ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2016
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

*УДК 517.955.32*

*Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ, Н. И. ЮРЧУК*

# РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,*
*e-mail: lomovcev@bsu.by, yurchuk@bsu.by*

В настоящей работе полностью исследована и решена начально-краевая задача для простейшего неоднородного нестрого гиперболического уравнения второго порядка при смешанных граничных условиях Дирихле и Неймана в четверти плоскости. Методом характеристик выведены ее единственные классические решения в явном аналитическом виде и доказана необходимость и достаточность установленных требований гладкости и условий согласования на исходные данные (правую часть уравнения, начальные и граничные данные), обеспечивающие ее однозначную везде разрешимость во множестве классических решений. Требования гладкости на исходные данные этой задачи на «единицу» выше, чем если бы нами решалась аналогичная первая или вторая смешанная задача для гиперболического уравнения колебаний полуограниченной струны.

*Ключевые слова:* начально-краевая задача, нестрого гиперболическое уравнение, классическое решение, необходимое и достаточное условие, требование гладкости, условие согласования.

*F. E. LOMOVTSEV, N. I. YURCHUK*

## INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NON-STRICTLY HYPERBOLIC EQUATION WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS IN A QUADRANT

*Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: lomovcev@bsu.by, yurchuk@bsu.by*

In this paper, the initial boundary value problem for the simplest inhomogeneous second-order non-strictly hyperbolic equation with the mixed Dirichlet and Neumann boundary conditions in a quadrant is fully investigated and solved. By means of the method of characteristics we have obtained its classical solution in analytic explicit form and have proved the necessity and the sufficiency of the established requirements and the smoothness of the original data (the right hand-side of the equation, initial and boundary data) to ensure its unambiguous solvability everywhere in a variety of classical solutions. The requirements on the smoothness of the data of this problem are by “one” are higher than if we have solved the similar first- or second-order mixed problem for the hyperbolic equation of semi-infinite string vibrations.

*Keywords:* boundary value problem, non-strictly hyperbolic equation, classical solution, necessary and sufficient condition, smoothness requirement, reconciliation condition.

**Введение.** В данной работе методом характеристик выведены формулы классических решений начально-краевой (смешанной) задачи для нестрого гиперболического уравнения второго порядка при смешанных граничных условиях в четверти плоскости. Для этой начально-краевой задачи нами найдены необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования исходных данных (правой части уравнения, начальных и граничных данных), которые обеспечивают ее однозначную везде разрешимость во множестве классических решений. Впервые методом характеристик формулы решений и достаточные условия существования единственных классических решений начально-краевой задачи для простейшего однородного гиперболического (однородного уравнения колебаний струны) в первой четверти были получены в [1] как в случае не характеристической, так и характеристической нестационарной (зависящей от времени) первой косой производной в граничном условии. В работе [2] эти результаты в случае не характеристической нестационарной первой косой производной были обобщены на неоднородное уравнение колебаний полуограниченной струны и доказаны установленные необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на исходные данные. Аналогичные результаты для более общего уравнения колебаний струны в четверти плоскости при некоторых нестационарных вторых косых производных в граничном условии имеются в [3]. Формулы единственных классических решений, а также необходимые и достаточные условия однозначной везде разрешимости начально-краевой задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний струны в четверти плоскости при характеристической нестационарной первой косой производной в граничном условии получены в [4]. В случае характеристической стационарной первой косой производной на левом конце и граничного условия первого рода на правом конце ограниченной струны начально-краевая задача исследовалась и решалась в [5]. Некоторые начально-краевые задачи соответственно для нестрого гиперболического уравнения и гиперболического уравнения при простейших стационарных граничных условиях исследованы и решены в [6, 7]. Основной результат (теорема) нашей работы без доказательства анонсирован в [8].

**1. Постановка начально-краевой задачи.** В четверти плоскости $G_\infty$ ставится задача:

$$u_{tt}(x,t)+2u_{xt}(x,t)+u_{xx}(x,t)=f(x,t),\ \{x,t\}\in G_\infty=[0,\infty[\times[0,\infty[, \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}_+=[0,\infty[, \tag{2}$$

$$u|_{x=0}=\mu(t),\ u_x|_{x=0}=\eta(t),\ t\in\mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где $f$, $\varphi$, $\psi$, $\mu$, $\eta$ – заданные функции соответствующих переменных $x$ и (или) $t$.

Требуется вывести в явном виде ее классические решения $u\in C^2(G_\infty)$ и найти необходимые и достаточные условия на исходные данные (правую часть $f$, начальные $\varphi$, $\psi$ и граничные $\mu$, $\eta$ данные) для ее однозначной корректной везде разрешимости. Символом $C^k(\Omega)$ мы обозначаем множество $k$ раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве $\Omega$ и $C^0(\Omega)=C(\Omega)$.

**2. Исследование и решение начально-краевой задачи.** *Критической характеристикой* $x=t$ из двукратного семейства характеристик $x-t=C, C\in\mathbb{R}_+$, уравнения (1) первая четверть $G_\infty$ разбивается на два множества $G_-=\{\{x,t\}\in G_\infty : x>at>0\}$, $G_+=\{\{x,t\}\in G_\infty : 0\le x\le at\}$.

Сначала выявим необходимые *основные* (очевидные) требования гладкости на правые части уравнения (1), начальных (2) и граничных (3) условий и *основные* (очевидные) условия согласования для них. Непосредственно из определения классических решений $u\in C^2(G_\infty)$ начально-краевой задачи (1)–(3) вытекают *основные* необходимые требования гладкости:

$$f\in C(G_\infty),\ \varphi\in C^2(\mathbb{R}_+),\ \ \psi\in C^1(\mathbb{R}_+), \mu\in C^2(\mathbb{R}_+),\quad \eta\in C^1(\mathbb{R}_+),\quad \mathbb{R}_+=[0,+\infty[. \tag{4}$$

*Дополнительные* (не столь очевидные) необходимые требования их гладкости установлены ниже. Для функций $u\in C^2(G_\infty)$ вычисляем значения первых производных по $x$ от начальных условий (2) при $x=0$ с помощью значений граничных условий (3) при $t=0$, а затем вычисляем значения первых производных по $t$ от граничных условий (3) при $t=0$ с помощью значений начальных условий (2) при $x=0$ и соответственно получаем основные необходимые условия согласования:

$$\varphi(0)=\mu(0),\quad \varphi'(0)=\eta(0);\quad \psi(0)=\mu'(0),\quad \psi'(0)=\eta'(0). \tag{5}$$

Вычисляем значение суммы второй производной по $x$ от первого из начальных условий (2) и первой производной по $x$ от второго из начальных условий (2) при $x=0$ с помощью значений правой части уравнения (1) при $t=0$ и $x=0$, соответственно второй и первой производных по $t$ от граничных условий (3) при $t=0$, и находим основное необходимое условие согласования:

$$\begin{aligned}\varphi''(0)+\psi'(0)&=\left[(u|_{t=0})_{xx}+(u_t|_{t=0})_x\right]\Big|_{x=0}=\left[u_{xx}+u_{xt}\right]\Big|_{t=0}\Big|_{x=0}=\\&=\left[f(x,t)-u_{tt}-u_{xt}\right]\Big|_{x=0}\Big|_{t=0}=f(0,0)-\mu''(0)-\eta'(0).\end{aligned} \tag{6}$$

*Дополнительное* (не столь очевидное) необходимое условие согласования между ними будет найдено нами ниже при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Начально-краевая задача* (1)–(3) *имеет единственное классическое решение* $u \in C^2(G_\infty)$ *на множествах* $G_-$ *и* $G_+$ *соответственно вида*

$$u_-(x,t) = \varphi(x-t) + [\varphi'(x-t) + \psi(x-t)]t + \int_0^t (t-\tau) f(x-t+\tau, \tau) d\tau, \tag{7}$$

$$u_+(x,t) = \mu(t-x) + [\mu'(t-x) + \eta(t-x)]x - \int_0^{t-x} (t-\tau) f(t-x-\tau, \tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau) f(|x-t+\tau|, \tau) d\tau \tag{8}$$

*для тех и только тех правой части f, начальных* $\varphi$, $\psi$ *и граничных* $\mu$, $\eta$ *данных, для которых справедливы требования гладкости*

$$f \in C(G_\infty),\ \ \varphi, \mu \in C^3(\mathbb{R}_+), \psi, \eta \in C^2(\mathbb{R}_+),\ \ \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \tag{9}$$

$$\int_0^t f(|x-t+\tau|, \tau) d\tau,\ \ \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial f(|x-t+\tau|, \tau)}{\partial t} d\tau \in C^1(G_\infty), \tag{10}$$

*и условия согласования* (5), (6) *и на* $G_+$ *еще дополнительные требования гладкости*

$$\int_0^{t-x} (t-\tau) f(t-x-\tau, \tau) d\tau \in C^2(G_+),\quad |f_t(0,0)| < +\infty, \tag{11}$$

*и дополнительные условия согласования*

$$\varphi'''(0) + \psi''(0) + f_t\ (0,0) = \mu'''(0) + \eta''(0),\ f_x(0,0) = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала выведем формулу классических решений. Методом характеристик находится общий вид классических решений уравнения (1) на множестве $G_\infty$:

$$u(x,t) = g(x-t)t + h(x-t) + F(x,t),\quad F(x,t) = \int_0^t (t-\tau) f(|x-t+\tau|, \tau) d\tau, \tag{13}$$

где $g$, $h$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции своих переменных и частное решение $F(x,t)$ уравнения (1) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией на $G_\infty$.

На множестве $G_-$ классические решения начально-краевой задачи (1)–(3) совпадают с классическими решениями задачи Коши (1), (2). Подставляя все решения (13) уравнения (1) в начальные условия (2), приходим к системе уравнений:

$$u\big|_{t=0} = h(x) = \varphi(x),\ \ u_t\big|_{t=0} = g(x) - h'(x) = \psi(x),\ \ x \in \mathbb{R}_+,$$

решениями которой служат единственные функции

$$h(y) = \varphi(y),\ \ g(z) = \varphi'(z) + \psi(z),\ \ y, z \in \mathbb{R}_+.$$

Подставляя эти функции $g$ и $h$ в общее решение (общий интеграл) (13) уравнения (1), получаем единственное решение $u_-$ вида (7) задачи (1)–(3) на $G_-$. Непосредственным дифференцированием функции (7) убеждаемся в том, что требований гладкости (9), (10) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости функции $u_-$ на $G_-$. В частности, слагаемые первых частных производных от частного решения неоднородного уравнения (1):

$$F_t(x,t) = \int_0^t f(x-t+\tau, \tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial f(x-t+\tau, \tau)}{\partial t} d\tau,\quad F_x(x,t) = -\int_0^t (t-\tau) \frac{\partial f(x-t+\tau, \tau)}{\partial t} d\tau,$$

согласно требованиям (10), допускают еще непрерывное дифференцирование по $x$ и $t$ в $G_-$. Условия согласования отсутствуют ввиду отсутствия граничных условий для точек множества $G_-$.

На множестве $G_+$ классические решения начально-краевой задачи (1)–(3) совпадают с классическими решениями задачи типа Дарбу для параболического уравнения (1) при граничном условии (3) и условии непрерывности с полученным единственным решением $u_-$ на критической характеристике $x = t$. В результате подстановки общего решения (13) в граничные условия (3) имеем систему уравнений:

$$u\big|_{x=0} = g(-t)t + h(-t) + \int_0^t (t-\tau) f(t-\tau,\tau)d\tau = \mu(t),$$
$$u_x\big|_{x=0} = g'(-t)t + h'(-t) - \int_0^t (t-\tau)\frac{\partial f(t-\tau,\tau)}{\partial t}d\tau = \eta(t), \quad t \ge 0.$$

Дифференцируем по $t$ первое уравнение этой системы, прибавляем результат к ее второму уравнению, делаем замену $y = -t$ и находим единственную функцию

$$g(y) = \mu'(-y) + \eta(-t) - \int_0^{-y} f(-y-\tau,\tau)d\tau, \quad y \le 0. \qquad (14)$$

Из первого уравнения этой системы однозначно выражаем функцию

$$h(z) = \mu(-z) + [\mu'(-z) + \eta(-z)]z + \int_0^{-z} \tau f(-z-\tau,\tau)d\tau, \quad z \le 0. \qquad (15)$$

Подставив единственные функции (14), (15) в общее решение (13), на $G_+$ имеем единственное решение (8), для дважды непрерывной дифференцируемости которого на $G_+$ очевидно достаточно требований гладкости (9), (10) и гладкости интеграла из (11).

Остается убедиться в дважды непрерывной дифференцируемости решений (7) и (8) на характеристике $x = t$. Первые три условия согласования из (5) обеспечивают непрерывность решений (7) и (8) на этой характеристике, так как

$$u_-\big|_{x=t} - u_+\big|_{x=t} = \varphi(0) - \mu(0) + [\varphi'(0) - \eta(0) + \psi(0) - \mu'(0)]t, \quad t \ge 0.$$

Дифференцируя выражения (7) и (8) нужное число раз по $x$, $t$ и полагая $x = t$, находим разности их первых и вторых частных производных:

$$\begin{gathered}
(u_-)_t\big|_{x=t} - (u_+)_t\big|_{x=t} = \psi(0) - \mu'(0) - [\varphi''(0) + \psi'(0) - f(0,0) + \mu''(0) + \eta'(0)]t, \\
(u_-)_x\big|_{x=t} - (u_+)_x\big|_{x=t} = \varphi'(0) - \eta(0) + [\varphi''(0) + \psi'(0) - f(0,0) + \mu''(0) + \eta'(0)]t, \\
(u_-)_{tt}\big|_{x=t} - (u_+)_{tt}\big|_{x=t} = -\varphi''(0) - \psi'(0) + f(0,0) - \mu''(0) - \eta'(0) + \\
+[\varphi'''(0) + \psi''(0) + f_t(0,0) + f_x(0,0) - \mu'''(0) - \eta''(0)]t, \\
(u_-)_{xt}\big|_{x=t} - (u_+)_{xt}\big|_{x=t} = \psi'(0) - \eta'(0) - \\
-[\varphi'''(0) + \psi''(0) + f_t(0,0) + f_x(0,0) - \mu'''(0) - \eta''(0)]t, \\
(u_-)_{xx}\big|_{x=t} - (u_+)_{xx}\big|_{x=t} = \varphi''(0) + \psi'(0) - f(0,0) + \mu''(0) + \eta'(0) + \\
+[\varphi'''(0) + \psi''(0) + f_t(0,0) + f_x(0,0) - \mu'''(0) - \eta''(0)]t, \quad t \ge 0.
\end{gathered} \qquad (16)$$

В силу последних трех условий согласования из (5) и условий согласования (6), (12) разности (16) обнуляются, т. е. первые и вторые частные производные от (7) и (8) тоже непрерывны на характеристике $x = t$. Таким образом, мы вывели в явном виде единственные классические решения (7) и (8) задачи (1)–(3) и доказали достаточность требований гладкости (9)–(11) и условий согласования (5), (6) и (12) для их дважды непрерывной дифференцируемости в $G_\infty$.

Теперь покажем необходимость не установленных перед доказываемой теоремой дополнительных требований гладкости из (9)–(11) и дополнительных условий согласования (12).

Сначала докажем необходимость дополнительных интегральных требований гладкости (10) и (11) на $f$, которые отсутствуют в основных требованиях (4) на $f$. Если функция $f$ зависит от $x$, то для любой функции $f \in C(G_\infty)$ непрерывное частное решение $u_0(x,t) = F(x,t) \in C(G_\infty)$ неоднородного уравнения (1) в $G_\infty$ естественно должно иметь непрерывно дифференцируемые в $G_\infty$ первые частные производные:

$$(u_0)_t(x,t) = \int_0^t f(|x-t+\tau|,\tau)d\tau + \int_0^t (t-\tau)\frac{\partial f(|x-t+\tau|,\tau)}{\partial t}d\tau \in C^1(G_\infty),$$

$$(u_0)_x(x,t) = -\int_0^t (t-\tau)\frac{\partial f(|x-t+\tau|,\tau)}{\partial t}d\tau \in C^1(G_\infty).$$

Тогда также непрерывно дифференцируемой в $G_\infty$ должна быть их сумма

$$\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial n} = \left(\overrightarrow{\operatorname{grad} u_0}, \vec{n}\right) = \left(\{(u_0)_t,(u_0)_x\},\{1,1\}\right) = \int_0^t f(|x-t+\tau|,\tau)d\tau \in C^1(G_\infty),$$

которая является производной от $u_0$ по направлению $\vec{n} = \{1,1\}$ семейства характеристик $x - t = C$, $C \in \mathbb{R}$. Отсюда заключаем необходимость интегральных требований гладкости (10). Если же функция $f = f(t)$ не зависит от $x$, то основное необходимое требование гладкости $f \in C(\mathbb{R}_+)$ и интегральные требования гладкости (10) эквивалентны требованию $f \in C(\mathbb{R}_+)$ из (4) и дополнительное необходимое условие согласования $f_x(0,0) = 0$ из (12) очевидно выполняется.

Ввиду общего решения (13) на $G_-$ для $h = f = 0$ и $\forall\, g \in C^2(\mathbb{R}_+)$, классические решения $u_1(x,t) = g(x-t)t \in C^2(G_-)$ однородного уравнения (1) должны сохранять гладкость при их подстановке во второе из начальных условий (2):

$$(u_1)_t\big|_{t=0} = [g(x-t) - g'(x-t)t]\big|_{t=0} = g(x) = \psi(x), \quad x \ge 0, \tag{17}$$

и, следовательно, необходима дополнительная гладкость $\psi \in C^2(\mathbb{R}_+)$, так как $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Благодаря основному необходимому требованию гладкости $\forall\, \psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$, в решениях (13) на $G_-$ можно положить $g = f = 0$, $h(z) = \int_0^z \psi(s)ds$ и иметь классические решения $u_2(x,t) = \int_0^{x-t} \psi(s)ds \in C^2(G_-)$ однородного уравнения (1), которые обязаны сохранять гладкость при их подстановке в первое из начальных условий (2):

$$(u_2)\big|_{t=0} = \int_0^x \psi(s)ds = \varphi(x), \quad x \ge 0.$$

Отсюда вытекает дополнительное необходимое требование $\varphi \in C^3(\mathbb{R}_+)$, так как уже $\psi \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Повышение на «единицу» гладкости начальных данных $\varphi$ и $\psi$ по сравнению с основными требованиями гладкости на них из (4) влечет повышение на «единицу» гладкости граничных данных $\mu$ и $\eta$ по сравнению с основными требованиями гладкости на них из (4). Для любой функции $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$ из основного необходимого требования гладкости (4) в решениях (13) на $G_+$ полагаем $g = f = 0$, $h(z) = \varphi(-z)$ и имеем классические решения $u_3(x,t) = \varphi(t-x) \in C^2(G_+)$ однородного уравнения (1), которые должны сохранять гладкость при их подстановке в граничные условия (3):

$$(u_3)\big|_{x=0} = \varphi(t) = \mu(t), \ (u_3)_x\big|_{x=0} = -\varphi'(t) = \eta(t), \quad t \ge 0.$$

Из этих равенств следует необходимость дополнительной гладкости $\mu \in C^3(\mathbb{R}_+)$ и $\eta \in C^2(\mathbb{R}_+)$, так как уже $\varphi \in C^3(\mathbb{R}_+)$.

Пусть решения $u_+ \in C^2(G_+)$. Поэтому из равенства (8) следует необходимость интегрального требования гладкости из (11), потому что уже $\mu \in C^3(\mathbb{R}_+)$, $\eta \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и $u_0 \in C^2(G_\infty)$. Чтобы показать необходимость дополнительного требования гладкости $|f_t(0,0)| < +\infty$ из (11) и дополнительных условий согласования (12), для более гладких функций $f$, у которых существуют непрерывные вторые частные производные $f^{(2,0)} = f_{xx} \in C(G_\infty)$ по $x$, мы можем продифференцировать дважды по $t$ интеграл из (11), который в дальнейшем будем обозначать через $u_4$, и для всех $t \geq x \geq 0$ будем иметь

$$(u_4)_{tt} = [f^{(0,1)}(0,t-x) + f^{(1,0)}(0,t-x)]x + f(0,t-x) +$$
$$+2\int_0^{t-x} f^{(1,0)}(t-x-\tau,\tau)d\tau + \int_0^{t-x}(t-\tau)f^{(2,0)}(t-x-\tau,\tau)d\tau \in C(G_+), \tag{18}$$

где обозначены первые частные производные $f^{(1,0)} = f_x, f^{(0,1)} = f_t$. От этого равенства при $x = t$ приходим к равенству

$$(u_4)_{tt}\big|_{x=t} = [f^{(0,1)}(0,0) + f^{(1,0)}(0,0)]t + f(0,0) \in C(\mathbb{R}_+), \tag{19}$$

которое указывает на конечность суммы следов первых частных производных в начале координат

$$\left|f_t(0,0) + f_x(0,0)\right| < +\infty \tag{20}$$

для указанных выше более гладких правых частей $f$. Конечность суммы (20) для правых частей $f$, удовлетворяющих только установленным выше необходимым требованиям гладкости на $f$ из (9)–(11), легко устанавливается предельным переходом по $f$ в равенстве (19), которое уже не содержит слагаемых со второй производной $f^{(2,0)}$. С одной стороны, для равенства вторых частных производных, например $(u_-)_{tt}\big|_{x=t} = (u_+)_{tt}\big|_{x=t}$, на критической характеристике $x = t$ для каждых $\varphi, \mu \in C^3(\mathbb{R}_+)$, $\psi, \eta \in C^2(\mathbb{R}_+)$ в (16) вычислено значение этой суммы

$$f_t(0,0) + f_x(0,0) = c_0, \tag{21}$$

где $c_0 = \mu'''(0) + \eta''(0) - \varphi'''(0) - \psi''(0)$. С другой стороны, для любых решений $u \in C^3(G_+)$, дифференцируя уравнение (1) соответственно по $t$ и $x$, получаем равенства

$$u_{ttt}(x,t) + 2u_{xtt}(x,t) + u_{xxt}(x,t) = f_t(x,t),\ u_{ttx}(x,t) + 2u_{xxt}(x,t) + u_{xxx}(x,t) = f_x(x,t).$$

Вычитая второе равенство из первого и в их разности полагая $x = 0$, $t = 0$, находим, что

$$f_t(0,0) - f_x(0,0) = [u_{ttt} + u_{xtt} - u_{xxt} - u_{xxx}]\big|_{x=0}\big|_{t=0} = c_0. \tag{22}$$

Предельным переходом равенство (22) распространяется с решений $u \in C^3(G_+)$ на рассматриваемые решения $u \in C^2(G_+)$ и, следовательно, с более гладких правых частей $f$ на правые части $f$, удовлетворяющие установленным выше необходимым требованиям гладкости из (9)–(11). Равенства (21) и (22) указывают на то, что $f_x(0,0) = 0$ и $f_t(0,0) = c_0$, т. е. необходимы последнее требование гладкости в (11) и условия согласования (12). Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция $f$ не зависит от $x$, то налагаемые требования гладкости на $f$ в (9)–(11) для $G_-$ и $G_+$ эквивалентны соответственно требованиям $f \in C(\mathbb{R}_+)$ и $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Если функция $f$ зависит от $x$, то для непрерывных функций $f$ в $G_\infty$ принадлежность указанных в (10) интегралов множеству $C^1(G_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(1,0)}(G_\infty)$ или $C^{(0,1)}(G_\infty)$. Здесь $C^{(1,0)}(G_\infty)$ и $C^{(0,1)}(G_\infty)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых по $x$ и $t$ и непрерывных по $t$ и $x$ функций в первой четверти $G_\infty$.

Замечание 2. В отличие от начально-краевых задач для гиперболических уравнений [2, 3] при не характеристической косой производной в граничном условии, в задаче (1)–(3) для нестрого гиперболического уравнения требования гладкости для $f$, $\varphi$, $\psi$, $\mu$, $\eta$ на «единицу» выше и в $G_+$ решение $u_+$ не зависит от данных $\varphi$, $\psi$ в силу двойной кратности характеристик $x - t = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Замечание 3. Интегральное требование гладкости на $f \in C(G_\infty)$ из (11) эквивалентно требованию гладкости $x\int_0^{t-x} f(t-x-\tau,\tau)d\tau \in C^2(G_+)$ из [8] в силу очевидного равенства

$$\int_0^{t-x}(t-\tau)f(t-x-\tau,\tau)d\tau = x\int_0^{t-x} f(t-x-\tau,\tau)d\tau + \int_0^{t-x}(t-x-\tau)f(t-x-\tau,\tau)d\tau,$$

поскольку дважды непрерывная дифференцируемость в $G_+$ последнего интеграла этого равенства обеспечивается дважды непрерывной дифференцируемостью частного решения $u_0(x,t) = F(x,t) \in C^2(G_\infty)$ при $x = 0$, т. е. требованием $\int_0^t (t-\tau)f(t-\tau,\tau)d\tau \in C^2(\mathbb{R}_+)$, и равенством

$$\int_0^{t-x}(t-x-\tau)f(t-x-\tau,\tau)d\tau = \int_0^{t'}(t'-\tau)f(t'-\tau,\tau)d\tau\Big|_{t'=t-x}.$$

Замечание 4. Может появиться ошибочное мнение о возможности доказательства необходимости требований большей гладкости на исходные данные $f$, $\varphi$, $\psi$, $\mu$, $\eta$, чем указаны в нашей теореме. Во-первых, для любой краевой задачи в принципе невозможно обосновать такие необходимые требования гладкости, которые превосходят минимальные достаточные требования гладкости на исходные данные для ее однозначной корректной везде разрешимости. Во-вторых, выше в нашем доказательстве $\forall\,\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ в решениях (13) на $G_-$ нельзя взять, например, $h(z) = \int_0^z\int_0^\tau \psi(s)dsd\tau$ и получить необходимость более высокой гладкости $\varphi \in C^4(\mathbb{R}_+)$, потому что в общем решении (13) функции $h$ только дважды непрерывно дифференцируемы. Аналогичным образом из равенства (17) нельзя вывести необходимость гладкости $\psi \in C^3(\mathbb{R}_+)$, потому что в решениях (13) функции $g$ только дважды непрерывно дифференцируемы. Условие $f_x(0,0) = 0$ служит условием согласования, как здесь в (12), или требованием гладкости, как в [8]?

**Выводы.** В настоящей работе выведены формулы единственных классических решений начально-краевой задачи для простейшего (модельного) нестрого гиперболического уравнения (параболического) второго порядка в четверти плоскости и доказана необходимость и достаточность установленных требований гладкости и условий согласования на исходные данные (правую часть уравнения, начальные и граничные данные), которые обеспечивают ее однозначную везде разрешимость во множестве классических решений.

## Список использованной литературы


1. *Барановская, С. Н.* Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
2. *Ломовцев, Ф. Е.* Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 83–86.
3. *Моисеев, Е. И.* Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Е. И. Моисеев, Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Докл. Акад. наук. – 2014. – Т. 459, № 5. – С. 544–549.
4. *Ломовцев, Ф. Е.* Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии / Ф. Е. Ломовцев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 1. – С. 21–27.
5. *Шлапакова, Т. С.* Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике / Т. С. Шлапакова, Н. И. Юрчук // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2013. – № 2. – С. 84–90.
6. *Корзюк, В. И.* Первая граничная задача для нестрого гиперболического уравнения второго порядка с младшими производными / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Еругинские чтения-2013: тез. докл. XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Гродно, 13–16 мая 2013 г. – Минск, 2013. – Ч. 2. – С. 14–15.
7. *Корзюк, В. И.* Уравнения математической физики. – Минск: БГУ, 2011.
8. *Юрчук, Н. И.* Решение без продолжений данных смешанной задачи для параболического уравнения в четверти плоскости / Н. И. Юрчук, Ф. Е. Ломовцев // XII Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г.: в 5 ч. – Минск, 2016. – Ч. 2. – С. 78–79.


*Поступила в редакцию 17.06.2016*