

УДК 517.926.4+517.928.2

М. В. КАРПУК

**О СТАРШЕМ ПОКАЗАТЕЛЕ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА***Институт математики НАН Беларуси**(Поступила в редакцию 19.11.2014)***Введение.** Рассмотрим  $n$ -мерную ( $n \geq 2$ ) линейную систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

матрица коэффициентов  $A(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$  которой кусочно-непрерывна на временной полуоси  $t \geq 0$ . Класс всех таких систем обозначим через  $M_n^*$ . Мы будем отождествлять систему (1) и ее матрицу коэффициентов и, вследствие этого, например, писать  $A \in M_n^*$ . Наряду с системой (1) рассмотрим порожденное ею однопараметрическое семейство

$$dx/dt = \mu A(t)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

линейных дифференциальных систем со скалярным параметром-множителем  $\mu \in \mathbb{R}$ . Класс семейств (2), порождаемых системами  $A \in M_n^*$ , обозначим через  $K_n^*$ . Фиксируя в семействе (2) значение параметра  $\mu$ , получаем линейную дифференциальную систему, которую ниже обозначаем через  $\langle \mu \rangle_A$ . Через  $\lambda_1(\mu A) \leq \dots \leq \lambda_n(\mu A)$  обозначим показатели Ляпунова [1, с. 34; 2, с. 63] системы  $\langle \mu \rangle_A$ .

В. И. Зубов в монографии [3, с. 408; проблема 1] поставил задачу выяснить, как изменяются показатели Ляпунова системы (1) после умножения на постоянную величину  $\mu$  всех ее коэффициентов, т. е. как связаны показатели Ляпунова систем (1) и (2). Подчеркнем, что в [3] в постановке задачи ограниченность матрицы коэффициентов системы (1) не предполагается. Поэтому, вообще говоря, показатель  $\lambda_i(\mu A)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , может принимать несобственные значения:  $-\infty$  или  $+\infty$ ; следовательно, функция  $\lambda_i(\mu A)$  переменной  $\mu \in \mathbb{R}$ , которую назовем  $i$ -м показателем Ляпунова семейства (2), – это функция  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , где  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Другими словами, задача Зубова может быть равносильным образом сформулирована так: для каждого  $i = 1, \dots, n$  дать полное описание множества  $\mathcal{L}_i^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_i(\mu A) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid A \in M_n^*\}$  функций, представляющих собой  $i$ -е показатели Ляпунова семейств из  $K_n^*$ .

В настоящей работе получено решение задачи Зубова для старшего показателя Ляпунова  $\lambda_n(\mu A)$  в предположении, что он не равен тождественно  $+\infty$  ни на одной из числовых полуосей.

Отметим, что аналогичная задача для семейств линейных дифференциальных систем

$$dx/dt = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

матрица  $A(t, \mu): [0; +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$  которых при каждом фиксированном  $\mu \in \mathbb{R}$  ограничена на временной полуоси  $t \geq 0$  и непрерывна по совокупности переменных, решена в [4]: для каждого фиксированного  $i = 1, \dots, n$  функция  $\lambda(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  представляет собой  $i$ -й показатель Ляпунова некоторого семейства (3), рассматриваемый как функция переменной  $\mu \in \mathbb{R}$ , если и только если она является функцией класса  $(*, G_\delta)$ , имеющей полунепрерывную сверху миноранту. В работе [4]

доказано, что это утверждение имеет место в существенно более общей ситуации – для показателей Ляпунова семейств морфизмов расслоений Миллионщикова.

Эта общая теорема о показателях Ляпунова семейств (3) к семействам (2) неприменима, если даже ограничиться случаем ограниченных на временной полуоси матриц коэффициентов систем (1) – в этом случае она дает только необходимое условие принадлежности функции классу  $\mathcal{L}_j^n$ . Тем более она неприменима в ситуации неограниченных коэффициентов систем (1), поскольку в этом случае области значений показателей Ляпунова различны. На первый взгляд представляется правдоподобным, что столь сложная зависимость показателей Ляпунова семейств (3) от параметра, которая представлена в приведенном выше утверждении, является следствием нелинейной зависимости матрицы коэффициентов семейства от параметра и что для семейств (2), зависимость которых от параметра предельно проста, их показатели Ляпунова не должны иметь сложную дескриптивную природу. Тем не менее в настоящей работе показывается, что по меньшей мере для старшего показателя Ляпунова семейств из  $K_n^*$  это не так.

**1. Предварительные результаты.** Чтобы точнее представить содержание работы, докажем вначале две леммы.

**Л е м м а 1.** *Если при некотором  $\mu_0 \neq 0$  система  $\langle \mu_0 \rangle_A$  семейства (2) имеет неположительный старший показатель Ляпунова (возможно, равный  $-\infty$ ), то при любом  $\mu$ , принадлежащем той полуоси, которая не содержит точки  $\mu_0$ , старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$  неотрицателен.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно неравенству Ляпунова [1, с. 37; 2, с. 72], имеем

$$S(\mu_0) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp}(\mu_0 A(\tau)) d\tau \leq \lambda_1(\mu_0 A) + \dots + \lambda_n(\mu_0 A) \leq n\lambda_n(\mu_0 A).$$

Легко видеть, что неравенство  $S(\mu_0) \leq n\lambda_n(\mu_0 A)$  верно и в случае несобственных значений показателей. По предположению леммы  $\lambda_n(\mu_0 A) \leq 0$ , следовательно, и  $S(\mu_0) \leq 0$ . Поэтому для любого  $\mu$  такого, что  $\mu_0 < 0$ , получаем

$$S(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp}(\mu A(\tau)) d\tau = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp}(\mu_0 A(\tau)) d\tau = \frac{\mu}{\mu_0} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp}(\mu_0 A(\tau)) d\tau \geq 0.$$

Поэтому для таких  $\mu$  верно неравенство  $n\lambda_n(\mu A) \geq S(\mu) \geq 0$ , откуда  $\lambda_n(\mu A) \geq 0$ . Лемма 1 доказана.

**Л е м м а 2.** *Если при некотором  $\mu_0 \neq 0$  старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu_0 \rangle_A$  семейства (2) конечен и равен  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то при любом  $\mu \in \mathbb{R}$ , принадлежащем той полуоси, которая не содержит точки  $\mu_0$ , для старшего показателя Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$  верно неравенство  $\lambda_n(\mu A) \geq \lambda\mu / \mu_0$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим матрицу  $\tilde{A}(t) = A(t) - \lambda\mu_0^{-1}E_n$ ,  $t \geq 0$ , где  $E_n$  – единичная матрица размера  $n \times n$ . Фундаментальные матрицы  $X(t)$  системы  $\langle \mu \rangle_A$  и  $Y(t)$  системы  $\langle \mu \rangle_{\tilde{A}}$  связаны формулой  $Y(t) = X(t)\exp(-\lambda\mu / \mu_0)$ . Следовательно, при всех  $\mu \in \mathbb{R}$  справедливо равенство  $\lambda_n(\mu\tilde{A}) = \lambda_n(\mu A) - \lambda\mu / \mu_0$ . Учитывая, что  $\lambda_n(\mu_0 A) = \lambda$ , получаем равенство  $\lambda_n(\mu_0\tilde{A}) = 0$ . Следовательно, к  $\mu_0$  и семейству систем  $\langle \mu \rangle_{\tilde{A}}$  применима лемма 1, из которой вытекает, что при любом  $\mu$ , принадлежащем той полуоси, которая не содержит точки  $\mu_0$ , верно неравенство

$$\lambda_n(\mu A) = \lambda_n(\mu\tilde{A}) + \lambda\mu / \mu_0 \geq \lambda\mu / \mu_0.$$

Лемма 2 доказана.

**2. Бэровская характеристика показателей Ляпунова.** Теорема, доказанная в этом разделе, дает необходимое условие, которому удовлетворяют показатели Ляпунова  $\lambda_n(\mu A)$ ,  $A \in M_n^*$ .

Следуя [5, с. 221], лебеговские множества  $f^{-1}([r, +\infty))$ ,  $f^{-1}((r, +\infty))$  и  $f^{-1}((-\infty, r))$  вещественнозначной функции  $f$ , т. е. прообразы при отображении  $f$  промежутков  $[r, +\infty)$ ,  $(r, +\infty)$  и  $(-\infty, r)$ , будем

обозначать через  $[f \geq r]$ ,  $[f > r]$  и  $[f < r]$  соответственно. Напомним, что вещественнозначная функция  $f$  называется [5, с. 223–224] функцией класса  $(*, G_\delta)$ , если для каждого  $r \in \mathbb{R}$  ее лебеговское множество  $[f \geq r]$  является  $G_\delta$ -множеством. Множество в топологическом пространстве называется  $G_\delta$ -множеством, если оно представимо в виде счетного пересечения открытых в этом пространстве множеств. Функция  $f$  называется [5, с. 223–224] функцией класса  $(G, *)$ , если для каждого  $r \in \mathbb{R}$  ее лебеговское множество  $[f > r]$  является открытым множеством. Считаем также, что в  $\overline{\mathbb{R}}$  задана естественная (порядковая) топология, так что  $\overline{\mathbb{R}}$  гомеоморфно отрезку  $[-1, 1]$ . Введем ограничивающее преобразование  $\ell: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$  стандартным образом:

$$\ell(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|+1} & \text{при } x \in \mathbb{R}, \\ \text{sgn}(x) & \text{при } x = \pm\infty. \end{cases}$$

Поскольку отображение  $\ell$  осуществляет сохраняющий порядок гомеоморфизм между  $\overline{\mathbb{R}}$  и отрезком  $[-1, 1]$ , то будем говорить, что функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  принадлежит бэровскому классу  $K$ , если этому же классу принадлежит и композиция  $\ell \circ f$ .

**Т е о р е м а 1.** *Для любой системы  $A \in M_n^*$  функция  $\lambda_n(\mu A): \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  аргумента  $\mu$  принадлежит классу  $(*, G_\delta)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Отображение  $\ell$  непрерывно, следовательно, оно перестановочно с операциями предельного перехода, а значит, отображение  $\ell \circ \lambda_n$  можно преобразовать следующим образом:

$$\ell \circ \lambda_n(\mu A) = \ell\left(\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|\right) = \ell\left(\lim_{s \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq s} t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|\right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq s} \ell(t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|). \quad (4)$$

По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра функция  $t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|$  аргумента  $\mu$  непрерывна (при любом фиксированном  $t$ ). Следовательно, функция  $\varphi_s(\mu) = \sup_{t \geq s} \ell(t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|)$  – супремум континуального параметризованного числом  $t \geq 0$  семейства непрерывных функций, а значит, согласно [5, с. 237], является функцией класса  $(G, *)$ . Получаем семейство  $\{\varphi_s(\mu)\}_{s \in \mathbb{R}}$  функций аргумента  $\mu$ , параметризованное вещественным параметром  $s \in \mathbb{R}$ , по которому совершается предельный переход в последнем выражении равенства (4). Заметим, что при любом фиксированном значении  $\mu$  последовательность значений этих функций является невозрастающей функцией от  $s$ . Следовательно, формулу (4) можно переписать в виде

$$\ell \circ \lambda_n(\mu A) = \lim_{s \rightarrow +\infty, s \in \mathbb{Q}} \varphi_s(\mu),$$

откуда, согласно [5, с. 227], следует, что отображение  $\ell \circ \lambda_n(\mu A)$  является функцией класса  $(*, G_\delta)$ . Теорема 1 доказана.

**3. Описание показателей на полуоси.** Из утверждений теоремы 1 и леммы 1 следует, что каждая функция из  $\mathcal{L}_n^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , принадлежит классу  $(*, G_\delta)$  и хотя бы на одной из полуосей неотрицательна. Теорема этого пункта устанавливает, что любая функция  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  класса  $(*, G_\delta)$ , неотрицательная на какой-либо полуоси, может быть реализована как сужение на эту полуось некоторого показателя Ляпунова из  $\mathcal{L}_n^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Т е о р е м а 2.** *Для любой функции  $f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  класса  $(*, G_\delta)$ , принимающей только неотрицательные значения на некоторой полуоси, существует такая система  $A \in M_n^*$ , что старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$  как функция вещественного аргумента  $\mu$  совпадает с  $f(\cdot)$  на этой полуоси.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Не ограничивая общности, будем считать, что  $f(\cdot)$  неотрицательна на интервале  $[0, +\infty)$  (случай  $(-\infty; 0]$  аналогичен). Нам потребуются некоторые дополнительные построения, которые мы будем выписывать как отдельные пункты.

**3.1.** Для построения нужного семейства (2) воспользуемся конструкцией работ [6, 7]. Эту конструкцию, поскольку она существенно используется в дальнейших построениях, мы сейчас опишем, дополнив необходимыми нам вычислениями. Зафиксируем какие-либо кусочно-непрерывные  $2 \times 2$ -матрицу  $B(\cdot)$  и функцию  $\omega(\cdot)$  и возьмем матрицу  $A(\cdot)$  системы (1), где  $n = 2$ , в виде:

$$A(t) = U^{-1}(t)B(t)U(t) - U^{-1}(t)dU(t)/dt, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

здесь  $U(t)$  – матрица поворота на угол  $\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$  по ходу часовой стрелки (не нарушая общности, считаем ортонормальную систему координат  $Ox_1x_2$  правой). Сделав в семействе (2) с матрицей  $A(\cdot)$ , задаваемой равенством (5), линейную замену переменных  $y = U(t)x$ , придем, как легко убедиться, к следующему семейству:

$$dy/dt = \mu B(t)y + (1 - \mu)\omega(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y \equiv C_{B,\omega}(t, \mu)y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Так как матрица  $U(t)$  является при каждом  $t \geq 0$  ортогональной, то замена переменных  $y = U(t)x$  не изменяет нормы решений, а значит, показатели Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$  семейства (2) с матрицей (5) и системы  $\langle \mu \rangle_C$  семейства (6) равны. Таким образом, построение нужной двумерной системы (1) сводится к построению соответствующих матрицы  $B(\cdot)$  и функции  $\omega(\cdot)$ , что значительно проще.

Матрицу  $C_{B,\omega}(\cdot; \mu)$  семейства (6) (т. е. матрицу  $B(\cdot)$  и функцию  $\omega(\cdot)$ ) будем строить на временной полуоси  $t \geq 0$  как кусочно-постоянную, составленную из специально подобранных матриц определяемого ниже трехпараметрического семейства матриц.

Рассмотрим следующее трехпараметрическое семейство  $2 \times 2$ -матриц:

$$D(\mu; p) = \begin{pmatrix} \mu a & \mu(b - c) + c \\ -\mu(b - c) - c & -\mu a \end{pmatrix}, \quad (7)$$

зависящее от трех вещественных параметров  $a, b, c$  (составленный из них вектор  $(a, b, c)^T$  обозначим через  $p$ ) и переменной  $\mu \in \mathbb{R}$ . Характеристический многочлен  $P(\cdot; \mu, p)$  матрицы  $D(\mu; p)$ , как легко убедиться, равен  $P(v; \mu, p) = v^2 + ((b - c)^2 - a^2)\mu^2 + 2c(b - c)\mu + c^2$ . Поэтому его корни  $v_{1,2}$  отличаются только знаком и оба в зависимости от  $\mu \in \mathbb{R}$  либо чисто мнимые, либо вещественные. Очевидно, что корни  $v_{1,2}$  будут вещественными, если и только если

$$R(\mu; p) \stackrel{\text{def}}{=} (a^2 - (b - c)^2)\mu^2 - 2c(b - c)\mu - c^2 \geq 0. \quad (8)$$

Для тех  $\mu$  и  $p$ , при которых выполнено неравенство (8), через  $v_2(\mu; p)$  обозначим не меньший корень характеристического многочлена  $P(\cdot; \mu, p)$ , т. е.  $v_2(\mu; p) = R^{1/2}(\mu; p)$ .

Каковы бы ни были вещественные числа  $r$  и  $s$  ( $r < s$ ) одного знака (в частности, ненулевые), в качестве параметров  $a, b$  и  $c$ , при которых множество вещественных решений  $\mu$  неравенства (8) совпадает с отрезком  $[r, s]$ , можно взять следующий набор параметров:

$$a = \eta(s - r), \quad b = \eta(2rs - s - r), \quad c = 2\eta rs, \quad (9)$$

где  $\eta \in \mathbb{R}$  – любая ненулевая постоянная (в этом легко убедиться непосредственно, подставляя (9) в (8), раскладывая левую часть на множители и учитывая, что  $-4\eta^2 rs < 0$ ). Ниже всегда при выборе тех параметров  $a, b, c$ , при которых множество  $\mu \in \mathbb{R}$  решений неравенства (8) – отрезок  $[r, s]$ , считаем, что эти параметры задаются равенствами (9), выбор постоянной  $\eta$  в которых опишем ниже. Вектор  $p = (a, b, c)^T$ , в котором параметры  $a, b, c$  заданы равенствами (9), обозначим через  $p(r, s; \eta)$ .

Нам понадобятся дополнительные, отличные от [7] оценки корня многочлена  $P(\cdot; \mu, p)$ . Не меньший его действительный корень  $v_2$  равен

$$v_2(\mu; p) = \eta \sqrt{-4rs\mu^2 + 4(r+s)rs\mu - 4r^2s^2}.$$

Максимум этой функции (переменной  $\mu$ ) достигается в середине интервала  $(r, s)$  – точке  $(r+s)/2$  – и равен  $\eta(s-r)\sqrt{rs}$ .

Пусть теперь заданы положительные числа  $q$  и  $\varepsilon$ . Выберем  $\eta$  таким, чтобы  $q + \varepsilon = \eta(s-r)\sqrt{rs}$ , и найдем значение  $\delta > 0$ , при котором  $v_2(\cdot; p)$ , где  $p = p(r, s; \eta)$ , принимает значения из промежутка  $[q, q + \varepsilon]$  в точности на отрезке  $[2^{-1}(r+s) - \delta, 2^{-1}(r+s) + \delta]$ . После несложных преобразований получаем

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon(2(s-r)\sqrt{rs} - \varepsilon/\eta)}{4rs\eta}} = \frac{(s-r)}{2} \frac{\sqrt{\varepsilon(2q + \varepsilon)}}{q + \varepsilon}.$$

Обозначим множитель  $\sqrt{\varepsilon(2q + \varepsilon)} / (q + \varepsilon)$  через  $\alpha(q, \varepsilon)$ . Легко видеть, что  $0 \leq \alpha(q, \varepsilon) \leq 1$ .

**3.2.** Воспользуемся полученным в работе [4] специальным представлением множеств Лебега функций. Функция  $f$ , как и любая вещественнозначная функция, однозначно определяется [5, с. 221] своими лебеговскими множествами  $[f \geq q_w]$ , где  $(q_w)_{w \in \mathbb{N}}$  – множество рациональных чисел, занумерованных каким-либо фиксированным образом. Так как  $f$  – функция класса  $(*, G_\delta)$ , то ее лебеговское множество  $[f \geq q]$  для любого  $q \in \mathbb{R}$  является  $G_\delta$ -множеством, а значит, представимо в виде счетного пересечения открытых множеств. Пусть для  $q = q_w$  это представление имеет вид

$$[f \geq q_w] = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\Gamma}_w^i, \text{ где } \tilde{\Gamma}_w^1 \supset \tilde{\Gamma}_w^2 \supset \dots \supset \tilde{\Gamma}_w^i \supset \dots \quad (10)$$

(цепочку включений в (10) считаем выполненной без нарушения общности).

Представления (10) ввиду большого произвола в выборе открытых множеств  $\tilde{\Gamma}_w^i$  неудобны для дальнейшего. Поэтому от этого представления, несколько изменив множества  $\tilde{\Gamma}_w^i$ , перейдем к новому представлению, обладающему важным дополнительным свойством, которое описывает формулируемая ниже лемма 3 из работы [4].

Для каждого  $w \in \mathbb{N}$  через  $\Theta(w)$  обозначим конечное множество, состоящее из тех натуральных чисел  $j < w$ , для которых  $q_j < q_w$ , и определим множество

$$\Gamma_w^i = \left( \bigcap_{m \in \Theta(w)} \tilde{\Gamma}_m^{i+w} \right) \cap \tilde{\Gamma}_w^i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad w \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Определенные равенством (11) множества  $\Gamma_w^i$ , очевидно, открыты и, как показывает следующая лемма, обладают как свойством, аналогичным (10), так и еще одним важным дополнительным свойством.

**Л е м м а 3** [4]. *При всех  $w \in \mathbb{N}$  верно представление*

$$[f \geq q_w] = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_w^i, \text{ где } \Gamma_w^1 \supset \Gamma_w^2 \supset \dots \supset \Gamma_w^i \supset \dots$$

*Кроме того, каждая точка  $b \in B$ , не принадлежащая множеству  $[f \geq q_w]$ , принадлежит не более чем конечному количеству множеств  $\Gamma_w^i$ , где  $i \in \mathbb{N}$  и  $j \in \mathbb{N}$ , такое, что  $q_j \geq q_w$ .*

Поскольку нам важны значения на положительной полуоси, то пересечем все множества в равенстве леммы 3 с открытым множеством  $(0, +\infty)$ , при этом получим равенство

$$[f \geq q_w] \cap (0, +\infty) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\Gamma_w^i \cap (0, +\infty)), \text{ где } \Gamma_w^1 \supset \Gamma_w^2 \supset \dots \supset \Gamma_w^i \supset \dots \quad (12)$$

Обозначим для удобства множества  $G_w^i = \Gamma_w^i \cap (0, +\infty)$ .

Построим теперь представление самих открытых множеств  $G_w^i$  в виде, которым будем пользоваться в дальнейшем. Каждое открытое множество  $G_w^i$  вещественной оси является объединением непересекающихся интервалов  $G_w^i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_w^i(k)$ .

Определим функцию  $\varepsilon(w, i)$  равенством  $\varepsilon(w, i) = (w^2 + i^2)^{-2}$  (на самом деле нам достаточно, чтобы она стремилась к нулю при стремлении  $w$  и  $i$  к  $+\infty$ ).

По заданному значению  $\varepsilon(w, i)$  интервал  $I_w^i(k)$  представим в виде объединения специально подобранных конечных интервалов  $I_w^i(k) = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \Delta_w^i(k, l)$ , причем случаи конечных и бесконечных интервалов  $I_w^i(k)$  рассмотрим отдельно, для краткости обозначив  $\alpha(q_w, \varepsilon(w, i)) = \alpha$ .

*Случай 1.* Интервал  $I_w^i(k)$  конечен и равен  $(r, s)$ . Тогда пусть  $\Delta_w^i(k, 0) = (r, s)$ . При  $l \in \mathbb{N}$  будем строить интервалы последовательно так, что левый конец интервала  $\Delta_w^i(k, l)$  совпадает с точкой  $r$ , а длина  $|\Delta_w^i(k, l)|$  равна  $|\Delta_w^i(k, l-1)| \cdot (1-\alpha) / (1+\alpha)$ . При  $-l \in \mathbb{N}$  будем строить интервалы последовательно так, что правый конец интервала  $\Delta_w^i(k, l)$  совпадает с точкой  $s$ , а длина  $|\Delta_w^i(k, l)|$  равна  $|\Delta_w^i(k, l+1)| \cdot (1-\alpha) / (1+\alpha)$ .

*Случай 2.* Интервал  $I_w^i(k)$  бесконечен и равен  $(r, +\infty)$ . Тогда пусть  $\Delta_w^i(k, 0) = (r, r+1)$ . При  $l \in \mathbb{N}$ , как и в случае 1, будем строить интервалы последовательно так, чтобы левый конец  $\Delta_w^i(k, l)$  совпадал с  $r$ , а длина  $|\Delta_w^i(k, l)|$  равнялась  $|\Delta_w^i(k, l-1)| \cdot (1-\alpha) / (1+\alpha)$ . При  $-l \in \mathbb{N}$  положим  $\Delta_w^i(k, l) = (r-l\alpha, r+1-l\alpha)$ .

Присоединяя к интервалу  $\Delta_w^i(k, l)$  его концы, получаем отрезок, который будем обозначать  $\overline{\Delta_w^i(k, l)}$ .

Зафиксируем какую-нибудь биекцию  $o: \mathbb{N} \rightarrow U$ , где множество  $U \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  — множество всевозможных четверок  $(w, i, k, l)$  индексов, при которых определены интервалы  $\Delta_w^i(k, l)$ . Каждое натуральное число  $m$  однозначно задает четверку индексов  $(w, i, k, l) = o(m)$ , для упрощения записи будем писать  $q(m)$ ,  $\varepsilon(m)$ ,  $\Delta(m)$  вместо  $q_w$ ,  $\varepsilon(w, i)$ ,  $\Delta_w^i(k, l)$ . По заданным  $q(m)$ ,  $\varepsilon(m)$  и отрезку  $[r, s] = \overline{\Delta(m)}$ , согласно п. 3.1, однозначно определяется значение  $\eta$ , которое задает вектор  $p(m) = p(r, s; \eta)$ . Пусть  $v_2(\mu; m)$  обозначает функцию аргумента  $\mu$ , равную  $v_2(\mu; p(m))$  на отрезке  $\overline{\Delta(m)}$ , которую доопределим как тождественно нулевую на  $\mathbb{R} \setminus \overline{\Delta(m)}$ , причем коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  вектора  $p(m)$  в этом случае тоже для удобства будем обозначать  $a(m)$ ,  $b(m)$ ,  $c(m)$ .

Основное для нас свойство построенных интервалов  $\Delta_w^i(k, l)$  состоит в том, что при фиксированных  $w, i, k$  каждая точка множества  $I_w^i(k)$  принадлежит конечному числу из них, и, кроме того, при подстановке в функции  $v_2(\cdot, p)$ , соответствующие интервалам  $\Delta_w^i(k, l)$  при всевозможных целых  $l$ , принимает значения из отрезка  $[q_w, q_w + \varepsilon(w, i)]$  не более двух раз.

**3.3. Построение требуемой системы.** Построим вначале двумерную систему  $A \in M_2^*$ , такую, что старший коэффициент Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$ , как функция вещественного аргумента  $\mu$ , совпадает с  $f(\cdot)$  при всех  $\mu \in [0, +\infty)$ . Чтобы не загромождать построения, эту систему строим вначале кусочно-непрерывной, затем подправим ее до бесконечно дифференцируемой системы с тем же старшим показателем. Построение системы  $A$ , согласно разд. 1 работы, сводим к построению соответствующих  $2 \times 2$ -матрицы  $B(\cdot)$  и функции  $\omega(\cdot)$  семейства (5), т. е. матрицы  $C_{B, \omega}(\cdot, \mu)$ . Построение пары  $(B(\cdot), \omega(\cdot))$  будем вести индукцией по шагам. На  $k$ -м шаге ( $k \in \mathbb{N}$ ) эта пара будет строиться на некотором полуинтервале  $(T_k, T_{k+1}]$ , и на следующих шагах их значения на этом полуинтервале уже изменяться не будут. Сама последовательность  $(T_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  будет выбрана в следующем пункте, пока же предполагаем только, что  $(T_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \nearrow +\infty$ . Чтобы иметь базу индукции, сделаем нулевой шаг, на котором положим  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = 1$ , а  $B(t) \equiv O_2$  и  $\omega(t) \equiv 0$  при  $t \in [0, 1]$ . Пусть сделано  $k-1$  шагов, т. е. матрица  $B(t)$  и функция  $\omega(t)$  определены при всех  $t \in [0, T_k]$ . Сделаем  $k$ -й шаг.

Введем обозначение  $T_k' = (T_k + T_{k+1}) / 2$  для всех  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Пару  $(B(\cdot), \omega(\cdot))$  зададим на полуинтервале  $(T_k, T_{k+1}]$  равенствами:

$$B(t) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ -b(k) & -a(k) \end{pmatrix} \text{ при } t < T_k' \text{ и } B(t) = \begin{pmatrix} -a(k) & -b(k) \\ b(k) & a(k) \end{pmatrix} \text{ при } t \geq T_k',$$

$$\omega(t) = c(k) \text{ при } t < T_k' \text{ и } \omega(t) = -c(k) \text{ при } t \geq T_k'. \quad (13)$$

Эти построения задают матрицу  $B(\cdot)$  и функцию  $\omega(\cdot)$  при всех  $t \geq 0$ . Матрицу  $C_{B, \omega}(t, \mu)$  семейства (6) с построенными матрицей  $B(t)$  и функцией  $\omega(t)$  обозначим через  $C(t, \mu)$ , через  $\langle \mu \rangle_C$  – систему  $\langle \mu \rangle$  этого семейства, а через  $X_\mu(\cdot, \cdot)$  – матрицу Коши системы  $\langle \mu \rangle_C$ . Согласно равенствам (6), (7) и (13), матрица  $C(\cdot, \cdot)$  кусочно-постоянна на временной полуоси и при всех  $k \in \mathbb{N}$  справедливы равенства

$$C(t, \mu) = D(\mu; p(k)), \text{ если } t \in [T_k, T_k'),$$

$$C(t, \mu) = -D(\mu; p(k)), \text{ если } t \in [T_k', T_{k+1}). \quad (14)$$

До конца доказательства  $A(\cdot)$  обозначает матрицу, связанную с построенными матрицей  $B(\cdot)$  и функцией  $\omega(\cdot)$  равенством (5).

**3.4. Вычисление старшего показателя.** Покажем, что можно так задать последовательность  $(T_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ , чтобы старший показатель Ляпунова построенного семейства совпадал с функцией  $f(\cdot)$  на всей положительной полуоси.

Докажем, что для всех  $\mu \in (0, +\infty)$  справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu, k) = f(\mu). \quad (15)$$

Выберем возрастающую последовательность рациональных чисел  $(q_{w_i})_{i \in \mathbb{N}} \nearrow f(\mu)$ . Тогда, по определению функций  $v_2$ , найдется последовательность натуральных чисел  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , для которой  $v_2(\mu, m_i) \in [q_{w_i}, q_{w_i} + \varepsilon(w_i)]$  хотя бы один раз при каждом  $i \in \mathbb{N}$ . Это означает, что справедливо неравенство  $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu, k) \geq f(\mu)$ .

Для завершения доказательства осталось показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует не более, чем конечное количество индексов  $m$  таких, что

$$v_2(\mu, m) \geq f(\mu) + \varepsilon. \quad (16)$$

Оценим сверху количество таких  $m$ . Выберем номер  $w \in \mathbb{N}$ , для которого выполнено двойное неравенство  $f(\mu) \leq q_w < f(\mu) + \varepsilon$ . Тогда  $\mu \notin [f \geq q_w]$ , а значит, по лемме 3 точка  $\mu$  может принадлежать лишь конечному количеству множеств  $G_i^m$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , а  $q_i > q_w$ . Но каждая точка множества  $G_i^m$  принадлежит не более, чем конечному количеству интервалов  $\Delta_i^m(k, l)$  по построению этих интервалов. Следовательно, при всех  $i \in \mathbb{N}$ , при которых  $q_i > q_w$  неравенство (16) выполняется не более, чем конечное количество раз.

Остались еще номера  $i \in \mathbb{N}$ , для которых  $q_i \leq q_w$ . Начиная с некоторого номера  $J$ , все члены последовательности  $(\varepsilon(j))_{j \in \mathbb{N}}$  будут меньше, чем положительное число  $f(\mu) + \varepsilon - q_w$ , а значит, и максимум функции  $v_2(\mu; m)$  будет не больше, чем  $q_w$  при всех  $m \in \mathbb{N}$ , таких, что  $o(m) = (i, \dots)$ ,  $m \geq J$ ,  $q_i \leq q_w$ . И в этом случае получили, что неравенство (16) выполняется не более, чем конечное количество раз. Равенство (15) доказано.

По построению системы показатель  $\lambda_2(\mu A)$  будет вычисляться как верхний предел величин  $v_2(\mu; k)(t - T_k) / t$ , где  $t \in [T_k, T_k']$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Понятно, что максимум этих величин достигается в середине отрезков  $[T_k, T_{k+1}]$ , откуда получается формула  $\lambda_2(\mu A) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu; k) T_k' / (T_k + T_k')$ . Потребуем теперь, чтобы  $T_k' / T_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow +\infty$ , тогда  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k' / (T_k + T_k') = 1$ , и, следовательно, верно равенство

$$f(\mu) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu; k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu; k) T_k' / (T_k + T_k') = \lambda_2(\mu A). \quad (17)$$

**3.5. Построение бесконечно дифференцируемой системы.** Для завершения доказательства подправим систему, построенную в п. 3.1–3.4, до бесконечно дифференцируемой с тем же показателем  $\lambda_2(\mu A)$ . Для этого подправим кусочно-постоянные функции  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  до бесконечно дифференцируемых так, чтобы при всех вещественных  $\mu$  старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_C$  не изменился.

Докажем вначале одно вспомогательное утверждение. Пусть имеется некоторая система  $C \in M_n^*$ . Покажем, что если существует такая  $n \times n$ -матрица  $Q(t)$ ,  $t \geq 0$ , что  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|C(\tau)\| = h(t)$ ,

$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|C(\tau) + Q(\tau)\| = h(t)$  и сходится несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} \|Q(\tau)\| \exp\left(2 \int_0^\tau h(s) ds\right) d\tau$  (обозначим его  $L$ ), то для любых фундаментальных матриц  $Y(\cdot)$  системы  $\langle \mu \rangle_C$  и  $Z(\cdot)$  системы

$$\dot{z} = (C(t) + Q(t))z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \quad (18)$$

найдутся положительные постоянные  $c_0$  и  $c_1$ , для которых  $c_0 \|Y(t)\| \leq \|Z(t)\| \leq c_1 \|Y(t)\|$  при всех  $t \geq 0$ .

Действительно, так как  $Z(t) = Y(t)(Y^{-1}(0)Z(0) + \int_0^t Y^{-1}(\tau)Q(\tau)Z(\tau)d\tau)$ ,  $t \geq 0$ , а  $\|Y^{-1}(t)\| \leq c \exp(h(t))$

и  $\|Z(t)\| \leq c \exp(h(t))$  при всех  $t \geq 0$ , где  $c$  – некоторая постоянная, то  $\|Z(t)\| \leq \|Y(t)\| (\|Y^{-1}(0)Z(0)\| + c^2 L)$ , что и доказывает правое из нужных неравенств. Поменяв в этих рассуждениях системы  $\langle \mu \rangle_C$  и (18) местами, получим левое неравенство. Следовательно, у систем  $C$  и  $C + Q$  совпадают старшие показатели Ляпунова.

Пусть  $\langle \mu \rangle_C$  – система, построенная в п. 3.1–3.4 доказательства. По построению матрица  $C(t, \mu)$  системы является кусочно-постоянной, значит, она ограничена на каждом числовом промежутке  $[0, t]$  и корректно определена функция  $h(t, \mu) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|C(\tau, \mu)\|$ . При фиксированном  $t > 0$  множество коэффициентов  $a, b, c$  матрицы  $C(\tau, \mu)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , – конечный набор троек, для которых обозначим  $g(t) = \max(|a|, |b - c|, |c|)$ , где максимум берется по всем этим тройкам. По определению  $h(t, \mu)$  получаем неравенство  $h(t, \mu) \leq g(t)(|\mu| + 1)$ .

Рассмотрим последовательность точек  $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$  такую, что  $\tau_{2k-1} = T_k$ ,  $\tau_{2k} = T_k'$  при всех натуральных  $k$  (подчеркнем, что эта последовательность не зависит от  $\mu$ ). Тогда матрица  $B(\cdot)$  и функция  $\omega(\cdot)$  могут иметь точки разрыва только среди  $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , следовательно, и множество точек разрыва матрицы  $C(t, \mu)$  содержится среди  $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Для каждой точки  $\tau_k$  возьмем на временной полуоси отрезок  $d_k = [\tau_k, \tau_k']$  с началом в этой точке и длины  $\|d_k\| = \tau_k' - \tau_k = k^{-2} g(\tau_{k+1})^{-1} \exp(-k \tau_k g(\tau_{k+1}))$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (если найдутся пересекающиеся отрезки или отрезки длиннее 1, то их длину просто уменьшим произвольным образом так, чтобы новые отрезки не пересекались). Для кусочно-постоянной функции  $a(t)$  определим измененную функцию стандартным образом:

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} a(t), & \text{если } t \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} d_k, \\ \psi((t - \tau_k) / \|d_k\|) a(\tau_k) + \psi((\tau_k' - t) / \|d_k\|) a(\tau_k'), & \text{если } t \in d_k, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (19)$$

где  $k \in \mathbb{N}$ , а  $\psi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  – какая-либо бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям  $\psi(0) = 1$ ,  $\psi(1) = 0$  и  $\psi^{(m)}(0) = \psi^{(m)}(1) = 0$  при всех  $m \in \mathbb{N}$ . Очевидно, что у функции  $\tilde{a}(\cdot)$  существуют все частные производные любого порядка. Определим аналогичным образом функции  $\tilde{b}(t)$  и  $\tilde{c}(t)$ .

Заменим теперь в системе  $\langle \mu \rangle_A$  коэффициенты  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  коэффициентами  $\tilde{a}(t)$ ,  $\tilde{b}(t)$ ,  $\tilde{c}(t)$  и полученную систему обозначим через  $\langle \mu \rangle_{\tilde{A}}$ . Покажем, что утверждение, сформулированное в начале этого пункта, можно применить к соответствующим системам  $C(t, \mu)$  и  $\tilde{C}(t, \mu)$ . Заметим, что



при всех  $\mu \in \mathbb{R}$  по определению  $\tilde{C}(t, \mu)$  верно равенство  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|C(\tau, \mu)\| = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\tilde{C}(\tau, \mu)\| = h(t, \mu)$ . Остается доказать сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \|Q(\tau, \mu)\| \exp\left(2 \int_0^\tau a(s, \mu) ds\right) d\tau$ , где  $Q(\tau, \mu) = \tilde{C}(\tau, \mu) - C(\tau, \mu)$ . Из определения функций  $\tilde{a}(t)$ ,  $\tilde{b}(t)$ ,  $\tilde{c}(t)$  и линейности коэффициентов матрицы  $Q(\tau, \mu)$  по  $\mu$  следует неравенство  $\|Q(\tau, \mu)\| \leq 2h(\tau, \mu) \leq 2g(\tau)(|\mu| + 1)$ .

Теперь сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \|Q(\tau, \mu)\| \exp\left(2 \int_0^\tau h(s, \mu) ds\right) d\tau$  следует из сходимости ряда

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_k'} g(\tau_k') (|\mu| + 1) \exp\left(2 \int_0^\tau h(s, \mu) ds\right) d\tau. \quad (20)$$

Оценим каждое слагаемое сверху:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k'} \exp\left(2 \int_0^\tau h(s, \mu) ds\right) d\tau \leq k^{-2} g(\tau_{k+1})^{-1} \exp(2(\tau_k' g(\tau_k') (|\mu| + 1) - \tau_k g(\tau_{k+1}) k)),$$

учитывая, что из определения  $\tau_k'$  вытекает неравенство  $g(\tau_k') \leq g(\tau_{k+1})$ , получаем, что при всех  $k$ , начиная с некоторого номера, выполняется неравенство  $\tau_k' g(\tau_k') (|\mu| + 1) - \tau_k g(\tau_{k+1}) k \leq \tau_k' (|\mu| + 1) - \tau_k k < 0$ , т. е., начиная с некоторого номера, ряд (20) будет мажорироваться сходящимся рядом  $2(|\mu| + 1) \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2}$ . Следовательно, утверждение из начала пункта применимо к системам  $C(t, \mu)$  и  $\tilde{C}(t, \mu)$ , т. е. мы построили бесконечно дифференцируемую систему с той же зависимостью старшего показателя от параметра-множителя. Для построения  $n$ -мерной системы ( $n \geq 3$ ), удовлетворяющей условиям теоремы 2, достаточно дополнить построенную  $2 \times 2$ -матрицу  $A(\cdot)$  нулями. Теорема 2 доказана.

Отметим, что из конструкции следует, что старший показатель Ляпунова построенной системы на полуоси  $(-\infty, 0]$  всегда равен нулю.

**4. Описание показателя.** Теоремы этого раздела дают полное описание старшего показателя Ляпунова системы (2) как функции параметра-множителя при дополнительном предположении о конечности этого показателя в точке на полуоси.

**Теорема 3.** Для любой системы  $A \in M_n^*$  функция  $\lambda_n(\mu A) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  аргумента  $\mu$  принадлежит классу  $(*, G_\delta)$ , обращается в нуль в нуль, принимает на одной из числовых полуосей только неотрицательные значения. Кроме того, если среди этих неотрицательных значений есть хотя бы одно конечное, то найдется такое вещественное число  $b \in \mathbb{R}$ , что при всех  $\mu \in \mathbb{R}$  верно неравенство  $\lambda_n(\mu A) \geq b\mu$ .

**Доказательство.** Утверждение о принадлежности старшего показателя классу  $(*, G_\delta)$  установлено в теореме 1. Утверждение о том, что  $\lambda_n(0 \cdot A) = 0$  очевидно, так как в этом случае матрица  $\langle \mu \rangle_A$  тождественно равна нулевой. Неотрицательность старшего показателя на одной из числовых полуосей (обозначим ее  $L$ ) доказана в лемме 1. Из предположения теоремы следует, что существует вещественное число  $b = \inf_{\mu \in L} \lambda_n(\mu A) / |\mu|$ . Если  $L = (-\infty, 0]$ , то возьмем число  $b$  с противоположным знаком. Теперь последнее утверждение теоремы следует из леммы 2 и выбора числа  $b$ . Теорема 3 доказана.

Утверждение теоремы 3 обратимо, как показывает следующая

**Теорема 4.** Для любой функции  $f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  класса  $(*, G_\delta)$ , обращающейся в нуль в нуль, принимающей только неотрицательные значения на некоторой полуоси и при всех  $\mu \in \mathbb{R}$  удовлетворяющей неравенству  $f(\mu) \geq b\mu$  для некоторого числа  $b \in \mathbb{R}$ , существует такая система  $A \in M_n^*$ , что старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$ , как функция вещественного аргумента  $\mu$  совпадает с  $f(\cdot)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\tilde{f}(\mu) = f(\mu) - b\mu$ , так как вычитание непрерывной функции  $b\mu$  сохранит принадлежность классу  $(*, G_\delta)$ , то из неравенства  $f(\mu) \geq b\mu$  следует, что к функции  $\tilde{f}(\cdot)$  применима конструкция теоремы 2. Применим к  $\tilde{f}(\cdot)$  конструкцию теоремы 2, несколько изменив ее. А именно, в равенстве (12) будем пересекать множества не с открытым интервалом  $(0, +\infty)$ , а с открытым множеством  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (в п. 3.2 существенно лишь то, что концы отрезков  $[r, s]$  одного знака, а случай 2 этого пункта для интервалов вида  $(-\infty, r)$  рассматривается аналогично). Таким образом, найдется система  $\tilde{A} \in M_n^*$ , что старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_{\tilde{A}}$ , как функция вещественного аргумента  $\mu$  совпадает с  $\tilde{f}(\cdot)$ . Осталось заметить, что из доказательства леммы 2 следует, что, если обозначить  $A = \tilde{A} + bE_n$ , старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$ , как функция вещественного аргумента  $\mu$  совпадает с  $f(\cdot)$ .

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. А. Барабанову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

## Литература

1. Ляпунов А. М. Собр. соч: в 6 т. М.; Л., 1956. Т. 2.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
3. Зубов В. И. Колебания и волны. Л., 1989.
4. Карпук М. В. // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1332–1338.
5. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937.
6. Барабанов Е. А. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1067–1084.
7. Барабанов Е. А. // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 611–625.

*M. V. KARPUK*

### LARGEST LYAPUNOV EXPONENT OF THE LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEM WITH A PARAMETER-MULTIPLIER AS A FUNCTION OF PARAMETER

#### Summary

The largest Lyapunov exponents of linear differential systems  $dx/dt = \mu A(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , with a real parameter-multiplier as a function of the parameter are considered. It is proved that the largest Lyapunov exponent is a function of a Baire class  $(*, G_\delta)$ , which vanishes at zero and satisfies one of the two cases: 1) it exceeds the linear function; 2) it is equal to the plus infinity on some real semi-axis. In the first case, the sufficiency of the given necessary conditions is proved.