ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 2 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

МАТЭМАТЫКА

УДК 519.6

П. И. СОБОЛЕВСКИЙ[1], *Н. А. ЛИХОДЕД*[2], *П. А. МАНДРИК*[2]

МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГЛОБАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

[1]*Институт математики НАН Беларуси*
[2]*Белорусский государственный университет*

(Поступила в редакцию 28.11.2013)

Введение. При построении алгоритмов для реализации на параллельных компьютерах с распределенной памятью, на многоядерных персональных компьютерах и графических ускорителях часто используется тайлинг [1–4], т. е. разбиение множества операций на множества, называемые зернами вычислений или тайлами. Операции одного тайла выполняются атомарно, как одна единица вычислений; применение тайлинга позволяет значительно снизить накладные расходы на коммуникационные операции и использование иерархической памяти.

В работе [5] предложен метод построения функций глобальных зависимостей, которые позволяют получать информационные зависимости между тайлами. Сведения о зависимостях глобального уровня можно использовать для нахождения коммуникационных операций зернистых вычислений и распараллеливания алгоритмов на уровне тайлов. Области определения функций глобальных зависимостей были получены методом окаймления, допускающим избыточность областей.

В этой статье разработан метод уточнения этих границ. Точное представление границ позволяет избегать избыточных вычислений при выполнении коммуникационных операций и дает больше возможностей для распараллеливания зернистых алгоритмов.

Функции глобальных зависимостей. Получение областей определения функций методом окаймления. Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения о тайлинге и об информационной структуре зернистых алгоритмов.

Будем считать, что алгоритм задан последовательной программой, основную вычислительную часть которой составляют циклы произвольной структуры вложенности; границы изменения параметров циклов задаются неоднородными формами, линейными по совокупности параметров циклов и внешних переменных. Пусть в гнезде циклов имеется K выполняемых операторов S_β, объединенных в Θ наборах выполняемых операторов. Область изменения параметров циклов для оператора S_β и размерность этой области обозначим соответственно V_β и n_β. Под набором операторов будем понимать один или несколько операторов, окруженных одним и тем же множеством циклов. Обозначим: $V^{\vartheta}, 1 \le \vartheta \le \Theta$, – области изменения параметров циклов, окружающих наборы операторов; n^{ϑ} – размерность области V^{ϑ} (число циклов, окружающих ϑ-й набор операторов).

Выполнение оператора S_β при конкретных значениях β и вектора параметров цикла J будем называть операцией и обозначать $S_\beta(J)$. Зависимости (информационные связи) между операциями можно задать функциями [6] $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$, $J \in V_{\alpha,\beta}$. Функция зависимостей $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$ позволяет для операции $S_\beta(J)$ найти операцию $S_\alpha(I)$, от которой $S_\beta(J)$ зависит.

Тайлинг – это преобразование алгоритма для получения макроопераций, называемых также зернами вычислений или тайлами. При тайлинге каждый цикл разбивается на два цикла: глобальный, параметр которого определяет на данном уровне вложенности порядок вычисления тайлов, и локальный, в котором параметр исходного цикла изменяется в границах одного тайла. Допускается вырожденное разбиение цикла, при котором все итерации относятся или к глобальному, или к локальному циклам.

Следующие величины и множества используются для формализации тайлинга:

$m_\zeta^\vartheta = \min j_\zeta$, $M_\zeta^\vartheta = \max j_\zeta$ – предельные значения изменения параметра цикла уровня вложенности ζ для ϑ-го набора операторов; если два набора операторов имеют общий цикл с параметром j_ζ, то $m_\zeta^{\vartheta_1} = m_\zeta^{\vartheta_2}$, $M_\zeta^{\vartheta_1} = M_\zeta^{\vartheta_2}$;

$r_1^\vartheta, \ldots, r_{n^\vartheta}^\vartheta$ – заданные натуральные числа, определяющие размеры тайла; r_ζ^ϑ обозначает число значений параметра j_ζ, приходящихся на один тайл ϑ-го набора операторов; r_ζ^ϑ может принимать фиксированное значение в пределах от 1 до $r_\zeta^{\vartheta,\max}$ включительно, где $r_\zeta^{\vartheta,\max} = M_\zeta^\vartheta - m_\zeta^\vartheta + 1$; если два набора операторов имеют общий цикл с параметром j_ζ, то $r_\zeta^{\vartheta_1} = r_\zeta^{\vartheta_2}$;

$R^\vartheta = \operatorname{diag}\left(r_1^\vartheta, \ldots, r_{n^\vartheta}^\vartheta\right)$ – диагональная матрица; $\overline{R}^\vartheta = \left(r_1^\vartheta, \ldots, r_{n^\vartheta}^\vartheta\right)$ – вектор;

$Q_\zeta^\vartheta = \left\lceil (M_\zeta^\vartheta - m_\zeta^\vartheta + 1) / r_\zeta^\vartheta \right\rceil, 1 \le \zeta \le n^\vartheta,$ – число частей, на которые разбивается область значений параметра j_ζ цикла, окружающего ϑ-й набор операторов;

$V^{\vartheta,gl} = \left\{ J^{gl}(j_1^{gl}, \ldots, j_{n^\vartheta}^{gl}) \mid 0 \le j_\zeta^{gl} \le Q_\zeta^\vartheta - 1,\ 1 \le \zeta \le n^\vartheta \right\}$ – области изменения параметров глобальных, т. е. уровня тайлов, циклов;

$V_{J^{gl}}^\vartheta = \left\{ J(j_1, \ldots, j_{n^\vartheta}) \in V^\vartheta \mid m_\zeta^\vartheta + j_\zeta^{gl} r_\zeta^\vartheta \le j_\zeta \le m_\zeta^\vartheta - 1 + (j_\zeta^{gl} + 1) r_\zeta^\vartheta,\ \ 1 \le \zeta \le n^\vartheta \right\}$, $J^{gl}(j_1^{gl}, \ldots, j_{n^\vartheta}^{gl}) \in V^{\vartheta,gl}$, – области изменения параметров локальных (уровня операций тайлов) циклов при фиксированных значениях параметров глобальных циклов.

В работе [5] по заданным функциям, определяющим зависимости на уровне операций, построены функции глобальных зависимостей $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}^{gl}$, найдены их области определения. Области определения функций $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}^{gl}$ получены методом окаймления, допускающим избыточность этих областей:

$$V_{\alpha,\beta}^{gl,0} = \left\{ J^{gl}(j_1^{gl}, \ldots, j_{n^\vartheta}^{gl}) \in Z^{n^\vartheta} \mid q^{gl,0} \le j^{gl} \le Q^{gl,0} \right\},$$

где $q^{gl,0} = \left\lfloor \left(R^\vartheta\right)^{-1} \left(m^{\alpha,\beta} - m^\vartheta\right) \right\rfloor$, $Q^{gl,0} = \left\lfloor \left(R^\vartheta\right)^{-1} \left(M^{\alpha,\beta} - m^\vartheta\right) \right\rfloor$, $m^{\alpha,\beta} = \min\limits_{J \in V_{\alpha,\beta}} J$, $M^{\alpha,\beta} = \max\limits_{J \in V_{\alpha,\beta}} J$. Здесь и далее минимальные (максимальные) значения векторов понимаются как векторы, составленные из минимальных (максимальных) значений соответствующих координат векторов. Пусть $V_{\alpha,\beta}^{gl}$ является точно вычисленной областью определения функции $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}^{gl}$. Имеет место включение $V_{\alpha,\beta}^{gl,0} \supseteq V_{\alpha,\beta}^{gl}$.

Обоснование необходимости уточнения границ областей определения функций глобальных зависимостей при распараллеливании алгоритмов. Математическим аппаратом для распараллеливания и других преобразований алгоритмов являются так называемые таймирующие функции (scheduling functions – в англоязычной литературе; развертки графа алгоритма – в терминологии монографии [6]). Пусть V – некоторая n-мерная область изменения параметров локальных или глобальных циклов. Функция $t\colon V \to Z$ называется таймирующей, если $t(J) \ge t(I)$ для любых итераций J, I таких, что результат вычислений на итерации I требуется для вычислений на итерации J. Наличие нескольких таймирующих функций уровня тайлов требуется для указания в явном виде одновременно выполняемых макроопераций алгоритма. Основанные на таком подходе методы распараллеливания алгоритмов для реализации на многоядерных процессорах и на графических ускорителях предложены, в частности, в работах [3, 4].

Таймирующая функции вида $t(J) = \tau J + a,\ \tau \in Z^n,\ a \in Z$, называется координатной таймирующей функцией, если $a = 0$ и вектор τ содержит ровно одну отличную от нуля компоненту. Можно гарантировать наличие стольких координатных таймирующих функций, сколько координат векторов, характеризующих глобальные зависимости, оказываются неотрицательными. Это непосредственно вытекает из приведенных определений. Действительно, если ζ-я компонента вектора τ равна 1, остальные компоненты равны 0, компонента с номером ζ вектора $J - I$ зависимостей неотрицательна, то $t(J) - t(I) = t(j_1,..., j_n) - t(i_1,...,i_n) = j_\zeta - i_\zeta \geq 0$.

Чем точнее будут найдены области определения функций глобальных зависимостей, тем потенциально больше можно получить таймирующих функций. Приведем иллюстрационный пример.

Рассмотрим алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с левой треугольной матрицей порядка n и единичными диагональными элементами:

```
S1: x(1) = b(1)
do i = 2, n
    S2: x(i) = b(i)
    do j = 1, i – 1
        S3: x(i) = x(i) – a(i, j)x(j)
    enddo
enddo
```

Одна из функций [6, с. 381], определяющих зависимости на уровне операций, имеет вид

$$\overline{\Phi}_{3,3}(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (j, j-1), \quad (i,j) \in V_{3,3} = \left\{(i,j) \in Z^2 \middle| 3 \leq i \leq n, \quad 2 \leq j \leq i-1\right\}.$$

Соответствующая функция глобальных зависимостей имеет вид

$$\overline{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1^{gl} \\ j_2^{gl} \end{pmatrix} - \varphi^{gl},\ V_{3,3}^{gl,0} = \left\{(j_1^{gl}, j_2^{gl}) \in Z^2 \middle| \ 0 \leq j_1^{gl} \leq \left\lfloor \frac{n-2}{r_1} \right\rfloor,\ 0 \leq j_2^{gl} \leq \left\lfloor \frac{n-2}{r_2} \right\rfloor \right\},$$

где $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \varphi^{gl} \leq \begin{pmatrix} \rho \\ 1 \end{pmatrix}$; ρ – натуральное число такое, что $r_2 = \rho \cdot r_1$. Мы рассматриваем только эту функцию глобальных зависимостей, так как другие не создают проблем для получения координатных таймирующих функций.

Функция $\overline{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl})$ задает информационную связь между операциями, выполняемыми на итерациях $(\rho j_2^{gl}, j_2^{gl}) - \varphi^{gl}$ и (j_1^{gl}, j_2^{gl}): по определению функции зависимостей, данные, вычисленные на итерации $\overline{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl})$, являются аргументами для вычислений на итерации (j_1^{gl}, j_2^{gl}). Векторы, задающие глобальные зависимости, имеют вид

$$(j_1^{gl}, j_2^{gl}) - \overline{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = (j_1^{gl}, j_2^{gl}) - ((\rho j_2^{gl}, j_2^{gl}) - \varphi^{gl}) = (j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}, 0) + \varphi^{gl}.$$

Вторая координата вектора $(j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}, 0) + \varphi^{gl}$ всегда неотрицательна, поэтому функция $t(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = j_2^{gl}$ является координатной таймирующей функцией.

Если область определения функции глобальных зависимостей $\overline{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl})$ найдена методом окаймления, то $0 \leq j_1^{gl} \leq \left\lfloor \frac{n-2}{r_1} \right\rfloor$, $0 \leq j_2^{gl} \leq \left\lfloor \frac{n-2}{r_2} \right\rfloor$. Первая координата вектора $(j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}, 0) + \varphi^{gl}$ может быть как положительной, так и отрицательной, поэтому функция $t(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = j_1^{gl}$ не является таймирующей. Более того, используя определение таймирующих функций можно показать, что для произвольного (не фиксированного) n второй (не обязательно координатной) таймирующей функции не существует. Причина в том, что величина $j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}$ может принимать произвольно большие как положительные, так и отрицательные значения.

Если область определения функции $\overline{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl})$ найдена предлагаемым в этой работе методом (об этом см. в следующем разделе), то $-r_1 + 2 \le r_1 j_1^{gl} \le n-2, -r_2 + 2 \le r_2 j_2^{gl} \le \min\left(n-2, r_1 - 1 + r_1 j_1^{gl}\right)$, первая координата вектора $(j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}, 0) + \varphi^{gl} = (r_1 j_1^{gl} - r_2 j_2^{gl}, 0)/r_1 + \varphi^{gl}$ неотрицательна и функция $t(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = j_1^{gl}$ является таймирующей. Действительно, из неравенства $-r_2 + 2 \le r_2 j_2^{gl} \le \min\left(n-2, r_1 - 1 + r_1 j_1^{gl}\right)$ следует $r_2 j_2^{gl} - r_1 j_1^{gl} \le \min\left(n - 2 - r_1 j_1^{gl}, r_1 - 1\right)$, а из неравенств $-r_1 + 2 \le r_1 j_1^{gl} \le n-2$, $n \ge 3$ следует $0 \le n - 2 - r_1 j_1^{gl} \le r_1 - 1 + n - 3$. В результате справедлива оценка $r_2 j_2^{gl} - r_1 j_1^{gl} \le \min\left(n - 2 - r_1 j_1^{gl}, r_1 - 1\right) \le r_1 - 1$. В силу целочисленности вектора $\left(j_2^{gl}, j_1^{gl}\right)$ и того, что $r_2 / r_1 = \rho$ – натуральное число, имеем $\rho j_2^{gl} - j_1^{gl} \le 0$. Таким образом, имеются две таймирующие функции и можно применять известные методы распараллеливания алгоритмов для реализации на многоядерных процессорах и графических ускорителях.

Уточнение областей определения функций. Будем предполагать (не ограничивая случаев, возникающих на практике), что область определения функции зависимостей $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$ можно задать в виде

$$V_{\alpha,\beta} = \left\{J \in Z^{n^{\vartheta}} \mid m^{(-p)} \le H^{(-p)} J,\ 1 \le p \le P,\ \ H^{(+q)} J \le M^{(+q)},\ 1 \le q \le Q\right\}, \tag{1}$$

где $H^{(-p)}$ и $H^{(+q)}$ – некоторые нижние треугольные матрицы (порядка n^{ϑ}) с единицами на главной диагонали; $m^{(-p)}$ и $M^{(+q)}$ – некоторые n^{ϑ}-мерные векторы. Далее $H_{+}^{(-p)}$ – матрица, получаемая из матрицы $H^{(-p)}$ обнулением всех ее отрицательных элементов; $H_{-}^{(+q)}$ – матрица, получаемая из матрицы $H^{(+q)}$ обнулением всех ее положительных элементов.

Введем в рассмотрение множество

$$V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1} = \left\{J^{gl}(j_1^{gl}, \ldots, j_{n^{\vartheta}}^{gl}) \in Z^{n^{\vartheta}} \mid q^{gl,0,1} \le J^{gl} \le Q^{gl,0,1}\right\},$$

где $q^{gl,0,1} = \left(R^{\vartheta}\right)^{-1}\left(\max\left(m^{\alpha,\beta} - m^{\vartheta} - \overline{R}^{\vartheta} + \overline{1}, \max\limits_{1 \le p \le P}\left(m^{(-p)} - H^{(-p)} m^{\vartheta} - H_{+}^{(-p)}\left(\overline{R}^{\vartheta} - \overline{1}\right) - \left(H^{(-p)} - E\right) R^{\vartheta} J^{gl}\right)\right)\right)$,

$Q^{gl,0,1} = \left(R^{\vartheta}\right)^{-1}\left(\min\left(M^{\alpha,\beta} - m^{\vartheta}, \min\limits_{1 \le q \le Q}\left(M^{(+q)} - H^{(+q)} m^{\vartheta} - H_{-}^{(+q)}\left(\overline{R}^{\vartheta} - \overline{1}\right) - \left(H^{(+q)} - E\right) R^{\vartheta} J^{gl}\right)\right)\right)$.

Матрицы $H^{(-p)} - E$ и $H^{(-q)} - E$ являются нижними треугольными, поэтому область изменения любой из координат j_k^{gl}, $k = 1, 2, \ldots, n^{\vartheta}$, может зависеть только от координат $j_1^{gl}, \ldots, j_{k-1}^{gl}$ с меньшими номерами.

Отметим, что величины $m^{(-p)}$, $M^{(+q)}$, $H^{(-p)}$, $H^{(+q)}$, $q^{gl,0,1}$, $Q^{gl,0,1}$ зависят от α и β, величины $q^{gl,0,1}$, $Q^{gl,0,1}$ – также от J^{gl}. Чтобы избежать громоздких обозначений, в явном виде эти зависимости указывать не будем.

Пусть $V'_{\alpha,\beta,J^{gl}}$ – множество таких $J' \in V_{\alpha,\beta}$, что справедливы неравенства

$$\max\left(m^{\alpha,\beta}, \max\limits_{1 \le p \le P}\left(m^{(-p)} - \left(H_{+}^{(-p)} - E\right)\left(\overline{R}^{\vartheta} - \overline{1}\right) - \left(H^{(-p)} - E\right)\left(m^{\vartheta} + R^{\vartheta} J^{gl}\right)\right)\right) \ge$$
$$\ge \max\limits_{1 \le p \le P}\left(m^{(-p)} - \left(H^{(-p)} - E\right) J'\right), \tag{2}$$

$$\min\left(M^{\alpha,\beta}, \min_{1\le q\le Q}\left(M^{(+q)} - H_{-}^{(+q)}\left(\bar{R}^{\vartheta} - \bar{1}\right) - \left(H^{(+q)} - E\right)\left(m^{\vartheta} + R^{\vartheta} J^{gl}\right)\right)\right) \le$$
$$\le \min_{1\le q\le Q}\left(M^{(+q)} - \left(H^{(+q)} - E\right)J'\right). \qquad (3)$$

Если $P = 1$ и $H^{(-1)} = E$, то $m^{(-1)} = m^{\alpha,\beta}$, $H_{+}^{(-1)} - E = 0$ и неравенство (2) выполняется (становится равенством). Если $Q = 1$ и $H^{(+1)} = E$, то $M^{(+1)} = M^{(\alpha,\beta)}$, $H_{-}^{(+1)} = 0$ и равенством становится неравенство (3).

Т е о р е м а. *Пусть множество* $V_{\alpha,\beta}$ *имеет вид* (1). *Если при фиксированных значениях элементов матрицы* R^{ϑ} *выполняется неравенство*

$$V'_{\alpha,\beta,J^{gl}} \ne \varnothing \text{ для любого } J^{gl} \in V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1}, \qquad (4)$$

то $V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1} = V_{\alpha,\beta}^{gl}$. *Если условие* (4) *не выполняется, то* $V_{\alpha,\beta}^{gl,0} \supseteq V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1} \supseteq V_{\alpha,\beta}^{gl}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $V = V_{\alpha,\beta}$, $R = R^{\vartheta}$, $\bar{R} = \bar{R}^{\vartheta}$, $J^{\bar{0}} = m^{\vartheta}$.

Рассмотрим множество

$$V^{gl,1} = \left\{J^{gl} \in Z^n \mid q^{gl,1} \le J^{gl} \le Q^{gl,1}\right\},$$

где

$$Rq^{gl,1} = \max_{1\le p\le P}\left(m^{(-p)} - H^{(-p)}J^{\bar{0}} - H_{+}^{(-p)}\left(\bar{R} - \bar{1}\right) - \left(H^{(-p)} - E\right)RJ^{gl}\right),$$
$$RQ^{gl,1} = \min_{1\le q\le Q}\left(M^{(+q)} - H^{(+q)}J^{\bar{0}} - H_{-}^{(+q)}\left(\bar{R} - \bar{1}\right) - \left(H^{(+q)} - E\right)RJ^{gl}\right).$$

Если для любого $J^{gl} \in V^{gl,1}$ существует точка $J' \in V$ такая, что

$$\max_{1\le p\le P}\left(m^{(-p)} - H^{(-p)}J^{\bar{0}} - H_{+}^{(-p)}\left(\bar{R} - \bar{1}\right) - \left(H^{(-p)} - E\right)RJ^{gl}\right) \ge$$
$$\ge \max_{1\le p\le P}\left(m^{(-p)} - \left(H^{(-p)} - E\right)J'\right) - J^{\bar{0}} - \bar{R} + \bar{1},$$
$$\min_{1\le q\le Q}\left(M^{(+q)} - H^{(+q)}J^{\bar{0}} - H_{-}^{(+q)}\left(\bar{R} - \bar{1}\right) - \left(H^{(+q)} - E\right)RJ^{gl}\right) \le \min_{1\le q\le Q}\left(M^{(+q)} - \left(H^{(+q)} - E\right)J'\right) - J^{\bar{0}},$$

то $V^{gl,1} = V^{gl}$. Доказать это утверждение можно по аналогии с частным случаем $P = Q = 1$, рассмотренным в работе [7]. Основано доказательство на построении расширения области V вида (1), включающего начальные вершины $J^{\vec{0},gl} = RJ^{gl} + J^{\bar{0}}$ всех непустых тайлов. Такое расширение имеет вид

$$V^1 = \left\{J \in Z^n \mid \max_{1\le p\le P}\left(m^{(-p)} - H_{+}^{(-p)}\left(\bar{R} - \bar{1}\right) - \left(H^{(-p)} - E\right)J\right) \le J \le\right.$$
$$\left.\le \min_{1\le q\le Q}\left(M^{(+q)} - H_{-}^{(+q)}\left(\vec{R} - \bar{1}\right) - \left(H^{(+q)} - E\right)J\right)\right\}.$$

Рассмотрим теперь множество $V^{gl,0} = \left\{J^{gl} \in Z^n \mid q^{gl,0} \le J^{gl} \le Q^{gl,0}\right\}$, где $q^{gl,0} = R^{-1}(m^{\vartheta} - J^{\bar{0}} - \bar{R} + \bar{1})$, $Q^{gl,0} = R^{-1}(M^{\vartheta} - J^{\bar{0}})$. Если для любого $J^{gl} \in V^{gl,0}$ существует точка $J' \in V$ такая, что $m^{\vartheta} \ge \max_{1\le p\le P}\left(m^{(-p)} - \left(H^{(-p)} - E\right)J'\right)$, $M^{\vartheta} \le \min_{1\le q\le Q}\left(M^{(+q)} - \left(H^{(+q)} - E\right)J'\right)$, то $V^{gl,0} = V^{gl}$. Доказательство следует из включения

$$V^{gl} = \left\{J^{gl} \in Z^n \mid J^{gl} = \left\lfloor R^{-1}(J - J^{\bar{0}})\right\rfloor, J \in V\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{J^{gl} \in Z^n \mid \left\lfloor R^{-1}(\min_{J\in V} J - J^{\bar{0}})\right\rfloor \le J^{gl} \le \left\lfloor R^{-1}(\max_{J\in V} J - J^{\bar{0}})\right\rfloor\right\} = V^{gl,0}$$

и неравенств

$$\max_{1\le p\le P}\left(m^{(-p)}-\left(H^{(-p)}-E\right)J\right)-\overline{R}+\overline{1}\le m^{\vartheta}-\overline{R}+\overline{1}\le J^{0,gl}\le M^{\vartheta}\le\min_{1\le q\le Q}\left(M^{(+q)}-\left(H^{(+q)}-E\right)J'\right).$$

Справедливость доказываемого утверждения теоремы следует теперь из представления

$$V^{gl,0,1}=V^{gl,0}\bigcap V^{gl,1}=\left\{J^{gl}\in Z^n \mid q^{gl,0,1}\le J^{gl}\le Q^{gl,0,1}\right\},$$

$q^{gl,0,1}=\max\left(q^{gl,0},q^{gl,1}\right)$, $Q^{gl,0,1}=\min\left(Q^{gl,0},Q^{gl,1}\right)$, а также из равносильности существования требуемой точки $J'\in V$ и непустоты множества $V'_{\alpha,\beta,J^{gl}}$.

Таким образом, если выполняется предположение теоремы, то $q^{gl,0,1}$ и $Q^{gl,0,1}$ точно задают границы областей определения функций глобальных зависимостей. Если предположение теоремы не выполняется, то $q^{gl,0,1}$ и $Q^{gl,0,1}$ представляют границы областей определения функций не хуже, по крайней мере, чем известное представление.

Рассмотрим пример из предыдущего раздела и применим теорему.

Представим область $V_{3,3}$ в виде (1):

$$V_{3,3}=\left\{(i,j)\in Z^2 \mid 3\le i\le n,\ 2\le j\le i-1\right\}=\left\{J(i,j)\in Z^2 \mid m^{(-1)}\le H^{(-1)}J,\ H^{(+1)}J\le M^{(+1)}\right\},$$

где $m^{(-1)}=(3,2)$, $H^{(-1)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $H^{(+1)}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$, $M^{(+1)}=(n,-1)$.

Пусть произведен тайлинг области $V^{\vartheta}=V^2=\left\{(i,j)\in Z^2 \mid 2\le i\le n,\ 1\le j\le i-1\right\}$.

Имеем: $m^{3,3}=(3,2)$, $M^{3,3}=(n,n-1)$, $J^{\overline{0}}=m^{\vartheta}=m^2=(2,1)$, $R^{\vartheta}=\begin{pmatrix}r_1&0\\0&r_2\end{pmatrix}$, $H_+^{(-1)}=H^{(-1)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $H_-^{(+1)}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$,

$$q^{gl,0,1}=\left(R^{\vartheta}\right)^{-1}\left(\max\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)-0\right)\right)=$$

$$=\left(R^{\vartheta}\right)^{-1}\left(\max\left(\begin{pmatrix}-r_1+2\\-r_2+2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-r_1+2\\-r_2+2\end{pmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{r_1}&0\\0&\frac{1}{r_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r_1+2\\-r_2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-r_1+2}{r_1}\\\frac{-r_2+2}{r_2}\end{pmatrix},$$

$$Q^{gl,0,1}=\left(R^{\vartheta}\right)^{-1}\left(\min\left(\begin{pmatrix}n\\n-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}n\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1-1\\r_2-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1j_1^{gl}\\r_2j_2^{gl}\end{pmatrix}\right)\right)=$$

$$=\left(R^{\vartheta}\right)^{-1}\left(\min\left(\begin{pmatrix}n-2\\n-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}n\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-r_1+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-r_1j_1^{gl}\end{pmatrix}\right)\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{r_1}&0\\0&\frac{1}{r_2}\end{pmatrix}\left(\min\left(\begin{pmatrix}n-2\\n-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}n-2\\r_1-1+r_1j_1^{gl}\end{pmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{n-2}{r_1}\\\min\left(\frac{n-2}{r_2},\frac{r_1-1+r_1j_1^{gl}}{r_2}\right)\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$V_{3,3}^{gl,0,1}=\left\{(j_1^{gl},j_2^{gl})\in Z^2 \mid \frac{-r_1+2}{r_1}\le j_1^{gl}\le\frac{n-2}{r_1},\ \frac{-r_2+2}{r_2}\le j_2^{gl}\le\min\left(\frac{n-2}{r_2},\frac{r_1-1+r_1j_1^{gl}}{r_2}\right)\right\}.$$

Покажем, что выполняются условия (4). Неравенство (2) верно для любого $J^{gl} \in V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1}$, так как $H^{(-1)} = E$. Проанализируем неравенство (3):

$$\min\left(\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1-1 \\ r_2-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+r_1 j_1^{gl} \\ 1+r_2 j_2^{gl} \end{pmatrix}\right) \le \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1' \\ j_2' \end{pmatrix},$$

$$\min\left(\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -r_1+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2-r_1 j_1^{gl} \end{pmatrix}\right) \le \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -j_1' \end{pmatrix}, \ \min\left(\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ r_1+r_1 j_1^{gl} \end{pmatrix}\right) \le \begin{pmatrix} n \\ j_1'-1 \end{pmatrix}.$$

Неравенство $\min\left(n-1, r_1 + r_1 j_1^{gl}\right) \le j_1' - 1$ выполняется для $J'(j_1', j_2') \in V_{3,3}$ таких, что $j_1' = \min\left(n, r_1 j_1^{gl} + r_1 + 1\right)$. С учетом вида области $V_{3,3}$ можно сделать заключение, что такие J' принадлежат этой области, поэтому $V'_{3,3,J^{gl}} \ne \varnothing$ для любого $J^{gl} \in V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1}$.

Таким образом, $V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1} = V_{\alpha,\beta}^{gl}$, величины $q^{gl,0,1}$ и $Q^{gl,0,1}$ точно задают границы областей определения функций глобальных зависимостей.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф12ОБ-005).

Литература

1. *Xue J., Cai W.* // Parallel Computing. 2002. Vol. 28, N 5. P. 915–939.

2. *Kim D., Rajopdhye S.* Parameterized tiling for imperfectly nested loops // Technical Report CS-09–101, Colorado State University, Department of Computer Science, February 2009.

3. *Tavarageri S., Hartono A., Baskaran M.* et al. Parametric tiling of affine loop nests // Proc. 15th Workshop on Compilers for Parallel Computers. Vienna, Austria, July 2010.

4. *Baskaran M., Ramanujam J., Sadayappan, P.* Automatic C-to-CUDA code generation for affine programs // Proc. of the Compiler Construction, 19th International Conference. Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software. Paphos, Cyprus, March 2010.

5. *Толстиков А. А., Лиходед Н. А.* Функции, определяющие информационную структуру зернистых алгоритмов // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, Респ. Беларусь, 5–8 нояб. 2012 г. Минск, 2012. Ч. 3. С. 23–24.

6. *Воеводин В. В., Воеводин Вл. В.* Параллельные вычисления. СПб., 2002.

7. *Соболевский П. И., Баханович С. В.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 111–117.

P. I. SOBOLEVSKY, N. A. LIKHODED, P. A. MANDRIK

THE METHOD OF OBTAINING THE BOUNDARIES OF THE DOMAINS OF THE FUNCTIONS OF GLOBAL DEPENDENCES IN PARALLELING COMPUTATION PROBLEMS

Summary

A method to obtain the domains of the functions of global dependences based on the refined approximations of the set of tiles is developed. The exact presentation of the boundaries of the domains of the functions of global dependences avoids redundant computations in the performance of communication operations and provides more opportunities for granular paralleling algorithms.