B_i \subseteq Y$, то $y_s \in B_i$. Тогда соответствующая биклика $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ из S_1 покрывает ребро $y'_r y_s$, поскольку $y'_r y_s \in \Sigma_i^*$. Таким образом, каждое ребро Γ, принадлежащее множеству $E \cup \{y'_r y_s : 1 \le r, s \le q\}$, покрыто некоторой бикликой из S_1.

Теперь построим множество S_2 биклик графа Γ, которое покрывает все ребра Γ, непокрытые бикликами из S_1. Точнее, цель состоит в том, чтобы построить множество S_2 биклик Γ, которое покрывает каждое ребро Γ, принадлежащее множеству $\{y_i y_j : 1 \le i < j \le q\} \cup \{y'_i y'_j : 1 \le i < j \le q\}$. Заметим, что множество ребер $\{y_i y_j : 1 \le i < j \le q\}$ совпадает с множеством ребер порожденного подграфа $\Gamma[Y]$ графа Γ, а множество ребер порожденного подграфа $\Gamma[Y']$ графа Γ совпадает с $\{y'_i y'_j : 1 \le i < j \le q\}$. Пусть $((A, B), \Sigma)$ – некоторая биклика графа $\Gamma[Y]$. *Близнецом* биклики $((A, B), \Sigma)$ называется биклика $((A', B'), \Sigma')$ графа $\Gamma[Y']$, где $A' = \{y'_i : y_i \in A\}$, $B' = \{y'_i : y_i \in B\}$ и $\Sigma' = \{y'_i y'_j : y_i y_j \in \Sigma\}$. *Слиянием* биклики $((A, B), \Sigma)$ и ее близнеца называется операция, в результате которой получается биклика графа Γ вида $((A \cup A', B \cup B'), \Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma'')$, где $\Sigma'' = \{y'_i y_j : y'_i \in B', y_j \in A\} \cup \{y'_i y_j : y'_i \in A', y_j \in B\}$. Заметим, что биклика, которая получается в результате слияния биклики $((A, B), \Sigma)$ и ее близнеца, покрывает все ребра Γ, покрываемые бикликой $((A, B), \Sigma)$ и ее близнецом.

П р и м е р. Рассмотрим граф Γ, изображенный на рис. 1. На рис. 2, *а* выделены биклика $((A, B), \Sigma)$ графа $\Gamma[Y]$, где $A = \{y_2\}$, $B = \{y_1, y_3\}$, $\Sigma = \{y_2 y_1, y_2 y_3\}$ и ее близнец $((A', B'), \Sigma')$, где $A' = \{y'_2\}$, $B' = \{y'_1, y'_3\}$, $\Sigma' = \{y'_2 y'_1, y'_2 y'_3\}$. В результате слияния биклики $((A, B), \Sigma)$ и ее близнеца получается биклика $((A'', B''), \Sigma'')$, представленная на рис. 2, *б*, в которой $A'' = \{y_2, y'_2\}$, $B'' = \{y_1, y_3, y'_1, y'_3\}$ и $\Sigma'' = \{y_2 y_1, y_2 y_3, y'_2 y'_1, y'_2 y'_3, y_2 y'_1, y_2 y'_3, y'_2 y_1, y'_2 y_3\}$.

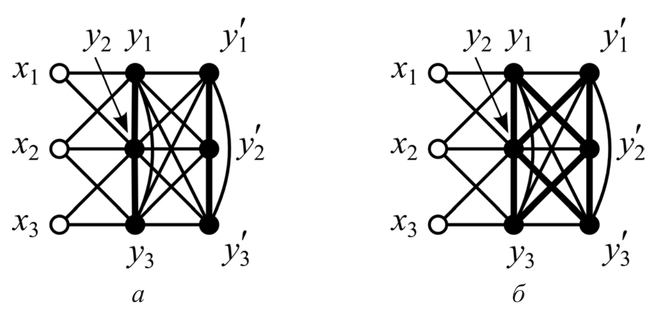

Рис. 2. В графе Γ выделены жирным биклика и ее близнец (*а*); биклика, которая получается в результате их слияния (*б*)

Известно [16], что $bc(K_n) = \lceil \log_2 n \rceil$, где K_n – полный граф на n вершинах. Каждый из графов $\Gamma[Y]$ и $\Gamma[Y']$ является полным графом на q вершинах. Тогда существует бикликовое покрытие P графа $\Gamma[Y]$, которое состоит из $\lceil \log_2 q \rceil$ биклик. Теперь для каждой биклики $((A,B),\Sigma)$ из P рассмотрим ее близнеца $((A',B'),\Sigma')$. Заметим, что множество биклик $P' := \{((A',B'),\Sigma') : ((A,B),\Sigma) \in P\}$ покрывает каждое ребро графа $\Gamma[Y']$ и состоит также из $\lceil \log_2 q \rceil$ биклик. Для каждой биклики $((A,B),\Sigma)$ из P выполним слияние с ее близнецом $((A',B'),\Sigma')$ из P'. Получившееся в результате множество биклик обозначим как S_2. Легко видеть, что S_2 покрывает каждое ребро графов $\Gamma[Y]$, $\Gamma[Y']$ и содержит $\lceil \log_2 q \rceil$ биклик.

Множество биклик S_1 покрывает каждое ребро графа Γ, принадлежащее множеству $E \cup \{y'_r y_s : 1 \le r, s \le q\}$, а множество биклик S_2 покрывает каждое ребро Γ, принадлежащее множеству $\{y_i y_j : 1 \le i < j \le q\} \cup \{y'_i y'_j : 1 \le i < j \le q\}$. Поэтому $S' := S_1 \cup S_2$ является бикликовым покрытием графа Γ, которое состоит ровно из $|S_1| + |S_2| = |S| + \lceil \log_2 q \rceil = bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$ биклик. Следовательно, выполняется неравенство $bc(\Gamma) \le bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$. Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. $bc(G) \le bc(\Gamma) - \lceil \log_2 q \rceil$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим наименьшее бикликовое покрытие S графа Γ. Построим бикликовое покрытие графа G мощности не более чем $|S| - \lceil \log_2 q \rceil$.

Нетрудно видеть, что два ребра любого графа содержатся в некоторой одной биклике этого графа тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: они или смежны (т. е. имеют одну общую концевую вершину), или содержатся в некотором цикле длины четыре. Заметим, что для любых двух ребер графа Γ, одно из которых принадлежит множеству E, а другое является ребром графа $\Gamma[Y']$, оба условия не выполняются. Поэтому любая биклика графа Γ не может одновременно содержать ребро из E и ребро графа $\Gamma[Y']$. Разобьем множество S на два непересекающихся подмножества $S := S_1 \cup S_2$. К S_1 отнесем все биклики из S, которые содержат хотя бы одно ребро графа $\Gamma[Y']$. Все остальные биклики отнесем к S_2.

Легко видеть, что S_2 покрывает все ребра Γ, принадлежащие множеству E. Так как граф $\Gamma[Y']$ – полный граф на q вершинах, то $|S_1| \ge \lceil \log_2 q \rceil$. Действительно, в противном случае, удалив из каждой биклики множества S_1 все вершины из $V' \setminus Y'$, получили бы множество, скажем S'_1, подграфов графа $\Gamma[Y']$, которое, согласно лемме 1, состоит из биклик и пустых графов. Удалив из S'_1 пустые графы, очевидно, получили бы бикликовое покрытие полного графа $\Gamma[Y']$ на q вершинах, состоящее из менее чем $\lceil \log_2 q \rceil$ биклик, что невозможно. Поэтому $|S_1| \ge \lceil \log_2 q \rceil$ и

$$|S_2| = |S| - |S_1| \le bc(\Gamma) - \lceil \log_2 q \rceil. \quad (1)$$

Образуем граф H из графа Γ путем удаления из Γ всех вершин множества Y' и всех ребер, которые не содержатся ни в одной биклике из S_2. Так как S_2 покрывает все ребра из E, то двудольный граф G является подграфом графа H.

Теперь из каждой биклики множества S_2 удалим вершины, принадлежащие Y'. В результате получим множество подграфов графа H, которое обозначим как S'_2. Согласно лемме 1, каждый элемент S'_2 является или бикликой графа H, или пустым графом. Удалим из S'_2 все пустые графы. Очевидно, что S'_2 является бикликовым покрытием графа H. Поэтому $bc(H) \le |S'_2|$. Учитывая (1) и тот факт, что $|S'_2| \le |S_2|$, получаем следующую оценку сверху:

$$bc(H) \le |S'_2| \le |S_2| \le bc(\Gamma) - \lceil \log_2 q \rceil. \quad (2)$$

В графе H множество X является независимым, а двудольный граф $G = ((X, Y), E)$ получается из H путем удаления всех ребер, оба конца которых принадлежат $Y \subseteq V(H)$. Из леммы 2 следует, что $bc(G) \le bc(H)$. Учитывая (2), получаем $bc(G) \le bc(\Gamma) - \lceil \log_2 q \rceil$. Лемма 4 доказана.

Из равенства $bc(\Gamma) = bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$ следует, что для двудольного графа G существует бикликовое покрытие, состоящее из не более чем k биклик тогда и только тогда, когда для расщепляемого графа Γ существует бикликовое покрытие, мощность которого не более чем $k + \lceil \log_2 q \rceil$. Требуемое полиномиальное сведение построено. Теорема 1 доказана.

2. Бикликовое покрытие вершин расщепляемого графа. Пусть $G = ((X, Y), E)$ – двудольный граф и $Y' \subseteq Y$. Будем говорить, что Y' доминирует все вершины из X, если каждая вершина из X смежна хотя бы с одной вершиной из Y'. В этом разделе мы докажем, что задача *Бикликовое покрытие вершин* остается **NP**-полной в классе расщепляемых графов. Для этого построим полиномиальное сведение от следующей известной **NP**-полной задачи [17]:

Доминирующее множество в двудольном графе

Условие: задан двудольный граф $G = ((X, Y), E)$ и натуральное число k.

Вопрос: существует ли подмножество вершин $Y' \subseteq Y$, доминирующее все вершины из X такое, что $|Y'| \leq k$?

Т е о р е м а 2. *Задача Бикликовое покрытие вершин является* **NP**-*полной в классе расщепляемых графов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = ((X, Y), E)$ – двудольный граф без изолированных вершин. Преобразуем его в расщепляемый граф $H = (V, E')$, соединив ребром каждую пару вершин из Y. Таким образом, граф H представляет собой расщепляемый граф с множеством вершин $V = X \cup Y$ и множеством ребер $E' = E \cup \{uv : u, v \in Y\}$, в котором X – независимое множество, а Y – клика.

Мы покажем, что в графе G существует множество вершин $Y' \subseteq Y$, доминирующее все вершины из X такое, что $|Y'| \leq k$ тогда и только тогда, когда в H существует бикликовое покрытие вершин мощности не более k.

Пусть $Y' \subseteq Y$ доминирует все вершины из X и $|Y'| \leq k$. Тогда множество максимальных по включению звезд графа H с центрами в каждой вершине из Y' является бикликовым покрытием вершин H мощности не более k.

Пусть S – бикликовое покрытие вершин графа H мощности не более k, которое состоит из биклик $((A_i, B_i), \Sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Предполагаем, что S не содержит тривиальных биклик (в противном случае мы всегда можем «расширить» тривиальную биклику до звезды, которая содержит по крайней мере две вершины). Не теряя общности, пусть $B_i \subseteq Y$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Из каждого множества B_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) выберем любую одну вершину. Множество выбранных вершин обозначим как Y'. Несложно видеть, что в графе G множество Y' доминирует все вершины из X и $|Y'| \leq |S| = k$. Теорема 2 доказана.

Стоит отметить, что задача *Бикликовое покрытие вершин* тривиально решается за полиномиальное время в классе пороговых графов, который, как известно, является подклассом расщепляемых графов. Напомним, что класс *пороговых графов* – рекурсивно-порождаемый и может быть определен следующим образом [1, с. 226]. Одновершинный граф является пороговым графом. Если G – пороговый граф, то

– граф, полученный из G путем добавления к нему новой изолированной вершины, является пороговым;

– граф, полученный из G путем добавления к нему новой вершины, смежной с каждой вершиной G, является пороговым.

Очевидно, что каждая связная компонента любого порогового графа содержит доминирующую вершину (т. е. вершину, которая смежна со всеми другими вершинами связной компоненты). Максимальная по включению звезда с центром в доминирующей вершине связной компоненты содержит все вершины этой компоненты, поэтому бикликовое покрытие вершин любого порогового графа G, состоящее из максимальных по включению звезд с центрами в доминирующих вершинах связных компонент G, является наименьшим.

Заключение. В работе доказано, что в классе расщепляемых графов задачи *Бикликовое покрытие* и *Бикликовое покрытие вершин* являются **NP**-полными. Также установлено, что вторая задача решается за полиномиальное время для пороговых графов. Открытым вопросом остается сложностной статус первой задачи в классе пороговых графов.

Отметим, что существует близкая к рассмотренным здесь задача *Бикликовое разбиение* (см., напр., [3, 4, 18]), которая в оптимизационном варианте формулируется следующим образом: требуется найти наименьшее бикликовое покрытие заданного графа, состоящее из попарно реберно-непересекающихся биклик. Полиномиальный алгоритм, решающий эту задачу для расщепляемых графов, предложенный автором данной работы в [19], – ошибочен. Сложностной статус задачи *Бикликовое разбиение* в классе расщепляемых графов является открытым вопросом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф12РА-006).

Литература

1. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. А.* Лекции по теории графов. М., 2011.

2. *Brandstädt A.*, *Le V. B.*, *Spinrad J.* Graph classes: a survey. SIAM Monographs on Discrete Math. and Applications, 1999. P. 306.

3. *Fleischner H.*, *Mujuni E.*, *Paulusma D.*, *Szeider S.* // Theoretical Computer Science. 2009. Vol. 410. P. 2045–2053.

4. *Amiliastre J.*, *Vilarem M.*, *Janssen P.* // Discrete Applied Mathematics. 1998. Vol. 86. P. 125–144.

5. *Cornaz D.*, *Fonplut J.* // Discrete Mathematics. 2006. Vol. 306. P. 495–507.

6. *Chakrabarti D.*, *Papadimitriou S.*, *Modha D. S.*, *Faloutsos C.* // Proceedings of the 10th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining (KDD'04). [S. l.], 2004. P. 79–88.

7. *Heydari M. H.*, *Morales L.*, *Shields C. O.*, *Sudborough I. H.* // Proceedings of the 40th Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS'07). [S. l.], 2007. P. 270b.

8. *Foldes S.*, *Hammer P.* // Congressus Numerantium. 1977. Vol. 19. P. 311–315.

9. *Тышкевич Р. И., Черняк А. А.* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. Т. 5. С. 14–26.

10. *Orlin, J.* // Indagationes Mathematicae. 1977. Vol. 80. P. 406–424.

11. *Müller H.* // Discrete Mathematics. 1996. Vol. 149. P. 159–187.

12. *Lubiw A.* // SIAM J. on Discrete Mathematics. 1990. Vol. 3. P. 98–115.

13. *Soto J., Telha C.* // Proceedings of the 15th International Conference on Integer programming and combinatoral optimization.). [S. l.], 2011. P. 389–403.

14. *Лепин В. В.* // Тр. Ин-та математики. 2010. Т. 18. С. 60–78.

15. *Лепин В. В.*, *Дугинов О. И.* // Тр. Ин-та математики. Т. 19. С. 69–81.

16. *Fishburn P. C.*, *Hammer P. L.* // Discrete Mathematics. 1996. Vol. 160. P. 127–148.

17. *Weihe K.* // Proceedings of the 1st Conference on Algorithms and Experiments (ALEX-1998). [S. l.], 1998. P. 1–8.

18. *Kratzke T.*, *Reznick B.*, *West D.* // Transactions of the American mathematical society. 1988. Vol. 308. P. 637–653.

19. *Дугинов О. И., Лепин В. В.* // Веб-программирование и Интернет-технологии WebConf2012: материалы 2-й Междунар. науч.-практ. конф., БГУ. Минск, 2012.

O. I. DUGINOV

COVERING A SPLIT GRAPH WITH THE MINIMUM NUMBER OF COMPLETE BIPARTITE SUBGRAPHS

Summary

In this article we consider the computational complexity of two problems related to bicliques (complete bipartite subgraphs) of a graph in the class of split graphs. Given a graph and an integer k, the *biclique cover problem* asks whether the edge set of the graph can be covered with at most k bicliques; the *biclique vertex-cover problem* asks whether the vertex set of the graph can be covered with at most k bicliques. These problems are known to be **NP**-complete even in the class of bipartite graphs. In this article, we show that the both problems remain **NP**-complete in the class of split graphs.