ISSN 1561-2430 (print)
УДК 004.056.55; 621.391.26

Поступила в редакцию 03.03.2016
Received 03.03.2016

В. А. Липницкий[1], А. И. Сергей[2]

[1]Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь
[2]Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

О СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛИЧЕСТВА ОРБИТ КЭМЕРОНОВСКИХ МАТРИЦ БОЛЬШОГО РАНГА

Назовем квадратную (0,1)-матрицу порядка n, среди элементов которой ровно n единиц, кэмероновской матрицей. Рассматриваются орбиты естественного действия группы $S_n \times S_n$ (квадрат симметрической группы степени n) на множестве кэмероновских матриц порядка n (независимое действие на строках и столбцах матриц). Установлено, что для фиксированного $d < n$ число таких орбит для матриц ранга $n - d$ постоянно при $n \geq 3d$ и растет с ростом n при $n < 3d$. Для каждой орбиты указан ее представитель в квазижордановой форме.

Ключевые слова: бинарная матрица, класс эквивалентности, орбита, двудольный граф, компонента связности

V. A. Lipnitski[1], A. I. Sergey[2]

[1]Military Academy of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

ON THE STABILIZATION OF THE NUMBER OF ORBITS OF HIGH-RANK CAMERON MATRICES

A quadratic (0,1)-matrix of degree n with just n units among its elements will be called a Cameron matrix. The orbits of the natural action of the group $S_n \times S_n$ (the square of the symmetric group of degree n) on the set of Cameron matrices of degree n (an independent action on the rows and the columns of matrices) are considered. It is proved that for fixed $d < n$, the number of such orbits for matrices of rank $n - d$ is constant for $n \geq 3d$ and grows with the growth of n if $n < 3d$. For each orbit, its representative in a quasi-Jordan form is indicated.

Keywords: binary matrix, equivalence class, orbit, bipartite graph, connected component

Введение. Пусть P_n – множество всех квадратных (0,1)-матриц порядка n, содержащих в точности n единиц. На строках и столбцах этих матриц действует группа – квадрат $S_n^2 = S_n \times S_n$ симметрической группы S_n. Преобразующиеся при этом друг в друга матрицы называют эквивалентными. Задача классификации образующихся при указанном действии орбит возникает в различных областях науки и практики – в теории графов и теории групп подстановок [1, 2], в проблеме распознавания образов и в помехоустойчивом кодировании [3–6].

Задача подсчета количества α_n орбит, на которое разбивается множество P_n, имеет длительную и весьма интересную историю (см. [7]); составляет суть третьей из двадцати семи открытых проблем П. Кэмерона в теории групп подстановок [1]. Поэтому рассматриваемые в настоящей работе матрицы правомерно называть кэмероновскими в честь П. Кэмерона, который первым обратил внимание на важность данного класса матриц.

Проведенные исследования показывают, что общей формулы для величины α_n не существует. Тем не менее найден достаточно эффективный алгоритм вычисления α_n в зависимости от n [7, 8], также разработан практически значимый алгоритм формирования представителей орбит [9, 10].

Спектр орбит используется в задачах распознавания образов, в двумерном помехоустойчивом кодировании и других задачах. Однако стремительный рост α_n является серьезным препятствием на пути этих применений. Необходима внутренняя характеризация рассматриваемых орбит. Одним из первых шагов на этом пути стало проведение оценки мощности рассматриваемых орбит, в частности, было установлено отсутствие полных орбит (имеющих максимально возможную мощность $(n!)^2$) при $n \geq 5$ [11].

Естественным представляется деление S_n^2-орбит по значениям ранга их матриц – классической характеристики прямоугольных матриц над любым полем. Очевидно, матрицы, принадлежащие каждой отдельно взятой орбите, имеют один и тот же ранг. В работе [12] показано, что все матрицы ранга n образуют одну орбиту мощностью $n!$, что имеется в точности три различные орбиты матриц ранга $n-1, n>2,$ что при $n > 5$ имеется в точности 15 различных S_n^2-орбит матриц ранга $n - 2$. Количество орбит ранга 1 прямо зависит от наличия и количества делителей у числа n. Классификация орбит ранга 2 «тонет» в обилии разнообразных случаев и вариантов. Данная работа является непосредственным развитием [12] в сторону классификации орбит матриц большого ранга.

Основная задача. Обозначим через $F_{n,r}$ количество классов эквивалентности на множестве P_n (0,1)-матриц порядка n, ранг которых равен r. Как сказано выше, $\left|F_{n,n}\right| = 1;$ $\left|F_{n,n-1}\right| = 3$ при $n \geq 3;$ $\left|F_{n,\mathrm{n}-2}\right| = 15$ при $n \geq 6$. Отметим, что $\left|F_{5,3}\right| = 14;$ $\left|F_{4,2}\right| = 9.$ Оказывается, и в дальнейшем, с ростом n и r при фиксированном $d = n - r,$ $d < n/2,$ значения параметра $F_{n,r}$ вначале растут, а затем демонстрируют подобную же стабильность. Целью настоящей работы является доказательство следующего факта.

Т е о р е м а. *При заданном $d,$ $d < n,$ количество орбит ранга n – d с ростом n вначале растет, а затем стабилизируется, начиная с $n = 3d$, т. е. $\left|F_{3d,2d}\right| \quad \left|F_{n',n'\ d}\right|$ для значений $n' > 3d$.*

Доказательство опирается на взаимосвязь (0,1)-матриц с графами.

Связные компоненты и квазидиагональная форма (0,1)-матриц. С каждой матрицей $A \in P_n$ естественным и однозначным образом связывается неориентированный двудольный граф X_A достаточно специфического вида: одной его доле (будем считать ее левой) принадлежит n вершин, соответствующих n строкам матрицы A; правой его доле принадлежит также n вершин, соответствующих столбцам матрицы A; граф X_A содержит n ребер, соответствующих единицам матрицы A; если единица расположена в i-й строке и j-м столбце матрицы A, то соответствующее ей ребро соединяет i-ю вершину левой доли с j-й вершиной правой доли в графе X_A. Степень вершины графа X_A равна весу соответствующей строки или столбца матрицы A и равна количеству единиц в этой строке или в этом столбце.

С матрицей $A \in P_n$ свяжем более прямым путем еще один граф, который будем обозначать Y_A. Это не двудольный граф. Он содержит в точности n вершин, ими являются все единицы матрицы A. Соседние единицы одной строки (одного столбца) соединяются ребром. Если в данной строке (столбце) имеется $i,$ $i \geq 2,$ единиц, то их последовательно соединяют $i - 1$ ребер.

К фундаментальным понятиям теории графов относятся понятия маршрута, связности вершин, связных компонент (см., напр., [13], гл. 2). Связность вершин означает наличие маршрута из ребер между ними. Граф связен, если связны любые две его вершины. Из неравенства 4.23 [13, с. 87] следует, что во всяком связном графе с s ребрами и v вершинами имеет место соотношение

$$v \leq s + 1. \tag{1}$$

Следовательно, если граф X_A связен, то в силу (1) должно выполняться неравенство $2n \leq n + 1$ или $n \leq 1$. Таким образом, из формулы (1) следует, что при $n > 1$ реально никогда граф X_A не является связным.

Граф Y_A, наоборот, может быть связным при любом значении $n > 1$. Очевидным примером является матрица $A \in P_n$, у которой все единицы расположены в одной строке или же в одном столбце. Несложно доказывается небольшое обобщение этого примера.

П р е д л о ж е н и е 1. *У всякой матрицы $A \in P_n$ ранга 1 граф Y_A связен.*

Связность вершин определяет отношение эквивалентности на множестве вершин любого графа. Тем самым каждый граф, в том числе и графы X_A (а также и граф Y_A), разбивается в непересекающееся объединение своих связных компонент [13, теорема 2.2.1]. Каждая вершина графа и каждое его ребро принадлежат одной, однозначно определенной связной компоненте. Среди этих компонент могут быть и нуль-связные, т. е. не имеющие ни одного ребра, иными словами, состоящие из изолированных вершин. В графе X_A они соответствуют нулевым строкам и столбцам матрицы A. У кэмероновских матриц с условием $r(A) < n$ нулевые строки и/или столбцы обязательно существуют. В графе Y_A нуль-связными компонентами являются единицы, в единственном числе стоящие в конкретной строке и в конкретном столбце, т. е. единицы с весовым содержанием (1;1) по терминологии из [5, гл. 4]. Отсюда следует, что граф Y_A всякой матрицы $A \in P_n$ ранга n состоит в точности из n нуль-связных компонент.

Выбросим из матрицы $A \in P_n$ все нулевые строки и столбцы. Количество строк и столбцов полученной матрицы назовем упаковочными параметрами матрицы A. Некоторые особенности связных компонент графов X_A матриц $A \in P_n$ отражает следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 2. *Графы X_A всех матриц $A \in P_n$ ранга n, $n \geq 1$, не имеют нуль-связных компонент; эти графы состоят из n одинаковых компонент, содержащих по одному ребру и по одной вершине из каждой доли.*

Пусть матрица $A \in P_n$ имеет ранг $r(A) < n$. Тогда граф X_A обязательно имеет нуль-связные компоненты; если k и m – упаковочные параметры матрицы A, то X_A содержит множество X_A^0 из $2n - k - m$ нуль-связных компонент. При этом множество X_A^{sv} действительно связных компонент – содержащих не менее двух вершин и не менее одного ребра – имеет мощность t, $1 \leq t \leq n-1$; по крайней мере, одна из этих компонент содержит более одного ребра и более двух вершин.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть утверждения следует из того факта, что все матрицы $A \in P_n$ ранга n принадлежат одной-единственной S_n^2-орбите $< E_n >$, порожденной единичной матрицей $E_n \in P_n$ (см. [5, гл. 4] или [12]).

Вторая часть утверждения следует из того факта, что матрица $A \in P_n$, которая содержит единицы во всех строках и столбцах, может иметь только ранг n. Таким образом, матрицы $A \in P_n$ ранга $r(A) < n$ обязательно имеют нулевые строки и/или столбцы, соответствующие вершины в графе X_A обязательно имеют нулевую степень и неизбежно порождают нуль-связные компоненты. Пусть k и m – упаковочные параметры матрицы A. По крайней мере один из этих параметров имеет значение, меньшее n. В противном случае легко видеть, что матрица A должна быть перестановочной, т. е. иметь ранг n. Пусть, к примеру, $k < n$. Тогда в одной из строк матрицы A неизбежно имеется несколько единиц, соответствующая вершина левой доли графа X_A имеет степень, превосходящую 1. Тем самым завершено доказательство последней части предложения 2.

Далее рассматриваем только те матрицы $A \in P_n$, ранг которых меньше n. Связные компоненты X_A^i, $1 \leq i \leq t < n$, множества X_A^{sv} упорядочим по убыванию количества s_i ребер в них. Компоненты с одинаковым количеством ребер упорядочиваем по убыванию максимума степени вершин этих компонент. Нумерация нуль-связных компонент – по остаточному принципу.

Перенумеруем вершины обеих долей графа X_A, переходя постепенно от первой компоненты ко второй с продолжением нумерации, и так далее. Вершины каждой из долей каждой связной компоненты графа нумеруем в порядке убывания их степеней. Пусть v_i и w_i – количество вершин в левой и правой долях компоненты X_A^i, $1 \leq i \leq t$. Тогда $n \geq s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_t \geq 1$; $s_1 + s_2 + \ldots + s_t = n$; $v_1 + v_2 + \ldots + v_t = k$; $w_1 + w_2 + \ldots + w_t = m$.

Соответствующую перестройку произведем и в матрице A. Строки и столбцы в ней переставим в соответствии с проведенной перенумерацией вершин графа X_A. В результате в S_n^2-орбите матрицы A найдем матрицу A' с клеточно-диагональным расположением единиц:

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_2 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & D_t & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь D_i, $1 \le i \le t$, является $(v_i \times w_i)$-матрицей, соответствующей связной компоненте X_A^i. Тем самым доказано

П р е д л о ж е н и е 3. *Всякая матрица $A \in P_n$ ранга $r(A) < n$ и с упаковочными параметрами k и m S_n^2-эквивалентна матрице A' из формулы* (2). *Количество клеток D_i в ней равно количеству связных компонент X_A^i в X_A, размеры этих клеток совпадают с мощностями долей графов X_A^i.*

С л е д с т в и е 1. $r(A) = r(D_1) + r(D_2) + ... + r(D_t)$.

С л е д с т в и е 2. $t \le r(A)$.

Матрицу A' (формула (2)) будем называть квазижордановой канонической формой матрицы $A \in P_n$.

В отличие от графа X_A граф Y_A строится легко – прямо на матрице A единицы соединяются отрезками горизонтальных и вертикальных прямых. Связные компоненты Y_A^i в точности соответствуют компонентам X_A^i из X_A^{sv} и получаются аналогичным начертанием отрезков прямых на соответствующих подматрицах D_i.

Свойства клеток D_i. Как уже отмечено выше, каждая клетка D_i, содержащая более одной единицы, по сути является связным подграфом Y_A^i. Связность влечет тот факт, что если данная единица единственна в своей строке (столбце), то в столбце (строке), в котором она расположена, должно быть более одной единицы. Отсюда для клеток D_i вытекает

С в о й с т в о 1 (ограниченность снизу весового содержания единиц клеток D_i). *Пусть единица из клетки D_i, содержащей более одной единицы, расположена в μ-й строке и в ν-м столбце матрицы $A' \in P_n$ и имеет весовое содержание $(f_\mu; g_\nu)$. Тогда $f_\mu + g_\nu \ge 3$.*

З а м е ч а н и е 1. Если для единиц подматрицы B матрицы $A \in P_n$ выполняются условия свойства 1, то отсюда вовсе не следует связность графа Y_B. Примером может служить подматрица B, составленная из нескольких клеток D_i, каждая из которых содержит более одной единицы.

С в о й с т в о 2 (эластичность и прочность связности клеток D_i). *Пусть клетка D_i содержит более двух единиц. В ней можно одну единицу заменить нулем, преобразованная клетка D_i' (т. е. соответствующий граф Y_i') по-прежнему останется связной. Пусть клетка D_i содержит более одной единицы. В ней можно заменить один из нулей единицей или же добавить к ней строку (столбец) с единственной единицей таким образом, что связность клетки сохраняется.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единицы матрицы D_i делятся на две категории – крайние и внутренние. Крайние – те, из которых в соответствующем этой клетке графе Y_i выходит единственное ребро. Остальные – внутренние. Очевидно, замена крайней единицы нулем не повлияет на связность остальных единиц.

Если все единицы клетки – внутренние, то в ней обязательно найдется «угловая» единица (вершина A весом 2 соответствующего графа Y_i), которая соединяется только с двумя соседними единицами одним горизонтальным и одним вертикальным ребром (вершины B и C графа Y_i). Построим путь $F_1, F_2, ..., F_t$ следующим образом. Положим $F_1 = B$. Так как вершина B внутренняя, существует вершина $F_2 \ne A$, соединенная с ней ребром. Ясно, что $F_2 \ne C$. Предположим, что построен путь $F_1, F_2, ..., F_k$ без самопересечений и $F_j \neq C$ при $1 \leq j \leq k$. Если вершина F_k соединена ребром с C, положим $F_{k+1} = C$. Если же F_k не соединена с C, но соединена с какими-либо вершинами, отличными от $F_1, F_2, ..., F_{k-1}$, выберем в качестве F_{k+1} одну из таких вершин. Будем продолжать этот процесс, пока возможно. Поскольку число вершин графа конечно, на каком-то шаге получим либо путь $B, F_2, ..., C$, не проходящий через вершину A, либо путь $F_1, F_2, ..., F_t$ такой, что все вершины, с которыми F_t соединена ребром, содержатся в множестве $F_1, F_2, ..., F_{t-1}$. Легко видеть, что в 1-м случае можно удалить вершину A (поставить нуль вместо единицы) без нарушения связности, а во 2-м – вершину F_t.

Если в клетке D_i имеются нули, то замена любого из них единицей не нарушит, как легко видеть, связности всех ее единиц. Если клетка D_i состоит из одних единиц, то добавим к ней новую строку (столбец) с одной единицей. Все единицы преобразованной клетки будут связанными друг с другом в смысле построения графа Y_i. Свойство 2 полностью доказано.

С в о й с т в о 3 (двусторонняя оценка количества единиц клеток D_i). *Пусть клетка D_i расположена в k_i строках и в m_i столбцах матрицы $A' \in P_n$. Тогда количество s_i единиц клетки D_i ограничено неравенством*

$$k_i + m_i - 1 \leq s_i \leq k_i m_i. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произведение $k_i m_i$ равно количеству элементов подматрицы D_i. Ясно, что количество единиц не может превосходить такую величину.

Докажем левую часть двойного неравенства (3) методом математической индукции по числу s_i единиц в клетке D_i. Для $s_i = 2, 3, 4$ неравенство проверяется непосредственно. Предположим, что неравенство (3) верно для клеток D_i с числом $s_i \leq S$, где $S > 1$, и докажем его для клеток D_i с числом $s_i = S + 1$. Пусть D_i – любая из таких клеток. Согласно свойству 2 в ней можно занулить одну из единиц так, что полученная клетка D_i' останется связной и состоящей из S единиц. К ней применимо предположение индукции: если D_i' расположена в k_i' строках и в m_i' столбцах, то $k_i' + m_i' - 1 \leq S$. Согласно доказательству второй части свойства 2 возвращение от D_i' к D_i может осуществляться одним из двух путей – без добавления строки или столбца, или же с добавлением. Во втором случае получим неравенство $k_i' + m_i' - 1 \leq S < S + 1$. В первом же случае такой переход приведет к верному неравенству: $k_i' + m_i' \leq S + 1$.

Замечание 2. Границы, установленные формулой (3), точны и не улучшаемы. Клетки ранга 1 представляют примеры реализации правой границы этой формулы (см. предложение 1). Левую границу реализует, например, следующая клетка:

$$D_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $[t]$ – целая часть вещественного числа t.

С в о й с т в о 4. *Не существует клеток D_i ранга $r_i \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ для четных n и ранга $r_i \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ для нечетных n. Квазижорданова форма матриц A ранга $r(A) \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ для нечетных n*

и ранга $r_i \geq \left[\frac{n}{2}\right]+1$ *для четных n содержит более одной клетки* D_i, *т. е. для них число клеток* $t \geq 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что размеры k_i и m_i клетки D_i должны удовлетворять неравенствам $k_i \geq r_i$, $m_i \geq r_i$ и согласно свойству 3 количество единиц s_i в клетке D_i должно удовлетворять неравенству $s_i \geq k_i + m_i - 1$.

Пусть $n = 2v$ четно. Тогда $\left[\frac{n}{2}\right]+1 = v+1 > \frac{n}{2}$. Если среди матриц $A \in P_n$ существует матрица с клеткой D_i ранга $r_i \geq \left[\frac{n}{2}\right]+1 = v+1$, то $s_i \geq k_i + m_i - 1 \geq 2(v+1)-1 = n+1 > n$, чего быть не может.

Пусть $n = 2v+1$ нечетно. Тогда $\left[\frac{n}{2}\right]+1 = v+1$. Если среди матриц $A \in P_n$ существует матрица с клеткой D_i ранга $r_i > \left[\frac{n}{2}\right]+1 = v+1$, то $s_i \geq k_i + m_i - 1 > 2(v+1)-1 = n$, чего быть не может.

Вторая часть утверждения непосредственно вытекает из первой.

З а м е ч а н и е 3. Указанные свойством 4 границы точны. Для нечетных $n = 2v+1$, $v \geq 1$, существуют матрицы ранга $v + 1$ с единственной клеткой D_1. Примером такой клетки служит нижняя треугольная матрица N порядка $v + 1$ из формулы (4); в ней побочная диагональ и параллельная ей диагональ состоят из одних единиц, таким образом, в целом матрица содержит $(v+1)+v = n$ единиц. Для четных $n = 2v$, $v \geq 1$, существуют матрицы ранга v с единственной клеткой D_1. Примером такой клетки служит матрица L порядка $(v \times (v+1))$ из формулы (4) с двумя параллельными диагоналями из одних единиц.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .... & 1 & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Формулы (4) доказывают существование матриц $A \in P_n$ с единственной клеткой D_1 при максимально допустимом для этого значении ранга $r(A)$. Предложение 1 фактически утверждает то же для матриц ранга 1. Образовавшийся промежуток в значениях ранга ликвидирует

С в о й с т в о 5. *Для всех значений ранга* $r(A)$ *в промежутке* $1 \leq r(A) \leq \frac{n}{2}$ *существуют матрицы* $A \in P_n$, *квазижорданова форма которых содержит единственную клетку* D_1 *со всеми n единицами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $2 \leq r \leq \frac{n}{2}$. Искомой матрицей ранга r является матрица $A \in P_n$, упаковочным содержанием которой (т. е. тем, что остается после выбрасывания из A всех нулевых строк и столбцов) является матрица $A_1 = \begin{pmatrix} K & N_r \end{pmatrix}$ порядка $r \times (f+r)$ для $f = n - 2r + 1$, где K – подматрица порядка $r \times f$, первые $r - 1$ строк – нулевые, а последняя, r-я, состоит из одних единиц, N_r – та же матрица N из формулы (4), только порядка r.

Каждая клетка D_i, $1 \le i \le t$, содержит s_i единиц, v_i строк и w_i столбцов. В силу формулы (1) эти параметры взаимосвязаны соотношением $v_i + w_i \le s_i + 1$. Следовательно,

$$\min(v_i, w_i) \le \left[\frac{s_i + 1}{2}\right]. \tag{5}$$

Квадратные скобки в правой части формулы (5), как уже отмечалось, означают, что берется целая часть заключенного в них числа. Ранг матрицы не может превосходить число ненулевых строк и столбцов в ней. Поэтому из формулы (5) следует

Предложение 4. $r(\mathrm{D}_i) \le \left[\frac{s_i + 1}{2}\right]$.

Общие свойства клеток у матриц с одинаково отклоняющимся от *n* рангом. Для доказательства очередного утверждения нам понадобится следующая

Лемма. *Для любых натуральных значений t из условия* $\left[\frac{t}{2}\right] \le d$ *следует, что* $t \le 2d + 1$.

Доказательство. Для четных $t = 2\tau$, $\tau > 0$, величина $[t/2] = \tau \le d$. Тогда $t = 2\tau \le 2d < 2d + 1$. Для нечетных $t = 2\tau + 1$, $\tau \ge 0$, по-прежнему величина $[t/2] = \tau \le d$. Тогда $t = 2\tau + 1 \le 2d + 1$. Лемма доказана.

Предложение 5. *В условиях предложений* 3 *и* 4 *положим* $d = n - r$, $d_i = s_i - r_i$. *Тогда выполняются следующие неравенства:* $s_i \le 2d_i + 1 \le 2d + 1$; $r_i = r(D_i) \le d_i + 1 \le d + 1$.

Доказательство. Как отмечалось выше, $s_1 + s_2 + \ldots + s_t = n$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_t = r = r(A) = n - d$ в данном случае. Поэтому $d_1 + d_2 + \ldots + d_t = n - (n - d) = d$. Очевидно, $d_i \le d$. Но в силу предложения 3 имеем

$$s_i - r_i \ge s_i - \left[\frac{s_i + 1}{2}\right] \ge s_i - \frac{s_i + 1}{2} = \frac{s_i - 1}{2} \ge \left[\frac{s_i}{2}\right].$$

Следовательно, $\left[\frac{s_i}{2}\right] \le d$ или, согласно лемме, $s_i \le 2d + 1$. Отсюда, с учетом предложения 4, получаем и второе неравенство относительно рангов клеток.

Предложение 6. *Для всех матриц* $A \in P_n$ *ранга* $n - d$, $d \ge 1$, *таких, что количество* s_i *единиц каждой их клетки* D_i *(см. предложение 3) не менее двух, выполняется условие* $n \le 3d$.

Доказательство. Для клеток D_i, введенных в предложении 2, их ранг $r(D_i) \le \left[\frac{s_i + 1}{2}\right]$ согласно предложению 4. Из этого неравенства следует, что величина $d_i = s_i - r(D_i) \ge s_i - \left[\frac{s_i + 1}{2}\right] \ge s_i - \frac{s_i + 1}{2} = \frac{s_i - 1}{2} > 0$, поскольку $s_i \ge 2$. Более того, $d_i \ge 1$ как положительное число, являющееся разностью двух целых чисел. Тогда $2d_i + 1 \ge s_i$ и $\frac{s_i}{d_i} \le 2 + \frac{1}{d_i} \le 3$, поскольку $0 < \frac{1}{d_i} \le 1$. Таким образом, $\frac{s_i}{d_i} \le 3$ или $s_i \le 3d_i$. Так как $\sum_{i=1}^{t} s_i = n$ и $\sum_{i=1}^{t} d_i = d$, то $n \le 3d$, что и требовалось доказать.

Замечание 4. Отметим, что в предложении 6 при $s_i = 3$, $d_i = 1$, $1 \le i \le t$, достигается равенство $n = 3d$.

Следующее утверждение служит дополнением к доказанному факту.

П р е д л о ж е н и е 7. *Для любых целых чисел n и d, таких что* $1 \le d < n \le 3d$, *существует матрица* $A \in P_n$, *имеющая ранг* $r = n - d$, *все клетки которой содержат не менее двух единиц.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в случае, когда $1 < n \le 2d + 1$, согласно замечанию 3 к свойству 4, существует матрица с требуемыми параметрами, состоящая из одной клетки, которая содержит как минимум 2 единицы.

Покажем, как получить требуемую матрицу для $n > 2d + 1$. Для этого достаточно взять, например, матрицу в квазижордановой форме и состоящую из d клеток; при этом первые $n - 2d$ клеток одинаковы и имеют вид: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, оставшиеся $3d - n$ клеток также одинаковы и имеют вид: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Так как $n \le 3d$, то $3d - n \ge 0$, а из того, что $n > 2d + 1$ следует, что $n - 2d > 1$, т. е. обе эти величины $n - 2d$ и $3d - n$ неотрицательны.

Убедимся, что построенная таким образом матрица обладает всеми необходимыми свойствами. Действительно, данная матрица A содержит $2(3d - n) + 3(n - 2d) = n$ единиц и имеет ранг, равный $(3d - n) + 2(n - 2d) = n - d$.

П р е д л о ж е н и е 8. *Каноническая форма* A' *всякой матрицы* $A \in P_{n'}$ *ранга* $n' - d$, $d \ge 1$, $n' > 3d$, $n - 3d = k \ge 1$, *содержит не менее* k $(1{\times}1)$-*клеток с одной единственной единицей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в условиях сформулированного утверждения матрица A' содержит l клеток с единственным элементом 1, где $l < k$. Отбрасывание этих клеток приводит к канонической форме B' матрицы $B \in P_n$, где $n = n' - l = n' - k + (k - l) = 3d + (k - l) > 3d$. При этом каждая клетка матрицы B' содержит не менее двух единиц. Согласно предложению 5 в этом случае должно иметь место неравенство $n = n' - l \le 3d$. Получено противоречие. Следовательно, $l \ge k$.

Доказательство теоремы. Обозначим через $O\left(P_n^r\right)$ множество всех S_n^2-орбит матриц многообразия P_n, $n > 1$, имеющих ранг $r \ge 1$, точнее, множество однозначно их представляющих матриц A' в квазижордановой канонической форме. $F_{n,r}$ – мощность множества $O\left(P_n^r\right)$. Положим $d = n - r$. Множество $O\left(P_n^{n-d}\right)$ вкладывается в множество $O\left(P_{n+1}^{n+1-d}\right)$ добавлением к каждой матрице $A' \in O\left(P_n^{n-d}\right)$ одной $(1{\times}1)$-клетки с элементом 1. Ясно, что полученная таким образом матрица $B' \in O\left(P_{n+1}^{n+1-d}\right)$. Аналогично для произвольного натурального l строится вложение $\varphi : O\left(P_n^{n-d}\right) \to O\left(P_{n+l}^{n+l-d}\right)$. Такое вложение не является сюръективным для значений $n + i \le 3d$ в силу предложения 7.

Покажем, что рассматриваемое вложение φ является взаимно-однозначным при $n \ge 3d$. Для доказательства достаточно взять $n = 3d$. При таких условиях возьмем произвольную матрицу $B' \in O\left(P_{n+l}^{n+l-d}\right)$. Согласно предложению 6 в этой матрице содержится не менее l $(1{\times}1)$-клеток с единственным элементом 1. Удалим из матрицы B' в точности l таких клеток. Получится матрица $A' \in P_n$, при этом ранг $r(A') = r(B') - l = n + l - d - l = n - d$. Следовательно, $A' \in O\left(P_n^{n-d}\right)$. Несложно убедиться, что таким образом построенное обратное отображение также является инъективным: если B' и $B_1{}'$ – различные представители множества $O\left(P_{n+l}^{n+l-d}\right)$, то и построенные из них удалением l $(1{\times}1)$-клеток с единственным элементом 1 матрицы A' и $A_1{}'$ также будут различными элементами множества $O\left(P_n^{n-d}\right)$. Теорема доказана.

Ниже приведена таблица рассчитанных на компьютере значений $F_{n,r}$ для $d = n - r$ в диапазоне от 0 до 5.

Значения величины $F_{n,r}$ для фиксированных $d = n - r$

	n									
$n - r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		2	3	3	3	3	3	3	3	3
2			2	9	14	15	15	15	15	15
3				3	14	42	63	68	69	69
4					2	25	94	217	309	336
5						4	33	197	610	1187

	n						
$n - r$	11	12	13	14	15	16	17
0	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	3	3	3	3	3
2	15	15	15	15	15	15	15
3	69	69	69	69	69	69	69
4	341	342	342	342	342	342	342
5	1589	1717	1744	1749	1750	1750	1750

Заключение. Доказано, что число орбит кэмероновских матриц порядка n и ранга r при естественном действии группы $S_n \times S_n$ зависит только от $n - r$, если $r \geq 2n/3$. В доказательстве использован аппарат теории графов.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и полезные советы по улучшению представления полученных результатов.

Acknowledgements. The author is grateful to the reviewer for careful reading of the article and useful advice how to better present the results obtained.

Список использованных источников

1. Cameron, P. J. Problems on permutation groups [Electronic resource] / P. J. Cameron. – Mode of access: http://www.matchs.qmul.ac.uk/~pjc/pgprob.html. – Date of access: 15.12.2013.
2. Cameron, P. J. Product action / P. J. Cameron, D. A. Gewurz, F. Merola // Discrete Math. – 2008. –Vol. 308, №. 2/3. – P. 386–394.
3. Конопелько, В. К. Классификация точечных образов и классическая проблема разбиения чисел / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Докл. БГУИР. – 2010. – № 8 (54). – С. 127–131.
4. Липницкий, В. А. Классификация точечных образов. История и современность / В. А. Липницкий, А. И. Сергей, Н. В. Спичекова // Технические средства защиты информации: тез. докл. XI Белорус.-рос. науч.-техн. конф., 5–6 мая 2013 г. Минск. – Минск: БГУИР, 2013. – С. 42.
5. Цветков, В. Ю. Предсказание, распознавание и формирование образов многоракурсных изображений с подвижных объектов / В. Ю. Цветков, В. К. Конопелько, В. А. Липницкий. – Минск: Изд. центр БГУ, 2014. – 224 с.
6. Конопелько, В. К. Формирование и обработка образов в помехоустойчивом кодировании и передаче изображений / В. К. Конопелько, В. Ю. Цветков. – Минск: Бестпринт, 2015. – 247 с.
7. The-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Electronic resource]. – Mode of access: http://oeis.org/. – Date of access: 15.12.2013.
8. Сергей, А. И. Подсчет классов эквивалентности бинарных матриц / А. И. Сергей, В. А. Липницкий // Информационные компьютерные технологии: проектирование, разработка, применение: сб. науч. ст. – Гродно: ГрГУ, 2013. – 378 с.
9. Сергей А. И. Оптимизированный алгоритм генерации представителей классов эквивалентности бинарных матриц / А. И. Сергей, В. А. Липницкий // Управление инновациями: теория, методология, практика: материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. – Новосибирск: Изд-во ЦРНС, 2015. – С. 101–105.

10. Сергей, А. И. Эффективный алгоритм формирования представителей орбит при действии квадрата симметрической группы на (0, 1)-матрицах матриц / А. И. Сергей, В. А. Липницкий // Технические средства защиты информации: тез. докл. XII Белорус.-рос. науч.-техн. конф., 28–29 мая 2014 г., Минск. – Минск: БГУИР, 2014. – С. 37–38.

11. Конопелько, В. К. Действие квадрата симметрической группы на специальном классе (0, 1)-матриц. Отсутствие полных орбит / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Докл. БГУИР. – 2010. – № 5 (51). – С. 40–46.

12. Конопелько, В. К. Общие семейства в орбитальной классификации точечных образов / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Телекоммуникации: сети и технологии, алгебраическое кодирование и безопасность данных: материалы междунар. науч.-техн. семинара. – Минск: БГУИР, 2011. – С. 17–25.

13. Оре, О. Теория графов / О. Оре. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

References

1. Cameron P. J. *Problems on permutation groups*. Available at: http://www.matchs.qmul.ac.uk/~pjc/pgprob.html. (accessed 15 December 2013).

2. Cameron P. J., Gewurz D. A., Merola F. Product action. *Discrete Mathematics*, 2008, vol. 308, no. 2-3, pp. 386–394. Doi: 10.1016/j.disc.2006.11.054

3. Konopel'ko V. K., Lipnitskii V. A., Spichekova N. V. Classification of point patterns and the classical problem of partition of integers. *Doklady BGUIR* [Proceedings of BSUIR], 2010, no. 8 (54), pp. 127–131. (in Russian).

4. Lipnitskii V. A., Sergei A. I., Spichekova N. V. Classification of point patterns. History and modern-state-of-art. *Tekhnicheskie sredstva zashchity informatsii: tezisy dokladov XI Belorussko-rossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Information protection software: Book of Abstracts of XI Belarusian-Russian Scientific and Technical Conference, 5–6 мау 2013, Minsk]. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2013, pp. 42. (in Russian).

5. Tsvetkov V. Yu., Konopel'ko V. K., Lipnitskii V. A. *Prediction, recognition and formation of patterns of many-position images with movable objects.* Minsk, Publishing Center of the Belarusian State University, 2014. 224 p. (in Russian).

6. Konopel'ko V. K., Tsvetkov V. Yu. *Formation and processing of images in anti-jamming coding and image transmission*. Minsk, Bestprint Publ., 2015. 247 p. (in Russian).

7. The-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: http://oeis.org/. (accessed 15 December 2013).

8. Sergei A. I., Lipnitskii V. A. Equivalence class counting of binary matrices. *Informatsionnye komp'yuternye tekhnologii: proektirovanie, razrabotka, primenenie: sbornik nauchnykh statei* [Information computer technologies: designing, development, application: Collection of Scientific Works]. Grodno, Grodno State University, 2013. 378 p. (in Russian).

9. Sergei A. I., Lipnitskii V. A. Optimized generation algorithms of the equivalence class of binary matrices. *Upravlenie innovatsiyami: teoriya, metodologiya, praktika: materialy XII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Innovation control: theory, methodology, experience: Proceedings of XII International Scientific and Practical Conference]. Novosibirsk, Center for the Development of Scientific Cooperation (CRNS), 2015, pp. 101–105. (in Russian).

10. Sergei A. I., Lipnitskii V. A. Effective algorithm of formation of orbit representatives under the action of the symmetric group square based on (0, 1)-matrices of matrices. *Tekhnicheskie sredstva zashchity informatsii: Tezisy dokladov XII Belorussko-rossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Information protection software: Book of Abstracts of the XII Belarusian-Russian Scientific and technical Conference, 28–29 мау 2014, Minsk]. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2014, pp. 37–38. (in Russian).

11. Konopel'ko V. K., Lipnitskii V. A., Spichekova N. V. Action of the square of the symmetric group based on a special class of (0, 1)-matrices. Abasence of complete orbits. *Doklady BGUIR* [Proceedings of BSUIR], 2010, no. 5 (51), pp. 40–46. (in Russian).

12. Konopel'ko V. K., Lipnitskii V. A., Spichekova N. V. General families in the orbit classification of point patterns. *Telekommunikatsii: seti i tekhnologii, algebraicheskoe kodirovanie i bezopasnost' dannykh: materialy mezhdunarodnogo nauchno-tekhnicheskogo seminara* [Proceedings of MHTC "Telecommunications: networks and technologies, algebraic coding and data security"]. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2011, pp. 17–25. (in Russian).

13. Ope O. *Graph theory.* Moscow: Nauka Publ., 1980. 336 p. (in Russian).

Информация об авторах

Липницкий Валерий Антонович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Военная академия Республики Беларусь (пр. Независимости, 220, 220057, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: valipnitski@yandex.by

Сергей Александр Иванович – аспирант, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Э. Ожэшко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: sergej.a.i@mail.ru

Information about the authors

Lipnitski Valery Antonovich – D. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Department of Mathematics, Military Academy of the Republic of Belarus (220, Nezavisimosti Ave., 220057, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valipnitski@yandex.by

Sergey Alexander Ivanovich – Postgraduate, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Azheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: sergej.a.i@mail.ru

Для цитирования

Липницкий, В. А. О стабилизации количества орбит кэмероновских матриц большого ранга / В. А. Липницкий, А. И. Сергей // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 60–70.

For citation

Lipnitski V. A., Sergey A. I. On the stabilization of the number of orbits of high-rank Cameron matrices. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 60–70. (in Russian).