2 - Omomorfismi di fibrati con fibra strutturata

(2.1) Definizione

Siano $\eta \equiv (E,\pi,B,J)$ ed $\eta' \equiv (E',\pi',B',J')$ due fibrati topologici con struttura in $\mathfrak{F}$.

Dicesi "omomorfismo di η in η'" ogni applicazione continua

$$H : E \to E' ,$$

che soddisfa alle seguenti condizioni:

a) H manda fibre in fibre, ossia esiste $h : B \to B'$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array}$$

(se tale h esiste è unica),

b) $\forall\, b \in B$ l'applicazione indotta

$$H_b : \pi^{-1}(b) \to \pi'^{-1}(h(b))$$

è un omomorfismo di $\mathfrak{F}$.

In particolare, un omomorfismo di fibrati topologici con struttura in $\mathfrak{F}$ è un omomorfismo di fibrati topologici.

L'insieme dei fibrati topologici con struttura in $\mathfrak{F}$ forma una categoria.

Si noti che, per gli omomorfismi di fibrati topologici a fibra struttura ta, le espressioni locali hanno valori in Hom(F,F')

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_j) \to \mathrm{Hom}(F,F') .$$

3 - Ricostruzione di fibrati e di omomorfismi.

Sia $\mathcal{F}$ una categoria di struttura.

(3.1) Possiamo ricostruire un fibrato con struttura in $\mathcal{F}$ mediante il suo atlante.

Proposizione.

Sia B uno spazio topologico, E un insieme, $\pi : E \to B$ un'applicazione suriettiva, $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di B, F un oggetto di $\mathcal{F}$, $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i\in I}$ una famiglia di biiezioni, i quali soddisfano alle seguenti condizioni:

a) $\forall\ i \in I$, il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "\pi^1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

b) se $U_i \cap U_j \neq 0$, l'applicazione Φ_{ji} abbia valori in $\mathrm{Aut}(F)$, ossia

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(F)$$

e l'applicazione indotta