ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 530.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-77-82

Поступила в редакцию 23.01.2018
Received 23.01.2018

А. П. Рябушко[1], И. Т. Неманова[2], Т. А. Жур[2]

[1]Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

ДВИЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ В СРЕДЕ

Аннотация. Выведены в декартовой системе координат в ньютоновской теории тяготения уравнения движения системы из двух тел, движущихся в среде. Система координат барицентрическая, т. е. в ней центр масс двух тел неподвижен. С помощью аппроксимационной процедуры Эйнштейна – Инфельда из полевых уравнений Эйнштейна найдено гравитационное поле, создаваемое системой «два тела – среда», а затем получены уравнения движения тел в этом поле. Показано, что в постньютоновском приближении общей теории относительности центр масс двух тел, движущихся в газопылевой разреженной среде постоянной плотности, определенный по аналогии с ньютоновским центром масс, смещается по циклоиде, хотя в ньютоновском приближении он неподвижен, т. е. движение по циклоиде происходит относительно барицентрической ньютоновской неподвижной системы отсчета. Даны численные оценки для величины этого смещения, которое при популярном значении плотности среды $\rho = 10^{-21}$ г·см$^{-3}$ может достигать порядка 10^6 км за один оборот двух тел вокруг их смещающегося центра масс. В случае равенства масс тел их релятивистский центр масс, как и их ньютоновский центр масс, неподвижен. Выдвинута гипотеза о том, что для любых эллиптических орбит двух тел и неоднородного распределения газопылевой среды качественная картина движения релятивистского центра масс двух тел не изменится.

Ключевые слова: общая теория относительности, пробное тело, уравнения движения, центр масс, постньютоновское приближение

Для цитирования. Рябушко, А. П. Движение релятивистского центра масс системы двух тел в среде / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 77–82. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-77-82

A. P. Ryabushko[1], I. T. Nemanova[2], T. A. Zhur[2]

[1]Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

MOTION OF THE RELATIVISTIC CENTER OF MASS OF THE TWO-BODY SYSTEM IN THE ENVIRONMENT

Abstract. The motion equations for a system of two bodies moving in a medium are derived in the Cartesian coordinate system in the Newtonian theory. The coordinate system is barycentric, that is, the center of mass of the two-body system is immobile. Using the Einstein – Infeld approximation procedure, the gravitational field created by the “two bodies – medium” system was found from the Einstein field equations, and then the equations of motion of the bodies in this field were obtained.

It is shown that in the post-Newtonian approximation of the general theory of relativity, the center of mass of two bodies moving in a gas – dust rarefied medium of constant density, determined by analogy with the Newtonian center of mass, is displaced along the cycloid, although in the Newtonian approximation it is stationary, i.e. the movement along the cycloid occurs with respect to the barycentric Newtonian fixed reference frame. Numerical estimates are given for the magnitude of this displacement. Given a popular value of the medium density $\rho = 10^{-21}$ g·cm^{-3} its order can reach 10^6 km per one rotation of two bodies around their center of mass. In the case of the equality of masses of the bodies, their relativistic center of mass, like their Newtonian center of mass, is immobile.

It has been hypothesized that for any elliptical orbits of two bodies and an inhomogeneous distribution of the gas – dust medium the qualitative picture of motion of the relativistic center of mass of the two bodies will not change.

Keywords: general theory of relativity, test body, equations of motion, center of mass, post-Newtonian approximation
For citation. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. Motion of the relativistic center of mass of the two-body system in the environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 77–82. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-77-82

Введение. Белорусская школа по проблеме релятивистского движения тел в космосе приступила к разработке теории движения тел астрономического типа в среде в 1983 г. В работах [1–4] были решены следующие задачи.

Рассмотрена материальная система: точечное тело массой M и газопылевой шар радиусом R, плотность которого ρ = const и центр совпадает с точечным телом. В постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности (ОТО) с помощью аппроксимационной процедуры Эйнштейна – Инфельда из полевых уравнений Эйнштейна найдена метрика псевдориманова пространства-времени, описывающего гравитационное поле рассматриваемой системы [1].

В [2] были выведены и проинтегрированы уравнения движения (УД) пробного тела в гравитационном поле, полученном в работе [1]. Предсказывается существование новых релятивистских эффектов: обратное смещение периастра (перигелия) и увеличение эксцентриситета орбиты пробного тела в постньютоновском приближении общей теории относительности.

Более сложные задачи решены в исследованиях [3, 4]: в ПНП ОТО при ρ = const получено гравитационное поле газопылевого шара с двумя притягивающими центрами (телами). В этом поле выведены уравнения движения центров и проведено интегрирование этих УД. Рассмотрен также вопрос о влиянии лобового сопротивления среды на движущиеся в ней тела. Сделаны численные оценки всех полученных релятивистских эффектов. Однако не выяснялся закон движения центра масс двух тел в среде в ПНП ОТО. В ньтоновском приближении (НП) общей теории относительности уравнения движения двух тел A и B имеют вид (см. [4, формула (13.1)])

$$\ddot{a}^i = \frac{d^2 a^i}{dt^2} = -\gamma m_b \frac{a^i - b^i}{\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^3} - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^i, \tag{1}$$

$$\ddot{b}^i = \frac{d^2 b^i}{dt^2} = -\gamma m_a \frac{b^i - a^i}{\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^3} - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho b^i, \tag{2}$$

где m_a, m_b – массы тел A и B, координаты которых $a^i, b^i; i = 1,2$, так как движение тел происходит в одной плоскости, в которой введена прямоугольная декартова система координат x^1Ox^2; $\vec{a} = (a^1, a^2)$, $\vec{b} = (b^1, b^2)$ – радиус-векторы тел A и B; t – время; γ – ньютоновская постоянная тяготения; ρ = const – плотность газопылевой среды в шаре, центр которого находится в начале координат O.

Известно (см., напр., [5, § 8; 6]), что в ньтоновском приближении общей теории относительности координаты c^i центра масс (центра инерции) $C(c^1, c^2)$ системы двух тел $A(a^1, a^2)$, $B(b^1, b^2)$ в пустоте определяются формулой

$$c^1 = \frac{m_a a^i + m_b b^i}{m_a + m_b}, \tag{3}$$

из которой для УД (1), (2) при $\rho = 0$ и при $\rho = \text{const} \neq 0$ немедленно следует, что

$$\ddot{c}^i = \frac{m_a \ddot{a}^i + m_b \ddot{b}^i}{m_a + m_b} = 0, \quad \dot{c}^i = 0, \quad c^i = 0, \tag{4}$$

если в пустом пространстве введена барицентрическая система координат, определяемая равенствами

$$m_a a^i + m_b b^i = 0. \tag{5}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что равенства (5) выполняются.

В постньютоновском приближении общей теории относительности центр масс $\tilde{C}(\tilde{c}^1, \tilde{c}^2)$ вводится по формуле, аналогичной формуле (3) ньютоновской теории тяготения (см. [6, (23.46)]):

$$\tilde{c}^i = \frac{\tilde{m}_a \tilde{a}^i + \tilde{m}_b \tilde{b}^i}{\tilde{m}_a + \tilde{m}_b}, \tag{6}$$

где знак «~» (тильда) над буквами означает, что эти величины рассматриваются в ПНП ОТО, в частности, $\tilde{a}^i, \tilde{b}^i$ могут быть решениями системы релятивистских УД:

$$\ddot{\tilde{a}}^i = \frac{d^2\tilde{a}^i}{dt^2} = -\gamma \tilde{m}_b \frac{\tilde{a}^i - \tilde{b}^i}{\left|\tilde{\vec{a}} - \tilde{\vec{b}}\right|^3} - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho\tilde{a}^i + f^i_{a(g)} + f^i_{a(g\rho)}, \tag{7}$$

$$\ddot{\tilde{b}}^i = \frac{d^2\tilde{b}^i}{dt^2} = -\gamma \tilde{m}_a \frac{\tilde{b}^i - \tilde{a}^i}{\left|\tilde{\vec{a}} - \tilde{\vec{b}}\right|^3} - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho\tilde{b}^i + f^i_{b(g)} + f^i_{b(g\rho)}. \tag{8}$$

В (7) и (8) функции $f^i_{a(g)}, f^i_{b(g)}$ являются релятивистскими удельными силовыми добавками, которые найдены с помощью аппроксимационной процедуры Эйнштейна – Инфельда (см. [6, (6.22)]) и не зависят от гравитационного поля газопылевого шара. Структура $f^i_{a(g)}$ следующая:

$$f^i_{a(g)} = \frac{\gamma m_b}{c^2}\left[\left(\dot{a}^s\dot{a}^s + \frac{3}{2}\dot{b}^s\dot{b}^s - 4\dot{a}^s\dot{b}^s - 4\frac{\gamma m_b}{r_{ab}} - 5\frac{\gamma m_a}{r_{ab}}\right)\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^i} + \right.$$

$$\left. + \left(4\dot{a}^s\dot{b}^s - 4\dot{a}^i\dot{a}^s + 3\dot{a}^i\dot{b}^s - 4\dot{b}^i\dot{b}^s\right)\left(\frac{1}{r_{ab}}\right)_{,a^s} + \frac{1}{2}r_{ab},_{a^s a^k a^i}\dot{b}^s\dot{b}^k\right], \tag{9}$$

где c – скорость света в вакууме; точка над буквой означает производную по времени t, а запятая – частную производную по a^i, a^s и третью частную производную по a^s, a^k, a^i соответственно; $r_{ab} = \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(a^s - b^s)(a^s - b^s)}$; индексы s, k, i принимают значения 1, 2, так как движение тел A, B плоское; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Силовая добавка $f^i_{b(g)}$ получается из $f^i_{a(g)}$ с помощью перестановки значков $a \leftrightarrow b$; $f^i_{b(g)}$ назовем аналогом $f^i_{a(g)}$.

Функции $f^i_{a(g\rho)}, f^i_{b(g\rho)}$ в (7), (8) возникают благодаря учету воздействия сил гравитационного поля газопылевого шара на движение тел A и B, но без учета лобового сопротивления газопылевой среды движению этих тел (см. [3, 4]). Имеем:

$$f^i_{a(g\rho)} = \frac{\gamma^2\rho}{c^2}\left[\frac{2}{3}\pi m_b \frac{a^i - b^i}{\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^3}\left(15R^2 + |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right| - 4|\vec{a}|^2\right) + \frac{2}{3}\pi m_b \frac{8a^i - 7b^i}{\left|\vec{a} - \vec{b}\right|} + \right.$$

$$\left. + 5m_a I^i_{a0} - m_a I^i_{a1} - m_b I^i_{a2} + 5m_b I^i_{a3}\right], \tag{10}$$

где интегралы I^i_{av} $(v = 0,1,2,3)$ вычисляются по объему V_R газопылевого шара, и выражения для этих интегралов следующие (см. [3, 4]):

$$I^i_{a0} = \int\limits_{V_R} \frac{x^{i\prime} - a^i}{\left|\vec{r}\,' - \vec{a}\right|^4} dV', \quad I^i_{a1} = \sum_{l=1}^{3}\int\limits_{V_R} \frac{x^{i\prime} - a^i}{\left|\vec{R}'_l - \vec{a}\right|\cdot\left|\vec{r}\,' - \vec{a}\right|^3} dV',$$

$$I^i_{a2} = \sum_{l=1}^{3}\int\limits_{V_R} \frac{x^{i\prime} - a^i}{\left|\vec{R}'_l - \vec{b}\right|\cdot\left|\vec{r}\,' - \vec{a}\right|^3} dV', \quad I^i_{a3} = \int\limits_{V_R} \frac{x^{i\prime} - a^i}{\left|\vec{r}\,' - \vec{a}\right|^3\left|\vec{r}\,' - \vec{b}\right|} dV'. \tag{11}$$

В (11) $\vec{r}'$ – радиус-вектор точки $M'(x^{i'})$, принадлежащей газопылевому шару, который занимает область V_R; векторы $\vec{R}_l'$ имеют координаты: $\vec{R}_1' = \left(\pm\sqrt{R^2-(x^{2'})^2-(x^{3'})^2}, x^{2'}, x^{3'}\right)$, $\vec{R}_2' = \left(x^{1'}, \pm\sqrt{R^2-(x^{1'})^2-(x^{3'})^2}, x^{3'}\right)$, $\vec{R}_3' = \left(x^{1'}, x^{2'}, \pm\sqrt{R^2-(x^{1'})^2-(x^{2'})^2}\right)$. Поэтому концы векторов $\vec{R}_l'$ всегда определяют точки на двух половинах сферы $x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=R^2$, ограничивающей газопылевой шар, которые находятся на концах перпендикуляров к соответствующим координатным плоскостям x^2Ox^3, x^1Ox^3, x^1Ox^2.

Силовую добавку $f^i_{b(g\rho)}$ из (8) получаем путем замены значков $a \leftrightarrow b$ в (10), (11) и ее называем аналогом $f^i_{a(g\rho)}$.

Отметим, что при выводе силовых добавок $f^i_{a(g\rho)}$ и $f^i_{b(g\rho)}$ была использована не только аппроксимационная процедура Эйнштейна – Инфельда, когда величины разлагались в ряды по малому параметру $\lambda \sim v/c$, но еще осуществлялось и разложение по малому параметру ρ с учетом его только в первой степени.

Система уравнения движения (7), (8) проинтегрирована, найдены траектории движения тел A и B, эффекты роста эксцентриситетов орбит, эффекты обратного смещения перицентров орбит и другие деформации орбит (см. [4, § 13]). Но движение центра масс материальной системы из газопылевого шара и двух тел A и B в постньютоновском приближении общей теории относительности не исследовалось

Постановка задачи и ее решение. Будет решаться следующая

З а д а ч а. Для описанной во «Введении» материальной системы в ПНП ОТО найти в соответствии с (6) координаты центра масс $\tilde{C}^i$. Отметим, что сформулированная задача, насколько известно авторам, решается впервые.

Р е ш е н и е. В ньтоновском приближении общей теории относительности задача уже решена соотношениями (1)–(5). Для решения задачи в ПНП ОТО еще нужны $\tilde{m}_a$ и $\tilde{m}_b$, входящие в (6), которые найдены в [3]:

$$\tilde{m}_a = m_a + \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}m_a\dot{a}^s\dot{a}^s + \frac{\gamma m_a m_b}{r_{ab}} - 2\pi\gamma\rho m_a\left(\frac{1}{3}|\vec{a}|^2 - R^2\right)\right]. \quad (12)$$

Выражение для $\tilde{m}_b$ получаем из (12) заменой значков $a \leftrightarrow b$; $\tilde{m}_b$ назовем аналогом $\tilde{m}_a$.

Рассмотрим случай *круговых* движений тел A и B *внутри* газопылевого шара. Тогда величины $|\vec{a}|, |\vec{b}|, v_a^2 = \dot{a}^s\dot{a}^s$, $v_b^2 = \dot{b}^s\dot{b}^s$, $r_{ab} = |\vec{a}-\vec{b}| = r_0$, $\tilde{m}_a$, $\tilde{m}_b$ *постоянны*, что упрощает решение задачи, в частности сразу позволяет составить в соответствии с (6) систему УД для центра масс:

$$\ddot{\tilde{c}}^i = \frac{\tilde{m}_a\ddot{\tilde{a}}^i + \tilde{m}_b\ddot{\tilde{b}}^i}{\tilde{m}_a + \tilde{m}_b}. \quad (13)$$

Подставив в (13) значения $\ddot{\tilde{a}}^i, \ddot{\tilde{b}}^i$ из (7), (8), $\tilde{m}_a$ из (12) и аналог $\tilde{m}_b$, $f^i_{a(g)}$, $f^i_{a(g\rho)}$ из (9), (10), (11) и их аналоги $f^i_{b(g)}$, $f^i_{b(g\rho)}$, находим систему УД центра масс $\tilde{C}$:

$$\ddot{\tilde{c}}^i = \frac{\gamma^2\rho}{c^2(m_a+m_b)}\left[\frac{2\pi m_a m_b}{3r_0^2}\left(5|\vec{a}|b^i + 5|\vec{b}|a^i - 3|\vec{a}|a^i - 3|\vec{b}|b^i\right) + 5\left(m_a^2 I^i_{a0} + m_b^2 I^i_{b0}\right) - \right.$$
$$\left. -\left(m_a^2 I^i_{a1} + m_b^2 I^i_{b1}\right) - m_a m_b\left(I^i_{a2} + I^i_{b2}\right) + 5m_a m_b\left(I^i_{a3} + I^3_{b3}\right)\right]. \quad (14)$$

Вычислив или осреднив входящие в систему (14) интегралы I^i_{av}, I^i_{bv} (некоторые из них вычислены в [4]) и помня, что рассматривается случай круговых движений ($|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ – не равные нулю постоянные величины), после достаточно длинных и утомительных вычислений находим решение задачи Коши для системы (14) при начальных условиях $\tilde{c}^i(0)=0, \dot{\tilde{c}}^i(0)=0$:

$$\tilde{c}^1 = \frac{\pi\gamma^2\rho N}{c^2(m_a+m_b)\omega_0^2}(1-\cos\phi), \quad \tilde{c}^2 = \frac{\pi\gamma^2\rho N}{c^2(m_a+m_b)\omega_0^2}(\phi-\sin\phi), \quad \phi=\omega_0 t, \tag{15}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma(m_a+m_b)}{r_0^3}}$ является угловой скоростью обращения тел A и B по круговой орбите в ньтоновском приближении общей теории относительности. Величина $N = \mathrm{const}$ и определяется выражением

$$N = m_a^2\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2R}{|\vec{a}|}+\frac{R^2+|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2}\ln\frac{R-|\vec{a}|}{R+|\vec{a}|}\right)+\frac{4R^3}{(R+|\vec{a}|)^3}\right]-m_b^2\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2R}{|\vec{b}|}+\frac{R^2+|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2}\ln\frac{R-|\vec{b}|}{R+|\vec{b}|}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4R^3}{(R+|\vec{b}|)^3}\right]+2m_am_b(|\vec{a}|-|\vec{b}|)\left(\frac{4R^3}{3|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}-\frac{1}{r_0}\right). \tag{16}$$

Обсуждение результатов, численные оценки. Согласно уравнениям (15) центр масс $\tilde{C}$ движется по циклоиде с базой на положительной части координатной оси Ox^2, если $N > 0$, и на отрицательной части, если $N < 0$. В случае $m_a = m_b$ имеем $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $N = 0$, т. е. центр масс покоится в начале координат. Если начальные условия расположения тел A и B изменить, то ориентация циклоиды также изменится.

Рассмотрим систему двух тел A и B, близких по своим характеристикам к системе Солнце – Юпитер. Принимаем: $m_a = 2\cdot10^{33}$ г, $m_b = 2\cdot10^{30}$ г, $|\vec{a}| = 7{,}78\cdot10^{10}$ см, $|\vec{b}| = 7{,}78\cdot10^{13}$ см; движения тел – круговые; плотность газопылевого шара $\rho = (10^{-18} \div 0^{-22})$ г $\cdot$ см$^{-3}$; его радиус $R = (10^{18} \div 10^{20})$ см. Скорость света $c = 3\cdot10^{10}$ см$\cdot$с$^{-1}$, ньютоновская постоянная тяготения $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-8}$ см$^3\cdot$г$^{-1}\cdot$с$^{-2}$. Расстояние между телами A и B $r_0 = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Для наблюдаемых планетарных туманностей, в частности Солнечной системы, наиболее популярными являются следующие значения плотности $\rho = 10^{-21}$ г$\cdot$см$^{-3}$ и радиуса $R = 10^{18}$ см (см. [7, с. 61–80; 8–10]). Тогда при указанных значениях величин имеем параметрические уравнения циклоиды

$$\tilde{c}^1 = -6{,}316\cdot10^{10}(1-\cos\phi), \quad \tilde{c}^2 = -6{,}316\cdot10^{10}(\phi-\sin\phi). \tag{17}$$

За один оборот системы тел A–B, т. е. при изменении ϕ от 0 до 2π, что соответствует во времени примерно 12 годам, ее центр масс переместится по циклоиде (17) из начала координат в точку $\tilde{C}_1(0,-4\cdot10^{11})$, что должно вызвать «опускание» системы тел A–B на расстояние $4\cdot10^{11}$ см.

Чтобы судить о законах движения тел A и B, нужно еще (кроме обсуждаемого здесь воздействия гравитационного поля газопылевого шара на движение тел) оценить релятивистские поправки в постньютоновском приближении общей теории относительности, которые найдены в [6, § 30]. Эти поправки Δa^i, Δb^i к ньютоновским координатам тел a^i, b^i при выполнении начальных условий (при $t = 0$ (или $\phi = 0$) и их производные по времени (или по ϕ) равны нулю) имеют вид

$$\Delta a^1 = \frac{\gamma m_b[3,5]}{c^2(m_a+m_b)^2}(\cos\omega_0 t-1), \quad \Delta a^2 = \frac{2\gamma m_b[3,5]}{c^2(m_a+m_b)^2}(\omega_0 t-\sin\omega_0 t), \tag{18}$$

$$\Delta b^1 = -\frac{\gamma m_a[3,5]}{c^2(m_a+m_b)^2}(\cos\omega_0 t-1), \quad \Delta b^2 = -\frac{2\gamma m_a[3,5]}{c^2(m_a+m_b)^2}(\omega_0 t-\sin\omega_0 t), \tag{19}$$

где $[3,5] = 3m_a^2+5m_am_b+3m_b^2$. Для рассматриваемой системы тел A и B легко находим численные оценки коэффициентов в (18), (19) и оценки $|\Delta a^i|, |\Delta b^i|$ за один оборот, которые находятся в интервале от $5\cdot10^2$ до $7\cdot10^6$ см, т. е. максимальная релятивистская поправка на 4–5 порядков меньше смещения центра масс согласно (17): за один оборот $|\tilde{c}^2| \approx 4\cdot10^{11}$см.

Величина смещения центра масс системы двух тел в газопылевом шаре может оказаться на несколько порядков меньше, если распределение газопылевой среды в шаре будет *неоднородным* и величина плотности ρ будет убывать к его периферии.

Исследование по выяснению подобной ситуации авторы предполагают представить в следующей работе.

Список использованных источников

1. Рябушко, А. П. Гравитационное поле притягивающего центра, окруженного пылевидным облаком, в постньютоновском приближении общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1983. – Т. 27, № 10. – С. 889–892.

2. Рябушко, А. П. Релятивистские эффекты движения пробных тел в газопылевом шаре с притягивающим центром / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1984. – Т. 28, № 9. – С. 806–809.

3. Рябушко, А. П. Гравитационное поле газопылевого шара с двумя притягивающими центрами в общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1987. – Т. 31, № 6. – С. 519–522.

4. Неманова, И. Т. Релятивистское движение тел в среде / И. Т. Неманова: дисс. … канд. физ.-мат. наук / И. Т. Неманова; Белорус. гос. ун-т. – Минск, 1987. – 152 л.

5. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М.: Наука, 1965. – 316 с.

6. Рябушко, А. П. Движение тел в общей теории относительности / А. П. Рябушко. – Минск: Высш. шк., 1979. – 240 с.

7. Радзиевский, В. В. Солнечная система / В. В. Радзиевский // Физика космоса: маленькая энцикл. – М.: Сов. энцикл. 1976.

8. Мартынов, Д. Я. Курс общей астрофизики / Д. Я. Мартынов. – М.: Наука, 1988. – 640 с.

9. Ипатов, С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе / С. И. Ипатов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 318 с.

10. Nieto, M. M. Directly measured limit on the interplanetary matter density from Pioneer 10 and 11 / M. M. Nieto, S. G. Turysher, J. D. Anderson // Phys. Lett. B. – 2005. – Vol. 613, № 1/2. – P. 11–19. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.03.035

References

1. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The gravitational field of the attracting center surrounded by a dust cloud, in the post-Newtonian approximation of the general theory of relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR,* 1983, vol. 27, no. 10, pp. 889–892 (in Russian).

2. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. Relativistic effects of motion of test bodies in a gas-dust ball with an attractive center. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR,* 1984, vol. 28, no. 9, pp. 806–809 (in Russian).

3. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The gravitational field of a gas-dust ball with two attractive centers in the general theory of relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR,* 1987, vol. 31, no. 6, pp. 519–522 (in Russian).

4. Nemanova I. T. *Relativistic Motion of Bodies in a Medium*. Minsk, Belarusian State University, 1987. 152 p. (in Russian).

5. Landau L. D., Lifshic E. M. *Mechanics.* Moscow, Nauka Publ., 1965. 316 p. (in Russian).

6. Ryabushko A. P. *The Motion of Bodies in the General Theory of Relativity.* Minsk, Vysshaya shkola Publ., 1979. 240 p. (in Russian).

7. Radzievski V. V. Solar system. *Space Physics: A Little Encyclopedia*. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1976. (in Russian).

8. Martinov D. Y. *General Astrophysics Course.* Moscow, Nauka Publ., 1988. 640 p. (in Russian).

9. Ipatov S. I. *Migration of Celestial Bodies in the Solar System*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2000. 318 p. (in Russian).

10. Nieto M. M., Turysher S. G., Anderson J. D. Directly measured limit on the interplanetary matter density from Pioneer 10 and 11. *Physics Letters B*, 2005, vol. 613, no. 1–2, pp.11–19. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.03.035

Информация об авторах

Рябушко Антон Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220141, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Неманова Инна Тимофеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Жур Татьяна Антоновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики факультета предпринимательства и управления, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Information about the authors

Anton P. Ryabushko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Inna T. Nemanova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Tatyana A. Zhur – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Entrepreneurship and Management, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru