

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 4 2015  
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.8

Ю. Н. СОТСКОВ<sup>1</sup>, Н. Г. ЕГОРОВА<sup>1</sup>, Ф. ВЕРНЕР<sup>2</sup>

**МНОГОГРАННИК ОПТИМАЛЬНОСТИ РАСПИСАНИЯ,  
МИНИМИЗИРУЮЩЕГО СУММУ ВЗВЕШЕННЫХ МОМЕНТОВ ЗАВЕРШЕНИЯ  
ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ**

<sup>1</sup>Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: [sotskov@newman.bas-net.by](mailto:sotskov@newman.bas-net.by), [egorovanatalja@bk.ru](mailto:egorovanatalja@bk.ru)

<sup>2</sup>Университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия,  
e-mail: [frank.werner@mathematik.uni-magdeburg.de](mailto:frank.werner@mathematik.uni-magdeburg.de)

В качестве меры устойчивости оптимальной перестановки  $\pi$  обслуживания в одностадийной обслуживающей системе множества требований к изменениям длительностей обслуживания требований предлагается использовать размерность и относительный объем многогранника оптимальности перестановки  $\pi$ . Для случайно сгенерированных задач проведено экспериментальное сравнение размерностей и относительных объемов многогранников оптимальности расписаний обслуживания требований и относительных погрешностей целевых функций с оптимальными значениями целевых функций, вычисленными для фактических длительностей обслуживания требований.

*Ключевые слова:* планирование, одностадийное обслуживание требований, взвешенные моменты завершения обслуживания требований, устойчивость, неопределенность, интервальные длительности обслуживания требований.

*Yu. N. SOTSKOV<sup>1</sup>, N. G. EGOROVA<sup>1</sup>, F. WERNER<sup>2</sup>*

**OPTIMALITY BOX OF THE SCHEDULE MINIMIZING THE SUM  
OF THE WEIGHTED COMPLETION TIMES OF THE JOB**

<sup>1</sup>United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: [sotskov@newman.bas-net.by](mailto:sotskov@newman.bas-net.by), [egorovanatalja@bk.ru](mailto:egorovanatalja@bk.ru)

<sup>2</sup>Otto-von-Guericke-University, Magdeburg, Germany,  
e-mail: [frank.werner@mathematik.uni-magdeburg.de](mailto:frank.werner@mathematik.uni-magdeburg.de)

It is proposed to use an optimality box of the job permutation  $\pi$  as a measure of the stability of an optimal permutation  $\pi$  for processing a set of jobs in the single-stage processing system respecting to variations of the processing times of the jobs. For randomly generated problems, experimental comparison is made of the relative dimensions and the volumes of the optimality box for permutation and relative errors of the objective function with the optimal value of the objective function calculated for the actual processing jobs.

*Keywords:* scheduling, single machine problems, total weighted completion times, stability, uncertainty, interval processing times.

**Введение.** Множество требований  $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ ,  $n \geq 2$ , необходимо обслужить одним прибором. Каждому требованию  $J_i \in J$  приписан вес  $w_i > 0$ , характеризующий важность более раннего завершения обслуживания требования  $J_i$ . Все требования множества  $J$  доступны для обслуживания в момент времени  $t = 0$ . Фактическая длительность  $p_i$  обслуживания требования  $J_i \in J$  может равняться любому вещественному числу, заключенному между фиксированными нижней и верхней границами:  $p_i^U \geq p_i^L > 0$ . Требование  $J_i \in J$  должно быть обслужено прибором без прерываний в течение времени  $p_i \in [p_i^L, p_i^U]$ . Законы распределения вероятностей случайных длительностей  $p_i$ ,  $J_i \in J$ , не известны к моменту построения расписания. При реализации расписания длительность  $p_i$  обслуживания требования  $J_i$  остается неопределенной до момента завершения обслуживания требования  $J_i$ , если  $p_i^L < p_i^U$ .

Для задач теории расписаний используется трехпозиционное обозначение  $\alpha|\beta|\gamma$ , где  $\alpha$  определяет обслуживаемую систему,  $\beta$  – свойства обслуживаемой системы, а  $\gamma$  – критерий оптимальности [1]. Обозначение  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  вводится для *неопределенной* задачи поиска оптимального расписания обслуживания одним прибором множества требований  $J$ , при котором взвешенная сумма  $\sum_{i=1}^n w_i C_i$  моментов  $C_i$  завершения обслуживания требований  $J_i \in J$  принимает наименьшее значение. Если границы  $p_i^L$  и  $p_i^U \geq p_i^L$  длительностей обслуживания каждого требования совпадают,  $p_i^L = p_i^U$ , то неопределенная задача  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  превращается в *детерминированную* задачу  $1|\sum w_i C_i$ , которая решается за полиномиальное время [2].

Множество допустимых векторов длительностей обслуживания требований  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  обозначим  $T = \{p \mid p \in R_+^n, p_i^L \leq p_i \leq p_i^U, i \in \{1, \dots, n\}\} = \times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$ , где  $R_+^n$  – векторное пространство неотрицательных действительных векторов размерности  $n$ , а  $\times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$  – декартово произведение заданных интервалов возможных длительностей обслуживания требований. Фиксированный вектор  $p \in T$  длительностей обслуживания требований будем называть *сценарием*. Детерминированную задачу  $1|\sum w_i C_i$  со сценарием  $p \in T$  будем обозначать  $1|p|\sum w_i C_i$ . Для задачи с неопределенными длительностями обслуживания требований  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\gamma$ , как правило, не существует перестановки обслуживания требований множества  $J$ , которая оставалась бы оптимальной при всех сценариях из множества  $T$ . Для описания предлагаемого подхода к оценке качества эвристического решения неопределенной задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  требуются определения и результаты, представленные в п. 1.

**1. Метод, основанный на устойчивости оптимального расписания.** Пусть  $S = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$  – множество всех перестановок  $\pi_k \in S$ , определяющих порядок обслуживания требований из множества  $J$ :  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})$ , где  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ . Множество перестановок  $S$  имеет мощность  $|S| = n!$ .

В работе [2] было установлено, что для решения детерминированной задачи  $1|\sum w_i C_i$  требуется выполнить  $O(n \log n)$  элементарных операций, если использовать следующее необходимое и достаточное условие оптимальности перестановки  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S$ :  $\frac{w_{k_1}}{p_{k_1}} \geq \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}} \geq \dots \geq \frac{w_{k_n}}{p_{k_n}}$ .

Под *решением* неопределенной задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  будем подразумевать минимальное (по включению) множество перестановок  $S(T) \subseteq S$  согласно следующему определению [3].

**Определение 1.** Множество перестановок  $S(T) \subseteq S$  называется *минимальным доминирующим множеством* для задачи  $\alpha|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\gamma$ , если выполняются условия *a* и *b*: *a* – для каждого сценария  $p \in T$  множество  $S(T)$  содержит хотя бы одну перестановку обслуживания требований, которая является оптимальной для детерминированной задачи  $\alpha|p|\gamma$ ; *b* – свойством *a* не обладает ни одно собственное подмножество множества  $S(T)$ .

Мощность  $|S(T)|$  минимального доминирующего множества  $S(T)$  можно рассматривать как меру неопределенности задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$ . В случае наименьшего значения  $|S(T)| = 1$  минимальное доминирующее множество для задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  является одноэлементным множеством:  $\{\pi_k\} = S(T)$ , которое и есть *решение* (оптимальное расписание) детерминированного аналога  $1|p|\sum w_i C_i$  неопределенной задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  при любом сценарии  $p \in T$ . Минимальное доминирующее множество  $S(T)$  может быть построено для неопределенной задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  на основе следующего отношения доминирования, которое можно эффективно (полиномиально) задать на множестве требований  $J$  [3].

Определение 2. Требование  $J_u \in J$  доминирует требование  $J_v \in J$  относительно  $T$ , если существует минимальное доминирующее множество  $S(T)$  для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  такое, что требование  $J_u$  предшествует требованию  $J_v$  в каждой перестановке требований из множества  $S(T)$ .

В статье [4] доказаны следующие утверждения для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ .

Теорема 1. Для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  требование  $J_u$  доминирует требование  $J_v$  относительно  $T$  тогда и только тогда, когда  $\frac{w_u}{p_u^U} \geq \frac{w_v}{p_v^L}$ .

Теорема 2. Для того чтобы перестановка  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})$  определяла одноэлементное доминирующее множество  $S(T) = \{\pi_k\} = \{(J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})\}$  для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ , необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$$\frac{w_{k_1}}{p_{k_1}^U} \geq \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}^L}; \quad \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}^U} \geq \frac{w_{k_3}}{p_{k_3}^L}; \quad \dots \quad \frac{w_{k_{n-1}}}{p_{k_{n-1}}^U} \geq \frac{w_{k_n}}{p_{k_n}^L}. \quad (1)$$

Теорема 3. Пусть  $p_i^L < p_i^U$ ,  $J_i \in J$ . Для существования минимального доминирующего множества  $S(T)$  максимальной мощности  $|S(T)| = n!$  для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\max \left\{ \frac{w_i}{p_i^U} \mid J_i \in J \right\} < \min \left\{ \frac{w_i}{p_i^L} \mid J_i \in J \right\}.$$

При применении метода, основанного на устойчивости оптимального расписания, для решения неопределенной задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  остается открытым вопрос, какую перестановку следует выбирать из минимального доминирующего множества  $S(T)$  для практической реализации в случае, когда условие (1) теоремы 2 не выполняется. Поскольку точное решение неопределенной задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  в общем случае невозможно, то предлагается использовать эвристический алгоритм для построения перестановки  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S(T)$ .

В п. 2 показано, как можно оценить качество эвристического решения задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  до реализации расписания на примере построенной перестановки  $\pi_r \in S(T)$ . Минимальную среднюю погрешность по сравнению с оптимальной перестановкой, полученной для случайного сгенерированного сценария задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ , дают перестановки  $\pi_r \in S(T)$ , в которых требования отсортированы в порядке невозрастания отношений весов к серединам интервалов длительностей обслуживания требований. Алгоритм сортировки требований в порядке невозрастания отношений весов к серединам интервалов длительностей обслуживания можно представить следующим образом.

*Алгоритм ЭВРИСТИКА*

*Вход:* Отрезки  $[p_i^L, p_i^U]$  и веса  $w_i$  требований  $J_i \in J$ .

*Выход:* Перестановка  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n}) \in S(T)$  обслуживания требований  $J$ .

*Шаг 1.* Для каждого требования  $J_i \in J$  вычислить значение  $w_i / ((p_i^L + p_i^U) / 2)$ .

*Шаг 2.* Построить перестановку  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n}) \in S(T)$ , упорядочив требования множества  $J$  в порядке невозрастания значений  $w_i / ((p_i^L + p_i^U) / 2)$ .

Очевидно, для реализации алгоритма ЭВРИСТИКА требуется  $O(n \log n)$  элементарных операций. В качестве меры устойчивости оптимальной перестановки  $\pi_k \in S(T)$  к изменениям длительностей обслуживания требований множества  $J$  будем использовать многогранник оптимальности этой перестановки.

**2. Многогранник оптимальности перестановки обслуживания требований.** В статье [5] рассматривается многогранник (параллелепипед) оптимальности перестановки  $\pi_k$ , который содержится в области устойчивости перестановки  $\pi_k$ . Пусть  $N_k$  – подмножество множества индексов  $i$  всех требований  $J_i \in J$ .

**Определение 3.** Максимальный замкнутый параллелепипед  $OB(\pi_k, T) = \times_{k_i \in N_k} [\hat{l}_{k_i}, \hat{u}_{k_i}] \subseteq T$  называется многогранником оптимальности перестановки  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S$  относительно  $T$ , если при любом сценарии  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in T$ , при котором перестановка  $\pi_k$  оптимальна для задачи  $1 | p | \sum w_i C_i$ , эта перестановка остается оптимальной и для задачи  $1 | p' | \sum w_i C_i$  при сценарии  $p' \in OB(\pi_k, T) \times \{ \times_{k_j \in N \setminus N_k} [p_{k_j}, p_{k_j}] \}$ . Если не существует сценария  $p \in T$ , при котором перестановка  $\pi_k$  оптимальна для задачи  $1 | p | \sum w_i C_i$ , то полагаем  $OB(\pi_k, T) = \emptyset$ .

Для построения многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  для перестановки  $\pi_k$  предлагается использовать алгоритм построения многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  для той же перестановки для соответствующей задачи  $1 | \hat{p}_i^L \leq p_i \leq \hat{p}_i^U | \sum w_i C_i$  с редуцированными интервалами длительностей обслуживания требований (рис. 1)  $[\hat{p}_i^L, \hat{p}_i^U] \subseteq [p_i^L, p_i^U]$  для всех  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , полученными по следующим формулам:

$$\frac{w_i}{\hat{p}_i^L} = \min_{1 \leq j \leq i} \left\{ \frac{w_j}{p_j^L} \right\}, \quad \frac{w_i}{\hat{p}_i^U} = \max_{i \leq j \leq n} \left\{ \frac{w_j}{p_j^U} \right\}.$$

Задачу  $1 | \hat{p}_i^L \leq p_i \leq \hat{p}_i^U | \sum w_i C_i$  с редуцированными интервалами возможных длительностей обслуживания требований будем называть *редуцированной задачей*.

В статье [5] разработан алгоритм сложности  $O(n)$  построения многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$ , основанный на следующей теореме.

**Теорема 4.** Многогранник оптимальности перестановки  $\pi_k$  обслуживания требований  $J$  для неопределенной задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  совпадает с многогранником оптимальности перестановки  $\pi_k$  обслуживания требований  $J$  для редуцированной задачи  $1 | \hat{p}_i^L \leq p_i \leq \hat{p}_i^U | \sum w_i C_i$ .

Нетрудно доказать, что если выполняется условие (1) теоремы 2, то многогранник оптимальности перестановки  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})$ , для которой  $S(T) = \{\pi_k\}$ , совпадает с множеством  $T = \{p \mid p \in R_+^n, p_i^L \leq p_i \leq p_i^U, i \in \{1, 2, \dots, n\}\} = \times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$  возможных сценариев. В этом случае для любого сценария  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in T$  оптимальная перестановка для задачи  $1 | p | \sum w_i C_i$  совпадает с перестановкой  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n})$ , построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА. В п. 3 многогранники оптимальности перестановок, полученных с помощью алгоритма ЭВРИСТИКА, оцениваются экспериментально.

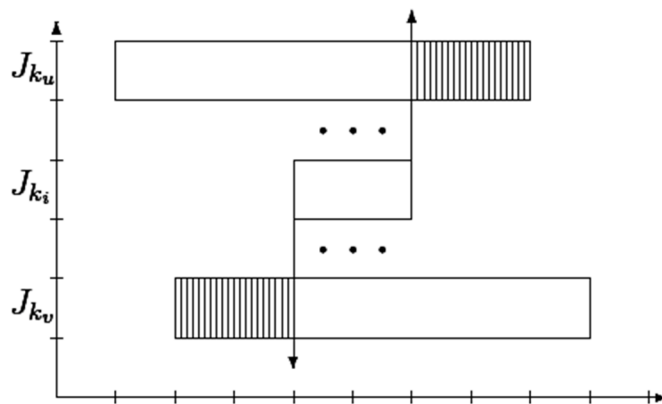


Рис. 1. Отсекаемые в редуцированной задаче интервалы изменений отношения весов к длительностям обслуживания требований (отсекаемые интервалы заштрихованы прямыми вертикальными линиями)

**3. Результаты вычислительного эксперимента.** В проведенном на компьютере вычислительном эксперименте каждая серия задач состояла из 100 случайно сгенерированных задач с одинаковыми количествами требований  $n$  и заданными максимальными погрешностями  $\delta$  длительностей обслуживания требований. Целочисленные значения нижней границы  $p_i^L$  и верхней границы  $p_i^U$  для возможных значений  $p_i \in R_+^1$  длительностей обслуживания требований  $[p_i^L, p_i^U]$  были получены следующим образом. Вначале на числовом отрезке  $[L, U]: L \leq C \leq U$ ,  $[L, U] = [10, 100]$  случайно выбирался центр  $C$  искомого отрезка  $[p_i^L, p_i^U]$  с использованием равномерного закона распределения случайных величин. Нижняя граница  $p_i^L$  возможной длительности обслуживания требования определялась по формуле  $p_i^L = C \left(1 - \frac{\delta}{100}\right)$ , а верхняя граница  $p_i^U$  – по формуле  $p_i^U = C \left(1 + \frac{\delta}{100}\right)$ . Случайно выбранные веса  $w_i \in R_+^1$  каждого требования  $J_i \in J$  были равномерно распределены на отрезке  $[1, 50]$ . Полученные значения весов  $w_i$  считались известными на момент построения расписания.

Все алгоритмы для проведенного эксперимента были реализованы на алгоритмическом языке C++. Эксперименты проводились на компьютере с процессором Intel Pentium (R) с частотой (CPU) 3.00 GHz и оперативной памятью (RAM) 1024 MB.

Для каждой рассмотренной в эксперименте задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  строилась перестановка требований  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n})$  по алгоритму ЭВРИСТИКА и определялся многогранник оптимальности для построенной перестановки. Затем случайным образом выбирался фактический сценарий  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  из множества  $T$  возможных сценариев. Для выбранного сценария  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  строилась оптимальная для задачи  $1 | p^* | \sum w_i C_i$  перестановка по алгоритму Смита [2]. Пусть  $\Phi^0 = \sum_{i=1}^n w_i C_i^0$  обозначает значение целевой функции для перестановки  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n})$ , построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА, а  $\Phi^* = \sum_{i=1}^n w_i C_i^*$  – оптимальное

значение целевой функции для случайно сгенерированной задачи  $1 | p^* | \sum w_i C_i$  с фактическими длительностями  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  обслуживания требований. Относительная погрешность целевой функции может быть вычислена по формуле  $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100 \%$ . Основная цель вычислительного эксперимента состояла в сравнении многогранников оптимальности с относительными погрешностями перестановок  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n})$ , построенных по алгоритму ЭВРИСТИКА. В таблице представлены результаты вычислительных экспериментов для случайно сгенерированных задач  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  с количеством требований  $n \in \{200, 400, \dots, 1000\}$  и максимальной погрешностью  $\delta \% \in \{1 \%, 5 \%, 10 \%, 15 \%, 40 \%\}$  заданных длительностей обслуживания требований.

В столбце 1 таблицы указано количество требований  $n$  в рассмотренных в эксперименте задачах, в столбце 2 – погрешности  $\delta$  случайно сгенерированных интервалов длительностей обслуживания требований (в процентах). В столбце 3 приведены средние значения размерностей  $|N_k|$  многогранников оптимальности  $OB(\pi_r, T)$  перестановок  $\pi_r$ . В столбце 4 даны средние относительные объемы  $VolOB(\pi_r, T)$  многогранников оптимальности, полученные по следующей формуле:  $VolSB(\pi_r, T) = \prod_{\hat{r}_i < \hat{u}_{r_i}} \frac{\hat{u}_{r_i} - \hat{r}_i}{p_{r_i}^U - p_{r_i}^L}$ . В столбце 5 указаны средние значения относительных погрешностей  $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100 \%$  для каждой серии решенных в эксперименте задач, в столбце 6 приведено суммарное время решения всей серии из 100 задач.

Для перестановки  $\pi_r \in S(T)$ , построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА, относительная погрешность  $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100 \%$  полученных решений для серии задач имеет максимальное



значение 3,3056 %, среднее значение 0,8177 % и минимальное значение 0,0126 %. Минимальные (по сериям задач) средние значения  $\Delta = \{0,0130; 0,0126; 0,0128; 0,0126; 0,0128\}$  получены для серии задач с  $\delta \% = 1 \%$ , которым соответствуют максимальные средние значения  $\{75,44; 67,4; 62,92; 60,31; 58,43\}$  размерностей многогранников оптимальности. Максимальные (по сериям задач) средние значения  $\Delta = \{3,2684; 3,2368; 3,2860; 3,3056; 3,2887\}$  получены для серии задач с  $\delta \% = 40 \%$ , которым соответствуют минимальные средние значения  $\{2,21; 1,98; 2,01; 1,97; 1,95\}$  размерностей многогранников оптимальности.

**Результаты решения случайно сгенерированных задач для  $w_i \in [1, 50]$  и  $n \in \{200, 400, \dots, 1000\}$**

Число требований $n$	Максимальная погрешность $\delta \%$ длительностей $p_i, J_i \in J$	Средняя размерность многогранника $OB(\pi_r, T)$	Относительный объем многогранника оптимальности $VolOB(\pi_r, T)$	Относительная погрешность $\Delta = \frac{(\Phi^0 - \Phi^*)}{\Phi^*} \cdot 100 \%$ полученных решений	Время работы процессора для серии задач, с
1	2	3	4	5	6
200	1 %	75,44	8,26E-19	0,0130 %	0
200	5 %	19,53	6,90E-06	0,0706 %	1
200	10 %	8,69	5,00E-03	0,2295 %	0
200	15 %	5,19	4,78E-02	0,4973 %	0
200	40 %	2,21	2,04E-01	3,2684 %	1
400	1 %	67,4	3,01E-17	0,0126 %	1
400	5 %	16,08	3,01E-04	0,0711 %	1
400	10 %	6,58	3,87E-02	0,2336 %	1
400	15 %	3,93	8,33E-02	0,4942 %	1
400	40 %	1,98	1,65E-01	3,2368 %	1
600	1 %	62,92	7,46E-08	0,0128 %	2
600	5 %	12,7	1,37E-03	0,0718 %	3
600	10 %	5,91	2,46E-02	0,2339 %	2
600	15 %	3,83	7,73E-02	0,4945 %	3
600	40 %	2,01	1,24E-01	3,2860 %	3
800	1 %	60,31	4,51E-12	0,0126 %	4
800	5 %	11,78	3,73E-03	0,0708 %	4
800	10 %	5,38	2,54E-02	0,2306 %	4
800	15 %	3,49	7,99E-02	0,4956 %	5
800	40 %	1,97	1,25E-01	3,3056 %	4
1000	1 %	58,43	1,52E-11	0,0128 %	6
1000	5 %	10,66	4,75E-03	0,0715 %	7
1000	10 %	5,09	3,15E-02	0,2323 %	6
1000	15 %	3,22	6,66E-02	0,4964 %	7
1000	40 %	1,95	7,91E-02	3,2887 %	7

При увеличении максимальной погрешности  $\delta$  длительностей обслуживания требований средняя погрешность  $\Delta$  целевой функции растет для каждой серии задач, а средняя величина размерности многогранника оптимальности уменьшается (рис. 2, а, б). Имеет место корреляция роста погрешности  $\Delta$  и уменьшения размеров многогранника оптимальности  $OB(\pi_r, T)$ . Из результатов эксперимента следует, что погрешность  $\Delta$  целевой функции слабо зависит от количества требований при фиксированной погрешности  $\delta$  длительностей обслуживания требований (рис. 2, в).

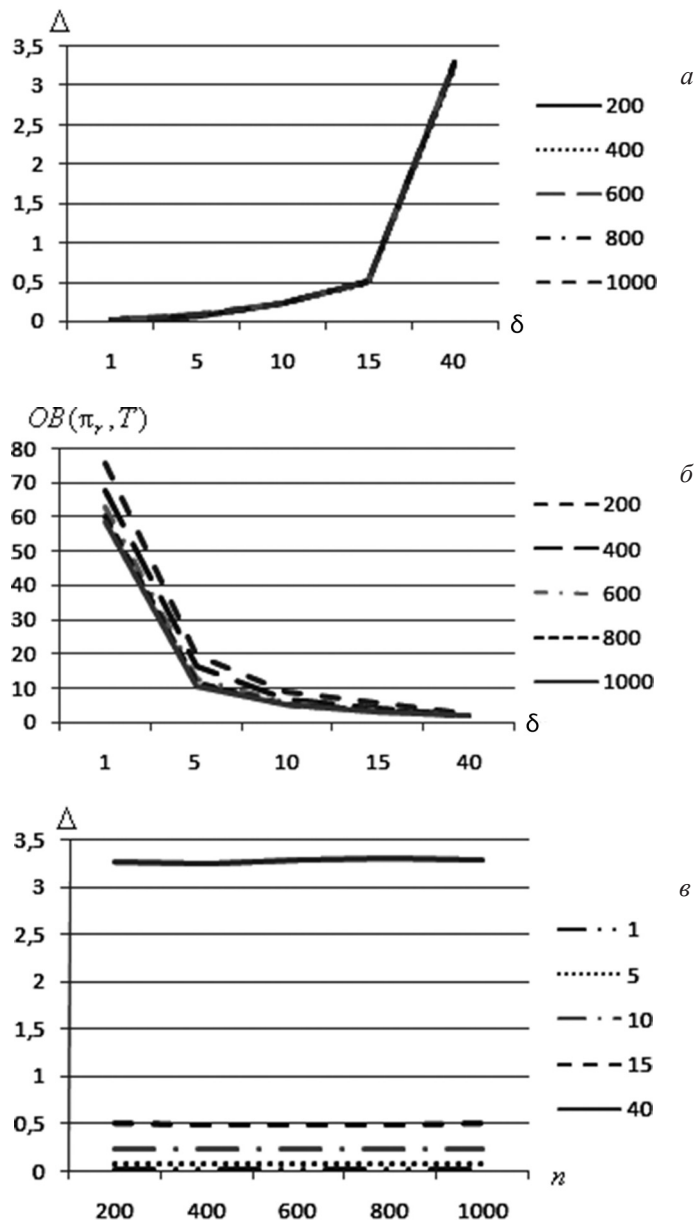


Рис. 2. Зависимость: *a* – погрешности целевой функции  $\Delta$  от максимальной погрешности  $\delta$  длительностей  $p_i, J_i \in J$ ; *б* – размерностей многогранников оптимальности перестановки  $\pi_r \in S(T)$  от максимальной погрешности  $\delta$  длительностей  $p_i, J_i \in J$ ; *в* – погрешности целевой функции от количества требований

Также ставился эксперимент с целью выявления для многогранников оптимальности  $OB(\pi_r, T)$  с одинаковыми размерностями зависимости погрешностей значений целевых функций от количества требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$ . Проводился эксперимент по определению для многогранников оптимальности перестановки  $\pi_r \in S(T)$  с одинаковыми размерностями и одинаковым количеством требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$ , зависимости погрешностей значений целевых функций от объема многогранника оптимальности. При уменьшении количества требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$ , в случае одинаковых размерностей многогранников оптимальности в серии задач относительная погрешность целевой функции, как правило, растет (рис. 3, *a*). В случае увеличения объема  $VolOB(\pi_k, T)$  многогранников оптимальности при равных значениях размерностей многогранников оптимальности и требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$ , относительная погрешность целевой функции, как правило, убывает (рис. 3, *б, в*).

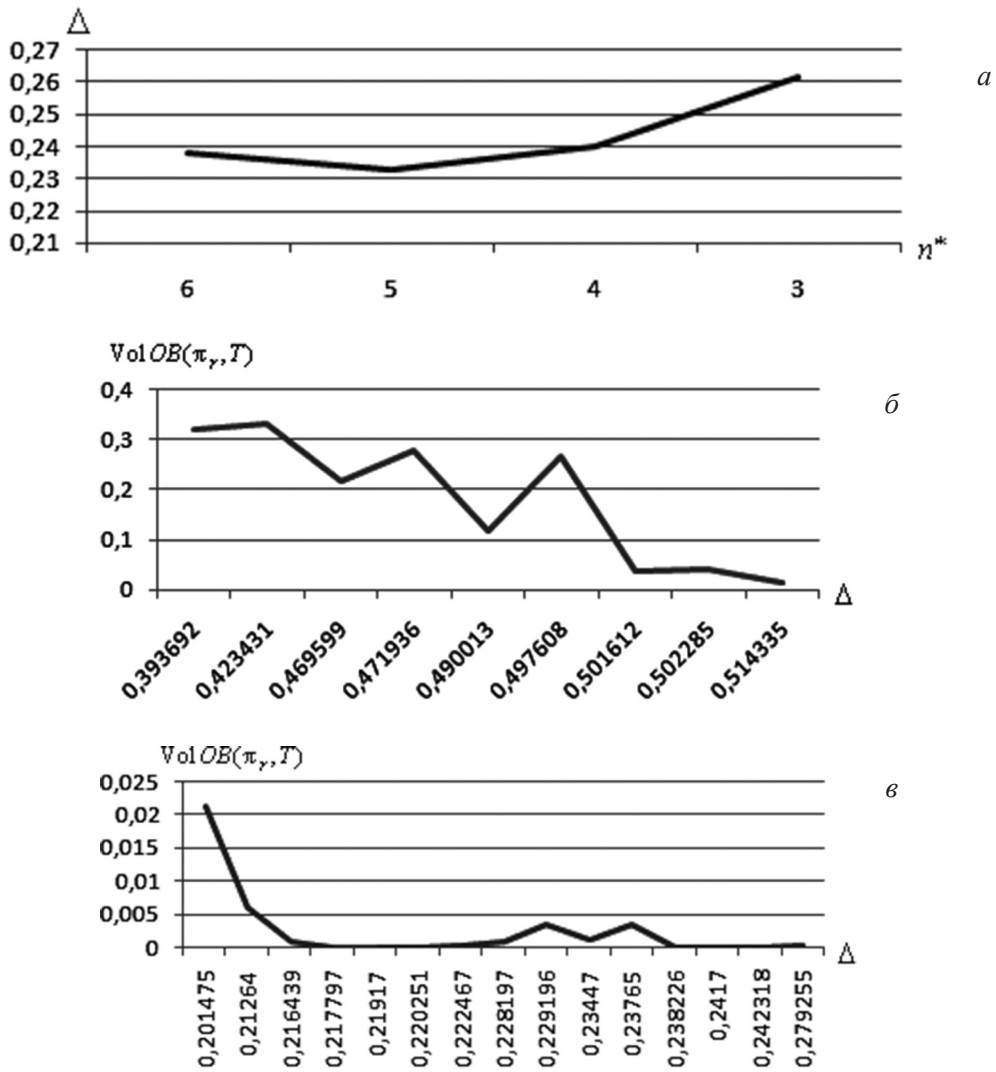


Рис. 3. Зависимость погрешности целевой функции от количества  $n^*$  требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$  при одинаковых размерностях многогранников  $OB(\pi_r, T)$  (а); уменьшение относительного объема многогранника оптимальности  $OB(\pi_r, T)$  при увеличении  $\Delta$  для серии задач А (б) и серии задач Б (в) с одинаковыми размерностями многогранника и одинаковыми количествами  $n^*$  требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$

Таким образом, целесообразно из всех перестановок минимального доминирующего множества  $S(T)$  выбирать для реализации перестановку с наибольшей размерностью многогранника оптимальности. Если таких перестановок несколько, то среди них следует выбирать перестановку, имеющую минимальное количество  $n_k$  требований  $J_{r_i}$ , для которых выполняется равенство  $\hat{l}_{r_i} = \hat{u}_{r_i}$ . Если и таких перестановок несколько, то среди них следует выбирать перестановку  $\pi_k$  с наибольшим относительным объемом  $VolOB(\pi_k, T)$  многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$ .

**Заключение.** Согласно проведенному эксперименту, для перестановки  $\pi_r \in S(T)$ , построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА, относительная погрешность  $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100\%$  полученных решений для серии случайно сгенерированных задач  $1 | p_i^l \leq p_i \leq p_i^u | \sum w_i C_i$  имела максимальное значение 3,3056 % и среднее значение 0,8177 %. При увеличении максимальной погрешности  $\delta$  длительностей обслуживания требований средние значения относительной погрешности  $\Delta$  целевой функции  $\gamma = \sum_{i=1}^n w_i C_i$  росли для каждой серии решенных задач, а средние значения размерностей и объемов  $VolOB(\pi_k, T)$  многогранников оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  уменьшались пропорционально росту погрешности  $\Delta$  целевой функции.



Размерность, объем и другие характеристики многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  можно вычислить до реализации расписания обслуживания требований, и поэтому они могут быть использованы для выбора перестановки, оптимальность которой более устойчива к возможным вариациям длительностей обслуживания требований. Таким образом, целесообразно из всех перестановок минимального доминирующего множества  $S(T)$  выбирать для практической реализации перестановку  $\pi_k \in S(T)$  с наибольшим по размерности и объему многогранником оптимальности  $OB(\pi_k, T)$ .

Разработка алгоритмов построения перестановок требований с наибольшим многогранником оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  представляет интерес для дальнейших исследований неопределенной задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ .

### Список использованной литературы

1. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey / R. L. Graham [et al.] // Ann. Discrete Math. – 1976. – Vol. 5. – P. 287–326.
2. Smith, W. E. Various optimizers for single-stage production / W. E. Smith // Naval Research Logistics Quarterly. – 1956. – Vol. 3, N 1. – P. 59–66.
3. Scheduling under uncertainty: theory and algorithms / Yu. N. Sotskov [et al.]. – Minsk: Belarus. nauka, 2010.
4. Sotskov, Yu. N. Minimizing total weighted flow time of a set of jobs with interval processing times / Yu. N. Sotskov, N. G. Egorova, T.-C. Lai // Mathematical and Computer Modelling. – 2009. – Vol. 50, N 3/4. – P. 556–573.
5. Сотсков, Ю. Н. Многогранники устойчивости оптимальной перестановки обслуживания требований / Ю. Н. Сотсков, Н. Г. Егорова // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 7. – С. 136–154.

Поступила в редакцию 12.03.2015