ISSN 0002-3574 (print)
УДК 519.63

Поступила в редакцию 30.09.2016
Received 30.09.2016

Ле Минь Хиеу

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Экономический университет – Университет Дананга, Дананг, Вьетнам

БЕЗУСЛОВНО МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ГАММА-УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе рассмотрена начально-краевая задача для так называемого Гамма-уравнения, которое может быть получено преобразованием нелинейного уравнения Блэка – Шоулза для опционной цены в квазилинейное параболическое уравнение для второй производной опционной цены, и получены двусторонние оценки для его точного решения. На основании принципа регуляризации полученные ранее результаты обобщаются на построение безусловно монотонных разностных схем (принцип максимума выполнен без ограничений на соотношения между коэффициентами и параметрами сетки) второго порядка локальной аппроксимации на равномерных сетках для данного уравнения. С помощью разностного принципа максимума получены двусторонние оценки для разностного решения при произвольных незнакопостоянных входных данных задачи. Доказана априорная оценка в норме *C*. Отметим, что доказанные двусторонние оценки разностного решения полностью согласованы с дифференциальной задачей и максимальное и минимальное значения разностного решения не зависят от коэффициентов диффузии и конвекции. Приведенные в работе вычислительные эксперименты подтверждают теоретические выводы.

Ключевые слова: Гамма-уравнение, принцип максимума, двусторонние оценки, монотонная разностная схема, квазилинейное параболическое уравнение.

Le Minh Hieu

Belarusian State University, Minsk, Belarus
University of Economics – University of Da Nang, Da Nang, Vietnam

UNCONDITIONALLY MONOTONE FINITE DIFFERENCE SCHEME OF THE SECOND-ORDER APPROXIMATION ON UNIFORM GRIDS FOR THE GAMMA EQUATION

In this article we consider the initial boundary-value problem for the so-called Gamma equation, which can be derived by transforming the nonlinear Black – Scholes equation for option price into a quasi-linear parabolic equation for the second derivative of option price, and for its exact solution the two-side estimates are obtained. By means of the regularization principle, the previous results are generalized to construct an unconditionally monotone finite-difference scheme (the maximum principle is satisfied without limitations on the relations between the coefficients and the grid parameters) of second-order approximation on uniform grids for this equation. With the help of the difference maximum principle, the two-side estimates for a difference solution are obtained using the arbitrary non-sign-constant input data of the problem. The *a priori* estimate in the maximum norm *C* is proved. It is interesting to note that the proven two-side estimates for the difference solution are fully consistent with the differential problem, and the maximal and minimal values of the difference solution do not depend on the diffusion and convection coefficients. Computational experiments confirming the theoretical conclusions are given.

Keywords: Gamma equation, maximum principle, two-side estimates, monotone finite-difference scheme, quasi-linear parabolic equation.

Введение. Принцип максимума с успехом применяется для доказательства существования и единственности решения начально-краевых задач для параболических и эллиптических уравнений. В отличие от метода энергетических неравенств он позволяет устанавливать априорные оценки решения в наиболее сильной равномерной норме для задач произвольной размерности с несамосопряженным эллиптическим оператором [1].

Аналогичный математический аппарат используется и в теории разностных схем [2] для исследования устойчивости и сходимости разностного решения в равномерной норме. Вычислительные методы, удовлетворяющие принципу максимума, принято называть монотонными [2]. Монотонные схемы играют важную роль в вычислительной практике. Они позволяют получать численное решение без осцилляций даже в случае негладких решений [3].

Не менее важными являются и нижние оценки решения дифференциально-разностных задач или в общем случае – двусторонние оценки решения задачи. Отметим также, что при формулировке сеточного принципа максимума обычно требуется знакоопределенность входных данных задачи. В работах [4, 5] для так называемой канонической формы записи разностной схемы общего вида [2] при обычных условиях положительности коэффициентов уравнения получены двусторонние оценки сеточного решения при произвольных незнакопостоянных входных данных задачи. Двусторонние оценки особенно важны при исследовании теоретических свойств вычислительных методов, аппроксимирующих задачи с неограниченной нелинейностью, когда нужно доказывать принадлежность сеточного решения окрестности значений точного решения. В качестве примера можно привести Гамма-уравнение, используемое при описании опционной цены в финансовой математике [6, 9]. В связи с этим представляет интерес статья [7], в которой получены двусторонние оценки для решения разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для линейного параболического уравнения в дискретном и непрерывном случаях.

В настоящей работе рассмотрено Гамма-уравнение и на основе результатов из [8] приведены двусторонние оценки для его точного решения. Полученные ранее результаты обобщаются на построение безусловно монотонных разностных схем второго порядка локальной аппроксимации на равномерных сетках для данного уравнения. Построение таких схем при соответствующем выборе возмущенного коэффициента проводится подобно [2, 4, 5]. С помощью разностного принципа максимума получены двусторонняя и априорная оценки в норме C для разностного решения. Отметим, что доказанные двусторонние оценки разностного решения полностью согласованы с дифференциальной задачей.

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x,t)\colon l_1 \le x \le l_2,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения, называемого Гамма-уравнением [6, 9]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \beta(u)}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta(u)}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial x},\quad u = u(x,t),\quad c = \text{const}, \tag{1}$$

с однородными граничными

$$u(l_1,t) = u(l_2,t) = 0,\quad t > 0, \tag{2}$$

и начальным условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\quad l_1 \le x \le l_2. \tag{3}$$

Уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(u)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

с коэффициентами

$$k(u) = \beta'(u),\quad r(u) = k(u) + c. \tag{5}$$

Предполагаем выполнение условия параболичности уравнения (4) на решении [10]:

$$0 < k_1 \le k(u) \le k_2,\quad \forall u \in \bar{D}_u,\quad k_1, k_2 = \text{const}, \tag{6}$$

где

$$\bar{D}_u = \left\{u(x,t)\colon\ m_1 \le u(x,t) \le m_2,\quad (x,t) \in \bar{Q}_T\right\}.$$

Далее предполагаем, что решение задачи (1)–(3) существует и единственно, а все входящие в уравнение (4) коэффициенты и искомая функция обладают непрерывными ограниченными производными, необходимыми по ходу изложения порядка.

2. Вспомогательные результаты. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве задано конечное количество точек – сетка Ω_h. Каждой точке $x \in \Omega_h$ поставим в соответствие один и только один шаблон $M(x)$ – любое подмножество Ω_h, содержащее данную точку. Окрестностью точки x

назовем множество $M'(x) = M(x) \setminus x$. Пусть заданы функции $A(x)$, $B(x,\xi)$, $F(x)$, определенные при любых $x \in \Omega_h$, $\xi \in \Omega_h$ и принимающие вещественные значения. Далее, каждой точке $x \in \Omega_h$ соответствует одно и только одно уравнение вида [2]:

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in M'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{7}$$

называемое канонической формой записи разностной схемы. Так как любая разностная схема может быть записана в виде (7), то под монотонностью понимают выполнение условий положительности на коэффициенты уравнений

$$A(x) > 0, \quad B(x,\xi) > 0, \quad \forall \xi \in M'(x), \tag{8}$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x,\xi) > 0, \quad \forall \xi \in M'(x). \tag{9}$$

Для решения разностной задачи (7) при выполнении условий положительности коэффициентов (8)–(9) на основе сеточного принципа максимума без предположений на знакоопределенность входных данных $F(x)$ доказаны следующие важные двусторонние оценки.

Лемма [4, 5]. *Пусть выполнены условия положительности коэффициентов* (8)–(9). *Тогда максимальное и минимальное значения решения разностной схемы* (7) *принадлежат интервалу изменения входных данных*

$$\min_{x \in \Omega_h} \frac{F(x)}{D(x)} \le y(x) \le \max_{x \in \Omega_h} \frac{F(x)}{D(x)}, \quad x \in \Omega_h. \tag{10}$$

Следствие [2]. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда для решения разностной задачи* (7) *имеет место оценка в сеточном аналоге нормы C*

$$\|y\|_C = \max_{x \in \Omega_h} |y(x)| \le \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

3. Двусторонние оценки для дифференциальной задачи. На основе результатов из [8] доказываем двусторонние оценки для точного решения задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (6). *Тогда для решения $u(x,t)$ задачи* (1)–(3) *справедливы следующие двусторонние оценки:*

$$\min\left\{0, \min_{l_1 \le x \le l_2} u_0(x)\right\} \le u(x,t) \le \max\left\{0, \max_{l_1 \le x \le l_2} u_0(x)\right\}. \tag{11}$$

Доказательство. Для доказательства (11) сделаем преобразование функции $u(x,t)$ к новой функции $v(x,t)$, связанной с ней равенством

$$u(x,t) = v(x,t)e^{\lambda t},$$

где λ – пока произвольное число. Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda v - k\left(ve^{\lambda t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial k\left(ve^{\lambda t}\right)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - r\left(ve^{\lambda t}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{12}$$

с начальным и граничными условиями

$$v(x,0) = u_0(x), \quad l_1 \le x \le l_2, \tag{13}$$

$$v(l_1,t) = v(l_2,t) = 0, \quad t > 0. \tag{14}$$

Пусть максимум решения $v(x,t)$ задачи (12)–(14) достигается в некоторой точке $(x_0,t_0) \in (l_1,l_2) \times (0,T]$:

$$\max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} v(x,t) = v(x_0,t_0),$$

причем в точке (x_0,t_0) выполнены соотношения

$$\frac{\partial v(x_0,t_0)}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial v(x_0,t_0)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v(x_0,t_0)}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x_0-\Delta x,t_0) - 2v(x_0,t_0) + v(x_0+\Delta x,t_0)}{\Delta x^2} \leq 0,$$

и уравнение (12). Из этого следует, что

$$v(x,t) \leq v(x_0,t_0) \leq 0, \ \ \lambda > 0. \tag{15}$$

Если наибольшее в $\bar{Q}_T$ значение $v(x,t)$ принимается на границе $\{l_1,l_2\} \times (0,T] \cup [l_1,l_2] \times \{0\}$, то получаем

$$v(x,t) \leq \max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} v(x,t) = \max\left\{0, \max_{l_1\leq x\leq l_2} u_0(x)\right\}. \tag{16}$$

Тогда во всех случаях (15)–(16) справедлива оценка

$$v(x,t) \leq \max\left\{0, \max_{l_1\leq x\leq l_2} u_0(x)\right\},$$

из которой следует

$$u(x,t) \leq e^{\lambda T} \max\left\{0, \max_{l_1\leq x\leq l_2} u_0(x)\right\}, \ \ \lambda > 0.$$

Когда $\lambda \to 0$, получаем правую часть неравенств (11). Аналогично доказывается и случай минимума решения $u(x,t)$. Теорема доказана.

4. Безусловно монотонная разностная схема второго порядка аппроксимации на равномерных сетках для Гамма-уравнения. С помощью принципа регуляризации [2] уравнение (4) на обычной равномерной сетке по пространству и времени

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \ \ \bar{\omega}_h = \left\{x_i = ih, \ i = \overline{0,N}, \ hN = l\right\}, \ \ \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \left\{x_0 = 0, \ x_N = l\right\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{t_n = n\tau, \ n = \overline{0,N_0}, \ \tau N_0 = T\right\}, \ \ \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \left\{t_{N_0} = T\right\}$$

аппроксимируем разностной схемой вида

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{\kappa_i^n(y)}{h}\left(a_{i+1}^n(y)\frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} - a_i^n(y)\frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h}\right) +$$

$$+ b_i^+(y)a_{i+1}^n(y)\frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} + b_i^-(y)a_i^n(y)\frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h}, \tag{17}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \ \ y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0,$$

где

$$\kappa_i^n(y) = \left(1 + R_i^n(y)\right)^{-1}, \ \ R_i^n(y) = 0{,}5h\left|r\left(y_i^n\right)\right| \Big/ k\left(y_i^n\right) \geq 0,$$

$$b_i^+(y) = r^+\left(y_i^n\right) \Big/ k\left(y_i^n\right) \geq 0, \ \ b_i^-(y) = r^-\left(y_i^n\right) \Big/ k\left(y_i^n\right) \leq 0,$$

$$r^+\left(y_i^n\right)=0{,}5\left(r\left(y_i^n\right)+\left|r\left(y_i^n\right)\right|\right)\ge 0,\ \ r^-\left(y_i^n\right)=0{,}5\left(r\left(y_i^n\right)-\left|r\left(y_i^n\right)\right|\right)\le 0,$$

$$a_{i+1}^n(y)=0{,}5\left(k\left(y_{i+1}^n\right)+k\left(y_i^n\right)\right),\ \ a_i^n(y)=0{,}5\left(k\left(y_{i-1}^n\right)+k\left(y_i^n\right)\right).$$

Погрешность аппроксимации. Погрешность аппроксимации схемы (17) вычисляется по следующей формуле:

$$\psi=-u_t+\kappa(u)\left(a(u)\hat{u}_{\bar{x}}\right)_x+b^+(u)a^{(+1)}(u)\hat{u}_x+b^-(u)a(u)\hat{u}_{\bar{x}}, \tag{18}$$

где

$$v=v^n=v(t_n),\ \ \hat{v}=v^{n+1}=v(t_{n+1}),\ \ v_x=(v_{i+1}-v_i)/h,$$

$$v_{\bar{x}}=(v_i-v_{i-1})/h,\ \ a^{(+1)}(u)=a_{i+1}(u),\ \ a(u)=a_i(u).$$

Учитывая, что

$$b^+(u)=r^+(u)/k(u),\ \ b^-(u)=r^-(u)/k(u),$$

$$r^+(u)+r^-(u)=r(u),\ \ r^+(u)-r^-(u)=\left|r(u)\right|,$$

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}+O(\tau),\ \ \left(a(u)\hat{u}_{\bar{x}}\right)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+O\left(h^2+\tau\right),$$

$$a^{(+1)}(u)\hat{u}_x=k(u)\frac{\partial u}{\partial x}+0{,}5h\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+O\left(h^2+\tau\right),$$

$$a(u)\hat{u}_{\bar{x}}=k(u)\frac{\partial u}{\partial x}-0{,}5h\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+O\left(h^2+\tau\right),$$

получаем, что

$$b^+(u)a^{(+1)}(u)\hat{u}_x+b^-(u)a(u)\hat{u}_{\bar{x}}=r(u)\frac{\partial u}{\partial x}+R(u)\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+O\left(h^2+\tau\right).$$

Тогда из (18) имеем

$$\psi=\frac{\left(R(u)\right)^2}{1+R(u)}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+O\left(h^2+\tau\right)=O\left(h^2+\tau\right).$$

Таким образом, разностная схема (17) имеет второй порядок аппроксимации по пространственной переменной и первый – по временной.

Монотонность, двусторонние оценки и априорная оценка в норме *C*. Данная разностная схема (17) записывается в виде (7)

$$A_i^n y_{i-1}^{n+1}-C_i^n y_i^{n+1}+B_i^n y_{i+1}^{n+1}=-F_i^n,\ \ i=1,2,\ldots,N-1, \tag{19}$$

$$y_0^{n+1}=y_N^{n+1}=0, \tag{20}$$

с коэффициентами, определяемыми следующим образом:

$$A_i^n=\frac{\tau}{h^2}a_i^n(y)\left(\kappa_i^n(y)-hb_i^-(y)\right),\ \ B_i^n=\frac{\tau}{h^2}a_{i+1}^n(y)\left(\kappa_i^n(y)+hb_i^+(y)\right),$$

$$C_i^n=1+A_i^n+B_i^n,\ \ F_i^n=y_i^n,\ \ D_i^n=C_i^n-A_i^n-B_i^n=1,\ \ i=\overline{1,N-1}.$$

Схема (19)–(20) является монотонной, если выполнены условия положительности коэффициентов (8)–(9) [2], т. е.

$$A_i^n>0,\ \ B_i^n>0,\ \ D_i^n=C_i^n-A_i^n-B_i^n>0.$$

Нам нужно доказать, что $a_i^n(y) > 0$ для всех i, n. Действительно, когда $n = 0$, очевидно, что $a_i^0(y) = 0{,}5\left(k(u_{0i}) + k(u_{0i-1})\right) > 0.$ Предположим, что для произвольного n тоже верно неравенство $a_i^n(y) > 0.$ Тогда из этого предположения имеем $A_i^n > 0,\ B_i^n > 0,\ C_i^n > 0.$ По лемме на основании оценки (10) для произвольного $t = t_n = \omega_\tau$ и всех $i = 0,1,\ldots, N$ имеем

$$\min\left\{0, \min_{1\le i\le N-1} y_i^n\right\} \le y_i^{n+1} \le \max\left\{0, \max_{1\le i\le N-1} y_i^n\right\}. \tag{21}$$

Используя индукцию по n, из (21) получаем двусторонние оценки через входные данные без предположения о знакоопределенности входных данных:

$$\min\left\{0, \min_{l_1\le x\le l_2} u_0(x)\right\} \le y_i^{n+1} \le \max\left\{0, \max_{l_1\le x\le l_2} u_0(x)\right\},\ \ i = 0,1,\ldots N. \tag{22}$$

Из (22) получаем $y_i^{n+1} \in \bar{D}_u$, т. е. $a_i^{n+1}(y) = 0{,}5\left(k\left(y_i^{n+1}\right) + k\left(y_{i-1}^{n+1}\right)\right) > 0.$ Так как выполнены все условия положительности коэффициентов (8)–(9), то схема (19)–(20) монотонна при любых h и τ (безусловная монотонность). Следовательно, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (6). *Тогда разностная схема* (19)–(20) *безусловно монотонна и для ее решения* $y \in \bar{D}_u$ *верны двусторонние оценки* (22).

На основании принципа максимума обычным образом устанавливается и априорная оценка в норме C.

Теорема 3. *При выполнении условия* (6) *для разностной схемы* (19)–(20) *справедлива априорная оценка*

$$\left\|y^n\right\|_{\bar{C}} \le \left\|u_0\right\|_{\bar{C}}.$$

Доказательство. Так как все коэффициенты схемы удовлетворяют неравенствам (8)–(9), то по следствию имеем $\left\|y^{n+1}\right\|_{\bar{C}} \le \left\|y^n\right\|_{\bar{C}}$. В итоге, находим цепочку соотношений

$$\left\|y^{n+1}\right\|_{\bar{C}} \le \left\|y^n\right\|_{\bar{C}} \le \left\|y^{n-1}\right\|_{\bar{C}} \le \ldots \le \left\|u_0\right\|_{\bar{C}}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Максимальное и минимальное значения разностного решения не зависят от коэффициентов диффузии $k(u)$ и конвекции $r(u)$.

Замечание 2. Для случая $c = 0$ уравнение (1) может быть записано в виде

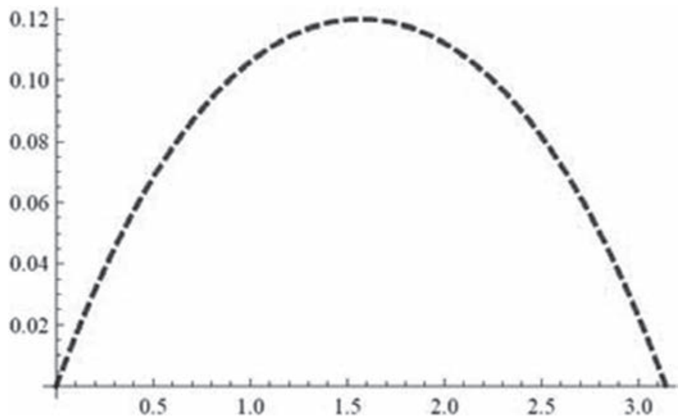
$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{k}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \ \bar{k}(x,u) = e^x k(u),\ \ k(u) = \beta'(u).$$

Тогда при построении для него монотонных разностных схем нам не нужно использовать принцип регуляризации.

Замечание 3. Полученные в (22) двусторонние оценки полностью согласованы с дифференциальной задачей (11).

Пример функции $\beta(u)$. Для случая модели Frey [6] $\beta(u) = u/(1-\rho u)^2$, $\rho > 0$ из (5) получаем коэффициент $k(u)$ вида $k(u) = (1+\rho u)/(1-\rho u)^3$. Тогда в силу (6) уравнение (1) будет параболическим, если $k(u) > 0$, $\forall\, u \in \bar{D}_u$, т. е. если

$$-\frac{1}{\rho} < u(x,t) < \frac{1}{\rho}. \tag{23}$$



Численное решение при $t = 1$ с шагом $h = \pi/31 \approx 0{,}1$ и $\tau = 0{,}1$
Numerical solution at $t = 1$ with step $h = \pi/31 \approx 0.1$ and $\tau = 0.1$

Очевидно, что для решения разностной схемы (19)–(20), аппроксимирующей задачу (1)–(3), условия (23) выполнены, так как по теореме 2 для всех $i = 0,1,2,\ldots, N$, $n = 0,1,2,\ldots, N_0$ имеем

$$-\frac{1}{\rho} < \min\left\{0, \min_{l_1 \le x \le l_2} u_0(x)\right\} \le y_i^n \le \max\left\{0, \max_{l_1 \le x \le l_2} u_0(x)\right\} < \frac{1}{\rho}.$$

5. Вычислительный эксперимент. Рассмотрим частный случай Гамма-уравнения с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+u}{(1-u)^3}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \le 1, \tag{24}$$

$$u(x,0) = \sin x, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \tag{25}$$

Коэффициент $k(u) = (1+u)/(1-u)^3$ не определенен при $u = 1$, т. е. он не определенен с начальным условием $u_0(x) = \sin x$ при $x = x^* = \pi/2$. Поэтому построим равномерную сетку с шагом $h = \pi/(2N+1)$, чтобы $x_i \neq x^*$. На рисунке показан график приближенных решений задачи (24)–(25) при $t = 1$, полученных с использованием разностной схемы (19)–(20) с шагом $h = \pi/31 \approx 0{,}1$ и $\tau = 0{,}1$.

З а м е ч а н и е 4. При $x = x^*$ для случая Гамма-уравнения (24)–(25) численное решение не определяется. Решение, приведенное на рисунке, не является математически правильным, так как решение задачи (24)–(25) не определено при таком выборе начального условия. Следовательно, очень важно строить сеточную область таким образом, чтобы точки экстремума входных данных попадали в узлы сетки.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору П. П. Матусу за помощь, оказанную в данной работе.

Acknowledgments

The author is very grateful to Professor P. P. Matus for help in this work.

Список использованных источников

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
2. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
3. Матус, П. П. Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / П. П. Матус, В. Т. К. Туен, Ф. Гаспар // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 18–22.
4. Матус, П. П. Принцип максимума для разностных схем с незнакопостоянными входными данными / П. П. Матус, Л. М. Хиеу, Л. Г. Волков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 5, – С. 13–17.
5. Matus, P. P. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations / P. P. Matus, L. M. Hieu, L. G. Volkov // J. Comput. Appl. Math. – 2017. – Vol. 310. – P. 186–199.

6. Koleva, M. N. A second-order positivity preserving numerical method for Gamma equation / M. N. Koleva, L. G. Vulkov // Appl. Math. Comput. – 2013. – Vol. 220. – P. 722–734.

7. Farago, I. Discrete maximum principle and adequate discretizations of linear parabolic problems / I. Farago, R. Horvath // SIAM J. Sci. Comput. – 2006. – Vol. 28, N 6. – P. 2313–2336.

8. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

9. Jandacka, M. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile / M. Jandacka, D. Sevcovic // J. Appl. Math. – 2005. – Vol. 3. – P. 235–258.

10. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.

References

1. Vladimirov V.S. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Nauka, 1981. 512 p. (in Russian)

2. Samarskiy A.A. *The theory of difference schemes*. Moscow, Nauka, 1989. 656 p. (in Russian)

3. Matus P.P., Tyuen V.T.K., Gaspar F. Monotone difference schemes for linear parabolic equation with boundary conditions of the mixed kind. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2014, vol. 58, no. 5, pp. 18–22. (in Russian)

4. Matus P.P., Hieu L.M, Volkov L.G. The maximum principle for finite-difference schemes with non-sign-constant input data. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2015, vol. 59, no. 5, pp. 13–17. (in Russian)

5. Matus P.P., Hieu L.M., Volkov L.G. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 310, pp. 186–199. doi: 10.1016/j.cam.2016.04.006.

6. Koleva M.N., Vulkov L.G. A second-order positivity preserving numerical method for Gamma equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, vol. 220, pp. 722–734. doi: 10.1016/j.amc.2013.06.082.

7. Farago I., Horvath R. Discrete maximum principle and adequate discretizations of linear parabolic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2006, vol. 28, no. 6, pp. 2313–2336. doi:10.1137/050627241.

8. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Moscow, Nauka, 1967. 736 p. (in Russian)

9. Jandacka M., Sevcovic D. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics*, 2005, no. 3, pp. 235–258. doi: 10.1155/JAM.2005.235.

10. Fridman A. *Partial differential equations of parabolic type*. Moscow, Mir Publishers, 1968. 428 p. (in Russian)

Информация об авторе

Ле Минь Хиеу – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: lmhieuktdn@gmail.com

Для цитирования

Ле Минь Хиеу. Безусловно монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации на равномерных сетках для Гамма-уравнения / Ле Минь Хиеу // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 47–54.

Information about the author

Le Minh Hieu – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lmhieuktdn@gmail.com

For citation

Le Minh Hieu. Unconditionally monotone finite difference scheme of the second-order approximation on uniform grids for the Gamma equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2016, no. 4, pp. 47–54. (in Russian)