ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 2 2016
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

МАТЭМАТЫКА

УДК 517.977

И. В. ГАЙШУН[1], В. В. ГОРЯЧКИН[2]

РОБАСТНАЯ И ИНТЕРВАЛЬНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail:gaishun@im.bas-net.by
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: gorvv@bsu.by

Для некоторых классов интервальных дискретных двухпараметрических систем установлены условия робастной и интервальной наблюдаемости
Ключевые слова: двухпараметрическая дискретная система, интервальный анализ, робастная наблюдаемость, интервальная наблюдаемость.

I. V. GAISHUN[1], V. V. GORYACHKIN[2]

ROBUST AND INTERVAL OBSERVABILITY OF TWO-DIMENSIONAL DISCRETE SYSTEMS WITH INTERVAL COEFFICIENTS

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: gaishun@im.bas-net.by
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: gorvv@bsu.by

For some classes of interval discrete two-dimensional systems conditions of robust and interval observability are established
Keywords: two-dimensional discrete system, interval analysis, robust observability, interval observability.

Введение. Во многих прикладных задачах коэффициенты исследуемых систем точно не известны, а заданы лишь интервалы, в которых они принимают значения. Это приводит к необходимости исследовать различные классы уравнений с интервальными коэффициентами. Изучать такие уравнения можно как в рамках интервального анализа [1, 2], рассматривая их как единый математический объект, так и исследовать все системы, получаемые при различных реализациях коэффициентов. В первом случае мы говорим об интервальных свойствах уравнений, во втором – о робастных свойствах.

Предлагаемая работа посвящена вопросам интервальной и робастной наблюдаемости двухпараметрических дискретных систем [3] с интервальными коэффициентами.

1. Элементы интервальной арифметики. Пусть $\boldsymbol{IR}$ – множество замкнутых интервалов $[a]=[a_1, a_2]$ на вещественной прямой $\boldsymbol{R}$ (равенство $a_1 = a_2$ не исключается; в этом случае интервал называется точечным и обозначается a). Пусть * – одна из арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) во множестве вещественных чисел $\boldsymbol{R}$. Для любых $[a],[b]\in \boldsymbol{IR}$ положим

$$[a]*[b]=\{a*b : a\in[a], b\in[b]\}$$

(если * – операция деления, то предполагается, что $0\notin[b]$). Легко убедиться, что $[a]*[b]\in \boldsymbol{IR}$.

Определенные таким образом операции на $\boldsymbol{IR}$ обладают следующими свойствами: сложение и умножение коммутативны и ассоциативны, а точечные интервалы $0=[0,0]$, $1=[1,1]$ – единственные их нейтральные элементы. Интервалы, не являющиеся точечными, не имеют обратного ни по сложению, ни по умножению, но $0\in[a]-[a]$ и $1\in[a]:[a]$ и $[a]+[b]=[c]+[b]$ влечет $[a]=[c]$. Закон дистрибутивности на $\boldsymbol{IR}$, вообще говоря, не выполняется, справедливо лишь свойство субдистрибутивности $[a]([b]+[c])\subseteq[a][b]+[a][c]$. Если $bc\ge 0$, для всех $b\in[b], c\in[c]$, то $[a]([b]+[c])=[a][b]+[a][c]$.

Абсолютная величина $\|[a]\|$ интервала $[a]\in \boldsymbol{IR}$ определяется как число $\max\{|a_1|,|a_2|\}$. Очевидно, что $\|[a]+[b]\|\le\|[a]\|+\|[b]\|$ и $\|[a]\,[b]\|\le\|[a]\|\|[b]\|$.

Величины $\alpha([a])=(a_1+a_2)/2$ и $\beta([a])=(a_2-a_1)/2$ называются центром и радиусом интервала $[a]$. Элемент $[a]\in \boldsymbol{IR}$ неотрицателен, $[a]\ge 0$, (положителен $[a]>0$), если $a_1\ge 0$ $(a_1>0)$.

Матрица $[A]=([a_{i,j}])$ размера $m\times n$ над множеством $\boldsymbol{IR}$ называется интервальной; если все $[a_{i,j}]$ – точечные интервалы, то $[A]=A$ – точечная матрица. Радиус, центр и абсолютная величина интервальной матрицы вычисляются поэлементно. Матрица $[A]=([a_{i,j}])$ неотрицательна (положительна), если $[a_{i,j}]\ge 0$ $([a_{i,j}]>0)$ для всех i, j. Сложение $m\times n$ и умножение $m\times q$ и $q\times n$ интервальных матриц определяется следующим образом:

$$[A]+[B]=([a_{i,j}]+[b_{i,j}]),\ [A][B]=\left(\sum_{k=1}^{q}[a_{i,k}][b_{k,j}]\right).$$

Умножение матриц не является, вообще говоря, ассоциативным. Однако если матрицы $[B]$ и $[C]$ симметричны, т. е. $[B]=-[B]$ и $[C]=-[C]$, то $[A]([B][C])=([A][B])[C]$.

2. Двухпараметрические системы наблюдения. Пусть A, D – $n\times n$-матрицы над полем $\boldsymbol{R}$. Двухпараметрической дискретной системой [3] называется соотношение

$$x(t+1,s) = Ax(t,s) + Dx(t,s+1) \tag{1}$$

для определения неизвестной функции $x(t,s)$ (t = 0, 1, 2, …; s = 0, ±1, ±2, …). Очевидно, что для любой последовательности $\gamma(s)$ существует единственное решение $x(t,s)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0,s)=\gamma(s)$. Далее в качестве начальных последовательностей будем рассматривать финитные функции, обращающиеся в нуль вне некоторого конечного множества [3].

Пусть к системе (1) присоединена выходная r – вектор-функция

$$y(t,s) = Cx(t,s). \tag{2}$$

Система (1) называется наблюдаемой по выходу (2), если по известной выходной последовательности $y(t,s)$ можно однозначно восстановить начальную финитную последовательность, породившую решение $x(t,s)$ (более строгое определение наблюдаемости можно найти в монографии [3]). Согласно [3, §11; 4], наблюдаемость имеет место тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C(A+mD)^i \\ \overline{i=0,n-1} \end{pmatrix}=n \tag{3}$$

хотя бы при одном $m\in \boldsymbol{R}$.

3. Наблюдаемость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами. Пусть $[A]$, $[D]$ и $[C]$ – интервальные ($n\times n$)- и ($n\times r$)-матрицы. Рассмотрим дискретную систему

$$[x(t+1,s)] = [A][x(t,s)] + [D][x(t,s+1)] \tag{4}$$

над множеством $(\boldsymbol{IR})^{\mathbf{n}}$ с выходной функцией

$$[y(\mathrm{t},s)] = [C][x(t,s)]. \tag{5}$$

Ясно, что всякая интервальная финитная последовательность $[\gamma(s)]$ однозначно определяет решение $[x(t,s)]$, понимаемое в смысле интервальной арифметики.

Система (4) называется робастно наблюдаемой по выходу (5), если для любых $A\in[A]$, $D\in[D]$, $C\in[C]$ наблюдаема система (1) по выходу (2). Значит, робастная наблюдаемость имеет место тогда и только тогда, когда для любых $A\in[A]$, $D\in[D]$, $C\in[C]$ выполняется условие (3).

Рассмотрим вопрос об интервальной наблюдаемости. Если начальная финитная последовательность $[\gamma(s)]$ задана, то по уравнениям (4), (5) однозначно находится последовательность

$$[\mathrm{y}(\mathrm{t},s)],\ \ldots,\ [y(t,s+N+n-1)],\ [y(t+1,s)],\ \ldots,\ [y(t+1,s+N+n-2)],\ \ldots,\ [y(t+n-1,s+N)], \tag{6}$$

связанная с функциями

$$[x(\mathrm{t},s)],\ [x(t,s+1)],\ \ldots,\ [x(\mathrm{t},s+N+n-1)] \tag{7}$$

некоторыми «линейными» соотношениями, которые не приводятся из-за их громоздкости. Здесь N – «длина» носителя [4] функции $[\gamma(s)]$; выбор числа n в данных последовательностях объясняется тем, что такое число элементов (6) достаточно для ответа на вопрос: является или нет робастно наблюдаемой система (4).

Определение. Система (4) интервально наблюдаема по выходу (5), если по последовательности (6) можно однозначно определить последовательность (7).

Использовать данное определение непосредственно не представляется возможным, поскольку связывающая последовательности (6), (7) система интервальных уравнений чрезвычайно сложна из-за особенностей интервальной арифметики, представленных в пункте 2. Поэтому далее мы ограничимся исследованием некоторых частных случаев системы (4), (5).

Отметим, что робастная и интервальная наблюдаемость – это разные свойства.

Пример. Пусть $n = 2$, $r = 1$,

$$[A]=\begin{pmatrix}0 & [2,\ 4]\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ [D]=0,\ [C]=(1,\ [1,\ 3]).$$

Тогда система (4), (5) интервально наблюдаема, но не является робастно наблюдаемой, так как при

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2{,}5\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in[A],\ \ C=(1;\ 2{,}5)\in[C]$$

условие (3) не выполняется.

4. Наблюдаемость систем с неотрицательными коэффициентами. Предположим, что матрицы $[A]$ и $[D]$, а также финитные начальные условия $[\gamma(s)]$ являются неотрицательными. Тогда, как легко убедиться, центр $\alpha_{t,s}=\alpha([x(t,s)])$ и радиус $\beta_{t,s}=\beta([x(t,s)])$ вектора $[x(t,s)]$ подчиняются точечной системе уравнений

$$\begin{pmatrix}\alpha_{t+1,s}\\ \beta_{t+1,s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(A]) & \beta([A])\\ \beta([A]) & \alpha([A])\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{t,s}\\ \beta_{t,s}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha([D]) & \beta([D])\\ \beta([D]) & \alpha([D])\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{t,s+1}\\ \beta_{t,s+1}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

а выход $[y(t,s)]$ определяется равенством

$$\begin{pmatrix}\alpha([y(t,s)])\\ \beta([y(t,s)])\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha[C]) & 0{,}5(|C_2|-|C_1|)\\ \beta([C]) & 0{,}5(|C_2|+|C_1|)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{t,s}\\ \beta_{t,s}\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где C_1 и C_2 – точечные матрицы, составленные из левых и правых концов интервалов $[c_{i,j}]$, образующих матрицу $[C]$. Очевидно, что свойство интервальной наблюдаемости системы (4), (5) эквивалентно свойству наблюдаемости системы (8), (9) в классе финитных последовательностей. Поэтому из [3] следует

Теорема 1. *Система* (4), (5) *с неотрицательными матрицами* $[A]$, $[D]$ *интервально наблюдаема в классе финитных начальных функций* $[\gamma(s)] \ge 0$, *если*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P(F_A + mF_D)^i \\ i = \overline{0, 2n-1} \end{pmatrix} = 2n$$

хотя бы при одном $m \in \boldsymbol{R}$, *где*

$$P = \begin{pmatrix} \alpha([C]) & 0,5(|C_2| - |C_1|) \\ \beta([C]) & 0,5(|C_2| + |C_1|) \end{pmatrix},\ F_A = \begin{pmatrix} \alpha([A]) & \beta([A]) \\ \beta([A]) & \alpha([A]) \end{pmatrix},\ F_D = \begin{pmatrix} \alpha([D]) & \beta([D]) \\ \beta([D]) & \alpha([D]) \end{pmatrix}.$$

5. Наблюдаемость систем с симметричными матрицами [*A*] и [*D*]. Предположим, что матрицы $[A]$ и $[D]$ симметричны, т. е. $[A] = -[A]$ и $[D] = -[D]$. Тогда, как легко убедиться, при $t > 0$ свойством симметричности обладают любое решение $[x(t,s)]$ и каждая выходная последовательность $[y(t,s)]$. Поэтому справедливы соотношения

$$[y(t,s)] = |[C]|[x(t,s)]$$

. . . .

$$[y(t+n-1, s+n)] = |[C]|\,(|[A]| \quad |[D]|)\ldots \begin{pmatrix} |[A]| & |[D]| & & \\ & |[A]| & |[D]| & \\ & . & . & . \\ & & |[A]| & |[D]| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [x(t, s+n)] \\ [x(t, s+n+1)] \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ [x(t, s+N+n-1)] \end{pmatrix},$$

из которых следует, что для точечной последовательности $\beta([y(t,s)])$ имеют место равенства

$$\beta([y(t,s)]) = |[C]|\beta([x(t,s)]),$$

. . . .

$$\beta([y(t+n-1, s+N)]) = |[C]|\,(|[A]| \quad |[D]|)\ldots \begin{pmatrix} |[A]| & |[D]| & & \\ & |[A]| & |[D]| & \\ & . & . & . \\ & & |[A]| & |[D]| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta([x(t, s+n)]) \\ \beta([x(t, s+n+1)]) \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \beta([x(t, s+N+n-1)]) \end{pmatrix}.$$

Значит, справедлива

Теорема 2. *Система* (4), (5) *с симметричными интервальными матрицами* $[A]$ *и* $[D]$ *интервально наблюдаема при* $t > 0$, *если*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} (|[C]|)\,(|[A]| + m|[D]|)^i \\ i = \overline{0, n-1} \end{pmatrix} = n$$

хотя бы при одном $m \in \boldsymbol{R}$.

Список использованной литературы

1. *Алефельд, Г.* Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер; пер. с англ. Г. Е. Минца, А. Г. Яковлева; под ред. Ю. В. Матиясевича. – М.: Мир, 1987.
2. *Шарый, С. А.* Конечномерный интервальный анализ [Электронный ресурс] / С. А. Шарый. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2013. – Режим доступа: http//www.nsc.ru/interval/Libraly/Inte Books/Shary Book.pdf. – Дата доступа: 10.02.2016.
3. *Гайшун, И. В.* Многопараметрические системы управления / И. В. Гайшун. – Минск: Навука і тэхніка, 1996.
4. *Гайшун, И. В.* Об управляемости и наблюдаемости двухпараметрических дискретных систем / И. В. Гайшун, В. В. Горячкин // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1989. – № 4. – С. 3–8.

Поступила в редакцию 11.04.2016