УДК 517.925:517.977

А. К. ДЕМЕНЧУК

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БЛОЧНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Рассматривается линейная квазипериодическая система управления, замкнутая линейной по фазовым переменным обратной связью. Предполагается, что усредненная матрица коэффициентов имеет блочное представление. Решается задача управления асинхронным многочастотным спектром.

Ключевые слова: линейная квазипериодическая система управления, асинхронный спектр.

A. K. DEMENCHUK

CONTROL PROBLEM OF AN ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF QUASIPERIODIC LINEAR SYSTEMS WITH A BLOCK REPRESENTATION OF AVERAGE COEFFICIET MATRIX

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by

We conseder a linear quasiperiodic control system closed by the phase variables-linear feedback. It is assumed that the average coefficient matrix has a block representation. The control problem of an asynchronous multifrequency spectrum is solved.

Keywords: linear quasiperiodic control system, asynchronous spectrum.

Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, называют асинхронным режимом [1]. Асинхронные режимы присущи, в частности, линейным дифференциальным системам. Задача синтеза асинхронных режимов линейных периодических систем изучалась в [2] и др. Представляется интересным решение такого рода задач для колебательных процессов более сложных типов, в частности многочастотных.

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \ge 2, \tag{1}$$

где $A(t)$ – непрерывная квазипериодическая $(n \times n)$-матрица с базисом частот $K = \{2\pi/\omega_1,\ldots,2\pi/\omega_k\}$, B – постоянная $(n \times n)$-матрица. Пусть управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным:

$$u = U(t)x, \tag{2}$$

в котором непрерывная квазипериодическая $(n \times n)$-матрица $U(t)$ имеет такое же множество частот (показателей Фурье), что и матрица $A(t)$.

Постановка задачи. Задачу выбора матрицы $U(t)$ (коэффициента обратной связи) определим таким образом, чтобы замкнутая управлением (2) система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное квазипериодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством), и будем называть задачей управления асинхронным многочастотным спектром с целевым множеством L.

Предварительно заметим, что если свободная система $\dot{x} = A(t)x$ имеет сильно нерегулярные периодические решения, то поставленная задача управления разрешима. Также не вызывает затруднений ее решение в случае невырожденной матрицы B.

Поэтому далее без ограничения общности будем предполагать, что первые d строк матрицы B – нулевые, а остальные $r = n - d$ строк – линейно независимы. Обозначим через $B_{r,n}$ матрицу размерности $r \times n$, составленную из последних r строк матрицы B. С учетом согласования размерностей матрицу коэффициентов $A(t)$ разобъем на четыре блока соответствующих размерностей $A^{(11)}_{d,d}(t)$, $A^{(21)}_{r,d}(t)$, $A^{(12)}_{d,r}(t)$, $A^{(22)}_{r,r}$.

Поскольку матрица $A(t)$ является квазипериодической с базисом частот $K = \{2\pi/\omega_1,\ldots,2\pi/\omega_k\}$, то найдется непрерывная по совокупности переменных функция $\mathrm{A}(t_1,\ldots,t_k)$, периодическая по t_j с периодами соответственно ω_j, $j = 1,\ldots,k$, такая, что $\mathrm{A}(t,\ldots,t) \equiv A(t)$. Найдем среднее значение квазипериодической матрицы $A(t)$:

$$\widehat{A} = \frac{1}{\omega_1 \ldots \omega_k} \int\limits_0^{\omega_1} \ldots \int\limits_0^{\omega_k} \mathrm{A}(t_1,\ldots,t_k)\, dt_1 \ldots dt_k .$$

Важным этапом при решении задачи управления асинхронным спектром линейных систем является случай совпадения рангов матрицы при управлении и расширенной матрицы, составленной из этой матрицы и усреднения матрицы коэффиицентов. Приведем решение ослабленного варианта этой задачи, когда

$$A^{(12)}_{d,r}(t) \equiv 0, \qquad \widehat{A}^{(11)} = 0. \tag{4}$$

Пусть требуется, чтобы спектр нерегулярных периодических колебаний замкнутой управлением (2) системы (1) содержал целевое множество попарно различных нетривиальных частот $L = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}$, рациональный базис которых $L' = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_{l'}\}$, $l' \le l$ образует с базисом $K = \{2\pi/\omega_1,\ldots,2\pi/\omega_k\}$ частот матрицы коэффициентов системы (1) рационально линейно независимое множество. Справедлива

Теорема. *При выполнении предположения* (4) *для системы* (1) *задача управления асинхронным многочастотным спектром с целевым множеством частот* L *разрешима тогда и только тогда, когда выполняется оценка* $|L| \le [r/2]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть поставленная задача разрешима, т. е. найдется непрерывный квазипериодический с частотным базисом $K = \{2\pi/\omega_1,\ldots,2\pi/\omega_k\}$ коэффициент обратной связи $U(t)$ такой, что замкнутая система (3) имеет сильно нерегулярное квазипериодическое решение $x(t)$ с целевым множеством частот $L = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}$. Поскольку матрица $U(t)$ является квазипериодической с таким же множеством частот, что и матрица коэффициентов $A(t)$, то базис $K = \{2\pi/\omega_1,\ldots,2\pi/\omega_k\}$ можно принять за рациональный базис и множества частот квазипериодического коэффициента обратной связи $U(t)$. Тогда найдется непрерывная по совокупности переменных функция $\Upsilon(t_1,\ldots,t_k)$, периодическая по t_j с периодами соответственно ω_j, $j = 1,\ldots,k$, такая, что $\Upsilon(t,\ldots,t) \equiv U(t)$, при этом

$$\widehat{U} = \frac{1}{\omega_1 \ldots \omega_k} \int\limits_0^{\omega_1} \ldots \int\limits_0^{\omega_k} \Upsilon(t_1,\ldots,t_k)\, dt_1 \ldots dt_k .$$

Из работы [3] вытекает, что в таком случае выполняется тождество

$$\dot{x}(t) - (\hat{A} + B\hat{U})x(t) \equiv 0,$$

откуда в силу строения матрицы B следует справедливость тождеств

$$\dot{x}^{[d]}(t) \equiv 0, \quad \dot{x}_{[r]}(t) - \left(\hat{A}^{(21)}_{r,d} + B_{r,n}\hat{U}_{n,d}\right)x^{[d]}(t) - \left(\hat{A}^{(22)}_{r,r} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r}\right)x_{[r]}(t) \equiv 0,$$

где $x^{[d]}(t)$, $x_{[r]}(t)$ – соответствено первые d и последние r компонент вектора $x(t)$, $\hat{U}_{n,d}$ и $\hat{U}_{n,r}$ – матрицы, составленные соответственно из d первых и r остальных столбцов матрицы $\hat{U}$. Из первого тождества вытекает, что составляющая $x^{[d]}(t) \equiv \text{const}$ решения $x(t)$ не имеет частот из целевого множества L. Поэтому частоты целевого множества могут содержаться только в составляющей $x_{[r]}(t)$. Из второго тождества следует, что мощность спектра частот квазипериодического решения соответствующей системы определяется числом пар чисто мнимых комплексно-сопряженных пар собственных значений $(r \times r)$-матрицы $(\hat{A}^{(22)}_{r,r} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r})$, что свидетельствует о справедливости оценки теоремы.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Требуемый для решения поставленной задачи квазипериодический коэффициент обратной связи будем искать в так называемом каноническом виде $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$, где $\hat{U}$ – постоянная $(n \times n)$-матрица, $\tilde{U}(t)$ – непрерывная квазипериодическая $(n \times n)$-матрица с частотным базисом $K = \{2\pi/\omega_1,\dots,2\pi/\omega_k\}$ и нулевым средним значением. Согласно [3], множество сильно нерегулярных квазипериодических решений системы (3) совпадает с множеством таких же решений следующей системы, состоящей из двух уравнений

$$\dot{x} = (\hat{A} + B\hat{U})x \tag{5}$$

и

$$(\tilde{A}(t) + B\tilde{U}(t))x = 0. \tag{6}$$

Уравнение (5) можно записать в виде

$$\dot{x}^{[d]} = 0, \quad \dot{x}_{[r]} = B_{r,n}\hat{U}_{n,d}x^{[d]} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r}x_{[r]},$$

где $x = \text{col}(x^{[d]}, x_{[r]})$, $x^{[d]} = \text{col}(x_1,\dots,x_d)$, $x_{[r]} = \text{col}(x_{d+1},\dots,x_n)$. Первая из полученных систем не имеет отличных от стационарных периодических решений. Поэтому возьмем $x^{[d]}(t) \equiv 0$. Тогда вторая система запишется в виде

$$\dot{x}_{[r]} = (\hat{A}^{(22)}_{r,r} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r})x_{[r]}. \tag{7}$$

Возьмем постоянную $(r \times r)$-матрицу U_1, имеющую собственные числа

$$\pm i\lambda_1,\dots,\pm i\lambda_l,$$

где $\lambda_1,\dots, \lambda_l$ – частоты из целевого множества L, что возможно в силу оценки, указанной в теореме. Пусть $Y = U_0$ – какое-либо частное решение системы $B_{r,n}Y = E_{r,r}$, где $E_{r,r}$ – единичная $(r \times r)$-матрица. Положим

$$\hat{U}_{n,r} = U_0(-A^{(22)}_{r,r} + U_1). \tag{8}$$

Тогда система (7) примет вид

$$\dot{x}_{[r]} = (A^{(22)}_{r,r} + B_{r,n}U_0(-A^{(22)}_{r,r} + U_1))x_{[r]} = U_1 x_{[r]}$$

и с учетом свойств матрицы U_1 будет иметь квазипериодическое решение

$$x_{[r]}(t) = \sum_{j=1}^{l} A_j \cos\lambda_j t + B_j \sin\lambda_j t,$$

где A_j, B_j зависят от $2l$ произвольных вещественных постоянных.

Значит, если выбрать постоянную $(n \times n)$-матрицу $\hat{U}$ так, что ее блок $\hat{U}_{n,d}$ из первых d столбцов состоит из произвольных вещественных чисел, а блок $\hat{U}_{n,r}$ из остальных r столбцов определяется соотношением (8), то система (5) будет иметь $2l$-параметрическое семейство квазипериодических решений

$$x(t) = \mathrm{col}[0,\ldots 0, x_{[r]}(t)] \qquad (9)$$

с целевым множеством частот L.

Согласно [3], определяемая равенством (9) функция $x(t)$ будет удовлетворять замкнутой системе (3), если эта функция является решением системы (6), которая с учетом полученного выше тождества $x^{[d]}(t) \equiv 0$ примет вид

$$(\tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,r}(t))x_{[r]}(t) = 0, \qquad (10)$$

где $\tilde{U}_{n,r}(t)$ – $(n \times r)$-матрица, составленная из последних r столбцов матрицы $\tilde{U}(t)$. Как видим, элементами блока $\tilde{U}_{n,d}(t)$ из первых d столбцов матрицы $\tilde{U}(t)$ могут быть произвольные непрерывные квазипериодические функции с базисом частот $K = \{2\pi/\omega_1,\ldots,2\pi/\omega_k\}$ и нулевым средним значением. Положим

$$\tilde{U}_{n,r}(t) = -U_0\tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t). \qquad (11)$$

Подставляя $\tilde{U}_{n,r}(t)$ в равенство (10), получим тождество.

Таким образом, при выполнении условий теоремы для системы (3) разрешима задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L. Требуемый для ее решения коэффициент обратной связи построен в виде $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$, где у постоянной $(n \times n)$-матрицы $\hat{U}$ блок $\hat{U}_{n,d}$ из первых d столбцов состоит из произвольных вещественных чисел, блок $\hat{U}_{n,r}$ из остальных r столбцов определяется равенством (8), элементами блока $\tilde{U}_{n,d}(t)$ из первых d строк матрицы $\tilde{U}(t)$ будут произвольные квазипериодическое функции с базисом частот $K = \{2\pi/\omega_1,\ldots,2\pi/\omega_k\}$ и нулевым средним, а блок $\tilde{U}_{n,r}(t)$ из остальных r строк определяется равенством (11). Сильно нерегулярное квазипериодическое решение с целевым множеством частот $L = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}$ замкнутой управлением (2) системы (1) представлено тригонометрическим многочленом (9).

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16Р-059).

Список использованной литературы

1. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний / Д. И. Пеннер [и др.] // Успехи физ. наук. – 1973. – Т. 109, вып. 1. – С. 402–406.

2. *Деменчук, А. К.* Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А. К. Деменчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 37–42.

3. *Грудо, Э. И.* О периодических решениях с несоизмеримыми периодами периодических дифференциальных систем / Э. И. Грудо // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 9. – С. 1499–1504.

Поступила в редакцию 06.07.2016