

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 621.3.088

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-69-76>

Поступила в редакцию 28.01.2019

Received 28.01.2019

**А. В. Гусинский, В. А. Богуш***Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь***ПОЛНАЯ 16-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ КАЛИБРОВКИ И НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ**

**Аннотация.** Разработана полная математическая модель измерения параметров матрицы рассеяния для  $[S_x]$  объекта измерения в виде четырехполюсника, в которой математическая модель восьмиполюсника погрешностей описывается 16 параметрами матрицы рассеяния  $[E]$ . Дополнительно в сравнении с 12-параметрической моделью восьмиполюсника погрешностей включены четыре параметра, позволяющие учесть утечки, паразитные передачи при исследовании СВЧ-модулей (СВЧ-микросборок). Благодаря использованию матричных методов анализа получены уравнения в матричном виде, связывающие матрицы результатов измерений  $[S_{\mu}]$  и действительные значения параметров матрицы  $[S_x]$ , при этом с целью обеспечения возможности решения этих уравнений вместо матрицы рассеяния  $[E]$  предложено использовать матрицу передачи  $[T]$  в виде клеточных матриц  $[T_{aa}]$ ,  $[T_{ab}]$ ,  $[T_{ba}]$ ,  $[T_{bb}]$ .

**Ключевые слова:** восьмиполюсник погрешностей, уравнение калибровки в матричном виде, уравнение непосредственного измерения в матричном виде

**Для цитирования.** Гусинский, А. В. Полная 16-параметрическая модель процессов калибровки и непосредственного измерения параметров четырехполюсников / А. В. Гусинский, В. А. Богуш // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 69–76. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-69-76>

**A. V. Gusinsky, V. A. Bogush***Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus***FULL 16-PARAMETRIC MODEL OF CALIBRATION PROCESSES AND DIRECT MEASUREMENT OF PARAMETERS OF FOUR-POLES**

**Abstract.** A complete mathematical model for measuring the parameters of the scattering matrix for a measurement object  $[S_x]$  in the form of a four-port network is developed, in which the mathematical model of the eight-port error is described by 16 parameters of the scattering matrix  $[E]$ . In addition, in comparison with the 12-parameter model of the eight-port error network, four parameters are included, which allow taking into account leaks, parasitic transmissions of microwave modules under study (microwave microassemblies). Due to the use of matrix analysis methods, the equations in matrix form are obtained that connect the matrices of the measurement object  $[S_{\mu}]$  and the actual values of the matrix parameters  $[S_x]$ , with the aim of enabling the solution of these equations instead of the scattering matrix  $[E]$  to use a transmission matrix  $[T]$  in the form of cellular matrices  $[T_{aa}]$ ,  $[T_{ab}]$ ,  $[T_{ba}]$ ,  $[T_{bb}]$ .

**Keywords:** eight-terminal error, calibration equation in matrix form, equation of direct measurement in matrix form

**For citation.** Gusinsky A. V., Bogush V. A. Full 16-parametric model of calibration processes and direct measurement of parameters of four-poles. *Vesti Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 69–76 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-69-76>

В общем случае любой восьмиполюсник погрешностей характеризуется матрицей рассеяния 4-го порядка ( $n = 4$ ), т. е. 16 параметрами (16 комплексными величинами).

Представим процедуру моделирования погрешностей в виде рис. 1, где восьмиполюсник погрешностей описывается матрицей рассеяния 4-го порядка  $[E]$ , ОИ – четырехполюсником, который характеризуется матрицей рассеяния  $[S_x]$ , а ИС – четырехполюсником с матрицей рассеяния  $[S_{\mu}]$ . Идеальная ИС, т. е. без систематических погрешностей, как бы «воспринимает» объект измерения через гипотетический восьмиполюсник погрешностей, который характеризует систематические погрешности реальной ИС. Такая математическая модель измерения является полной для ОИ в виде четырехполюсника.



Рис. 1. Полная математическая модель измерения для объекта измерения в виде четырехполюсника  
 Fig. 1. A complete mathematical measurement model for a measurement object in the form of a four-terminal network

Матрица  $[E]$  имеет вид

$$[E] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В этом случае 16-параметрическая математическая модель восьмиполюсника погрешностей будет иметь вид, представленный на рис. 2.

Отметим, что вариант моделирования с 12-параметрическим восьмиполюсником погрешностей является частным случаем рассматриваемой 16-параметрической модели, для которой

$$\begin{cases} e_{11} = E_D E_{TR} & e_{21} = E_x & e_{31} = 1 & e_{41} = 0, \\ e_{12} = E_{XR} & e_{22} = E_{DR} E_T & e_{32} = 0 & e_{42} = 1, \\ e_{13} = E_R E_{TR} & e_{23} = E_R E_{LR} E_X & e_{33} = E_S + E_R E_{LR} & e_{43} = 0, \\ e_{14} = E_{RR} E_L E_{XR} & e_{24} = E_{RR} E_T & e_{34} = 0 & e_{44} = E_{SR} + E_{RR} E_L. \end{cases} \quad (2)$$

Как видно из матрицы (2), в случае 12-параметрической модели предполагаются отсутствующими связи (утечки, паразитные передачи) между зажимами 2–3', 2–4', 1–4' и 3–4', которые могут быть при необходимости учтены 16-параметрической моделью восьмиполюсника погрешностей. Потребность в таком учете возникает, например, при исследовании СВЧ-модулей (СВЧ-микросборок), когда к входным зажимам объекта измерения приходится подключать дополнительные переходные устройства (зонды, пробники и т. п.), связывающие входы устройства (например, выполненные на микрополосках и т. п.) с измерительными входами.

Найдем выражения уравнений калибровки и восстановления по результатам измерений  $[S_{и}]$  действительных параметров матрицы  $[S_x]$  объекта измерения, используя матричные методы анализа схемы рис. 2, на котором через  $a_i$  обозначены падающие, а через  $b_i$  – отраженные волны на входах восьмиполюсника погрешностей ( $i = 1, 4$ ). При этом относительно входов объекта измерения падающими будут волны  $b_3$  и  $b_4$ , а отраженными –  $a_3$  и  $a_4$ .

Тогда для объекта измерения можно записать

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = [S_x] \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11x} & S_{12x} \\ S_{21x} & S_{22x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Аналогично для измерительной системы, характеризуемой матрицей  $[S_{и}]$ , можно записать

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [S_{и}] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11и} & S_{12и} \\ S_{21и} & S_{22и} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

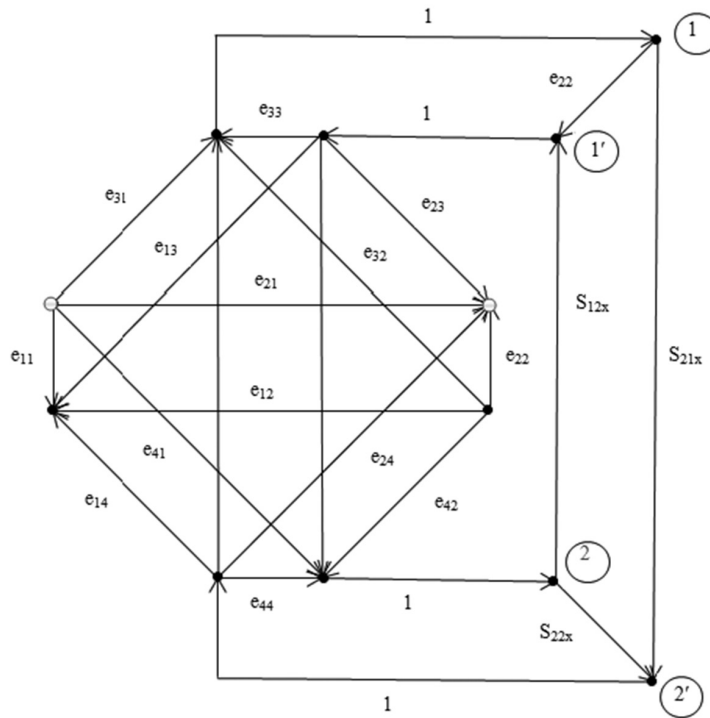


Рис. 2. 16-параметрическая математическая модель восьмиполосника погрешностей

Fig. 2. 16-parameter parametric mathematical model of the eight-terminal error

Для восьмиполосника погрешностей, характеризуемого матрицей рассеяния  $[E_{\mu}]$ , запишем

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = [E] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Существуют теоретико-групповые подходы к анализу уравнений вида (5), однако в данной работе будут использованы прямые матричные методы [1–6].

Запишем уравнения (5) в виде клеточных матриц

$$\begin{bmatrix} [b_{12}] \\ [b_{34}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [E_1] [E_2] \\ [E_3] [E_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_{12}] \\ [a_{34}] \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} [a_{12}] &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; & [b_{12}] &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}; & [a_{34}] &= \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}; & [b_{34}] &= \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}; \\ [E_1] &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}; & [E_2] &= \begin{bmatrix} e_{13} & e_{14} \\ e_{23} & e_{24} \end{bmatrix}; & [E_3] &= \begin{bmatrix} e_{31} & e_{32} \\ e_{41} & e_{42} \end{bmatrix}; & [E_4] &= \begin{bmatrix} e_{33} & e_{34} \\ e_{43} & e_{44} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Связь падающих и отраженных волн на портах многополосников может быть выражена через параметры волновой матрицы передачи  $[T]$ , которую можно записать как

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

или в виде клеточных матриц

$$\begin{bmatrix} [a_{12}] \\ [b_{12}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{aa}] & [T_{ab}] \\ [T_{ba}] & [T_{bb}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [b_{34}] \\ [a_{34}] \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Клеточные матрицы будут равны:

$$[T_{aa}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}; \quad [T_{ab}] = \begin{bmatrix} t_{13} & t_{14} \\ t_{23} & t_{24} \end{bmatrix}; \quad [T_{ba}] = \begin{bmatrix} t_{31} & t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{bmatrix}; \quad [T_{bb}] = \begin{bmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}.$$

Выражения (3) и (4) запишем в следующем виде:

$$[a_{34}] = [S_x][b_{34}]; \quad (9)$$

$$[b_{12}] = [S_y][a_{12}]. \quad (10)$$

В общем случае связь матрицы рассеяния  $[E]$  с матрицей передачи  $[T]$  восьмиполосника определяется следующими соотношениями:

$$[E] = \begin{bmatrix} [T_{ba}][T_{aa}]^{-1} & [T_{bb}] - [T_{ba}][T_{aa}]^{-1}[T_{ab}] \\ [T_{aa}]^{-1} & -[T_{aa}]^{-1}[T_{ab}] \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [E_3]^{-1} & -[E_3]^{-1}[E_4] \\ [E_1][E_3]^{-1} & [E_2] - [E_1][E_3]^{-1}[E_4] \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Распишем выражения (11) и (12) подробнее, раскрывая матрицы-клетки:

$$[E_1] = [T_{ba}][T_{aa}]^{-1} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} (t_{31} t_{22} - t_{32} t_{21})(t_{32} t_{11} - t_{31} t_{12}) \\ (t_{41} t_{22} - t_{42} t_{21})(t_{42} t_{11} - t_{41} t_{12}) \end{bmatrix};$$

$$[E_1] = \begin{bmatrix} \frac{M_{14,34}(T)}{M_{34,34}(T)} & \frac{M_{24,34}(T)}{M_{34,34}(T)} \\ \frac{M_{13,34}(T)}{M_{34,34}(T)} & \frac{M_{23,34}(T)}{M_{34,34}(T)} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где  $Z = t_{11} t_{22} - t_{12} t_{21} = M_{34,34}(T)$ ;  $M_{ij,34}(T)$  – миноры второго порядка матрицы  $[T]$ , полученные вычеркиванием  $i$ -й и  $j$ -й строк и 3-го и 4-го столбцов;

$$[E_2] = [T_{bb}] - [T_{ba}][T_{aa}]^{-1}[T_{ab}] = \begin{bmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_{31} & t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_{13} & t_{14} \\ t_{23} & t_{24} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} - \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} t_{31} & t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{21} & t_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{13} & t_{14} \\ t_{23} & t_{24} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \left\{ Z \begin{bmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} t_{13}(t_{31} t_{22} - t_{32} t_{21}) + t_{23}(t_{32} t_{11} - t_{31} t_{12}) & t_{14}(t_{31} t_{22} - t_{32} t_{21}) + t_{24}(t_{32} t_{11} - t_{31} t_{12}) \\ t_{13}(t_{41} t_{22} - t_{42} t_{21}) + t_{23}(t_{42} t_{11} - t_{41} t_{12}) & t_{14}(t_{41} t_{22} - t_{42} t_{21}) + t_{24}(t_{42} t_{11} - t_{41} t_{12}) \end{bmatrix} \right\};$$

$$[E_2] = \begin{bmatrix} \frac{M_{4,4}(T)}{M_{34,34}(T)} & \frac{M_{3,4}(T)}{M_{34,34}(T)} \\ \frac{M_{3,4}(T)}{M_{34,34}(T)} & \frac{M_{3,3}(T)}{M_{34,34}(T)} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

здесь  $M_{ij,34}(T)$  – миноры третьего порядка матрицы передачи  $[T]$ , полученные из нее вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Раскрываем аналогичным образом клеточные матрицы  $[E_3]$  и  $[E_4]$ :

$$[E_3] = [T_{aa}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{t_{22}}{M_{34,34}(T)} - \frac{t_{12}}{M_{34,34}(T)} & \\ \\ \frac{t_{21}}{M_{34,34}(T)} & \frac{t_{11}}{M_{34,34}(T)} \end{bmatrix}; \quad (15)$$

$$[E_4] = -[T_{aa}]^{-1}[T_{ab}] = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{21} & t_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{13} & t_{14} \\ t_{23} & t_{24} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} (t_{22}t_{13} + t_{12}t_{23}) & (-t_{22}t_{14} + t_{12}t_{24}) \\ (t_{21}t_{13} - t_{11}t_{23}) & (t_{21}t_{14} - t_{11}t_{24}) \end{bmatrix};$$

$$[E_4] = \begin{bmatrix} \frac{M_{34,14}(T)}{M_{34,34}(T)} & \frac{M_{34,13}(T)}{M_{34,34}(T)} \\ \frac{M_{34,24}(T)}{M_{34,34}(T)} & \frac{M_{34,23}(T)}{M_{34,34}(T)} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Выражение (11), определяющее связь параметров матрицы рассеяния  $[E]$  восьмиполосника погрешностей с параметрами матрицы передачи  $[T]$ , будет иметь вид

$$[E] = \begin{bmatrix} e_{11} = -\frac{M_{14,34}(T)}{M_{34,34}(T)} & e_{12} = \frac{M_{24,34}(T)}{M_{34,34}(T)} & e_{13} = \frac{M_{4,4}(T)}{M_{34,34}(T)} & e_{14} = \frac{M_{3,4}(T)}{M_{34,34}(T)} \\ e_{21} = -\frac{M_{13,34}(T)}{M_{34,34}(T)} & e_{22} = \frac{M_{23,34}(T)}{M_{34,34}(T)} & e_{23} = \frac{M_{3,4}(T)}{M_{34,34}(T)} & e_{24} = \frac{M_{3,3}(T)}{M_{34,34}(T)} \\ e_{31} = -\frac{t_{22}}{M_{34,34}(T)} & e_{32} = -\frac{t_{12}}{M_{34,34}(T)} & e_{33} = \frac{M_{34,14}(T)}{M_{34,34}(T)} & e_{34} = \frac{M_{34,13}(T)}{M_{34,34}(T)} \\ e_{41} = -\frac{t_{21}}{M_{34,34}(T)} & e_{42} = \frac{t_{11}}{M_{34,34}(T)} & e_{43} = \frac{M_{34,21}(T)}{M_{34,34}(T)} & e_{44} = \frac{M_{34,23}(T)}{M_{34,34}(T)} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Аналогичным образом найдем, используя выражения (12), связь параметров матрицы  $[T]$  с параметрами матрицы  $[E]$ :

$$[T_{aa}] = [E_3]^{-1} = \begin{bmatrix} e_{31} & e_{32} \\ e_{41} & e_{42} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{Z_1} \begin{bmatrix} e_{42} & -e_{32} \\ -e_{41} & e_{31} \end{bmatrix};$$

$$[T_{aa}] = \begin{bmatrix} \frac{e_{42}}{M_{12,34}(E)} - \frac{e_{32}}{M_{12,34}(E)} & \\ \\ \frac{e_{41}}{M_{12,34}(E)} & \frac{e_{31}}{M_{12,34}(E)} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $Z_1 = e_{31}e_{42} - e_{32}e_{41} = M_{12,34}(E)$ ;

$$[T_{ab}] = -[E_3]^{-1}[E_4] = \begin{bmatrix} e_{31} & e_{32} \\ e_{41} & e_{42} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_{33} & e_{34} \\ e_{43} & e_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Z_1} \begin{bmatrix} -e_{42} & e_{32} \\ e_{41} & -e_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{33} & e_{34} \\ e_{43} & e_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_1} \begin{bmatrix} (e_{32}e_{43} - e_{33}e_{42})(e_{32}e_{44} - e_{34}e_{42}) \\ (e_{33}e_{41} - e_{31}e_{43})(e_{34}e_{41} - e_{31}e_{44}) \end{bmatrix};$$

$$[T_{ab}] = \begin{bmatrix} \frac{M_{12,14}(E)}{M_{12,34}(E)} & \frac{M_{12,13}(E)}{M_{12,34}(E)} \\ \frac{M_{12,24}(E)}{M_{12,34}(E)} & \frac{M_{12,23}(E)}{M_{12,34}(E)} \end{bmatrix}; \quad (19)$$

$$[T_{ba}] = [E_1][E_3]^{-1} = \frac{1}{Z_1} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{42} - e_{32} \\ -e_{41} & e_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_1} \begin{bmatrix} (e_{11} e_{42} - e_{12} e_{41})(e_{12} e_{31} - e_{11} e_{32}) \\ (e_{21} e_{42} - e_{22} e_{41})(e_{22} e_{31} - e_{21} e_{32}) \end{bmatrix};$$

$$[T_{ba}] = \begin{bmatrix} \frac{M_{23,34}(E)}{M_{12,34}(E)} & \frac{M_{24,34}(E)}{M_{12,34}(E)} \\ \frac{M_{13,34}(E)}{M_{12,34}(E)} & \frac{M_{14,34}(E)}{M_{12,34}(E)} \end{bmatrix}; \quad (20)$$

$$[T_{bb}] = [E_2] - [E_1][E_3]^{-1}[E_4] = \begin{bmatrix} e_{13} & e_{14} \\ e_{23} & e_{24} \end{bmatrix} - \frac{1}{Z_1} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{42} - e_{32} \\ -e_{41} & e_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{33} & e_{34} \\ e_{43} & e_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_1} \left\{ Z_1 \begin{bmatrix} e_{13} & e_{14} \\ e_{23} & e_{24} \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} (e_{11} e_{42} - e_{12} e_{41})(e_{12} e_{31} - e_{11} e_{32}) \\ (e_{21} e_{42} - e_{22} e_{41})(e_{22} e_{31} - e_{21} e_{32}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{33} & e_{34} \\ e_{43} & e_{44} \end{bmatrix} \right\};$$

$$[T_{bb}] = \begin{bmatrix} \frac{M_{12,14}(E)}{M_{12,34}(E)} & \frac{M_{12,13}(E)}{M_{12,34}(E)} \\ \frac{M_{12,24}(E)}{M_{12,34}(E)} & \frac{M_{12,23}(E)}{M_{12,34}(E)} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Распишем выражение (8) через клеточные матрицы передачи следующим образом:

$$[a_{12}] = [T_{aa}][b_{34}] + [T_{ab}][a_{34}]; \quad (22)$$

$$[b_{12}] = [T_{ba}][b_{34}] + [T_{bb}][a_{34}]. \quad (23)$$

С учетом выражения (9), связывающего  $[a_{34}]$  и  $[b_{34}]$  через  $[S_x]$ , имеем

$$[a_{12}] = ([T_{aa}] + [T_{ab}][S_x])[b_{34}]; \quad (24)$$

$$[b_{12}] = ([T_{ba}] + [T_{bb}][S_x])[b_{34}]. \quad (25)$$

Учитывая выражения (10) и (23), получаем

$$[T_{bb}][S_x] + [T_{ba}] = [S_{ii}]([T_{ab}][S_x] + [T_{aa}]). \quad (26)$$

Из выражения (26) следуют два уравнения, связывающие матрицы рассеяния  $[S_x]$  и  $[S_{ii}]$ :

$$[S_x] = ([T_{bb}] - [S_{ii}][T_{ab}])^{-1}([S_{ii}][T_{aa}] - [T_{ba}]); \quad (27)$$

$$[S_{ii}] = ([T_{bb}][S_x] + [T_{ba}])([T_{ab}][S_x] + [T_{aa}])^{-1}. \quad (28)$$

Уравнение (27) является уравнением восстановления в матричном виде действительных значений параметров  $[S_x]$  четырехполюсника по результатам измерений параметров  $[S_{ii}]$ , а уравнение (28) – уравнением калибровки измерительной системы, связывающим результаты измерений при калибровке  $[S_{ii}]$  с эталонными значениями  $[S_x]$ .

Представим уравнение калибровки (28) таким образом:

$$[S_{и}] = [A][B]^{-1}, \quad (29)$$

где

$$[A] = [T_{bb}][S_x] + [T_{ba}]; \quad [B] = ([T_{ab}][S_x] + [T_{aa}])^{-1}.$$

Произведя несложные, но объемные вычисления, получаем следующую систему из четырех уравнений калибровки:

$$\begin{aligned} S_{11и} &= \frac{1}{Z_2} [S_{11x}M_{14,14}(T) - S_{12x}M_{14,24}(T) + S_{21x}M_{14,13}(T) - S_{22x}M_{14,23}(T) - M_{14,34}(T) - \Delta S_x M_{14,12}(T); \\ S_{12и} &= \frac{1}{Z_2} [-S_{11x}M_{24,14}(T) + S_{12x}M_{24,24}(T) - S_{21x}M_{24,13}(T) - S_{22x}M_{24,23}(T) + M_{24,34}(T) + \Delta S_x M_{24,12}(T); \\ S_{21и} &= \frac{1}{Z_2} [S_{11x}M_{13,14}(T) - S_{12x}M_{13,24}(T) + S_{21x}M_{13,13}(T) - S_{22x}M_{13,23}(T) - M_{13,34}(T) - \Delta S_x M_{13,12}(T); \\ S_{22и} &= \frac{1}{Z_2} [-S_{11x}M_{23,14}(T) - S_{12x}M_{23,24}(T) - S_{21x}M_{23,13}(T) - S_{22x}M_{23,23}(T) + M_{24,34}(T) + \Delta S_x M_{23,12}(T), \quad (30) \end{aligned}$$

где

$$Z_2 = [-S_{11x}M_{34,14}(T) - S_{12x}M_{34,24}(T) - S_{21x}M_{34,13}(T) + S_{22x}M_{34,23}(T) + M_{34,34}(T) + \Delta S_x M_{34,12}(T).$$

Уравнения, входящие в систему (30), позволяют на основании набора комбинаций известных значений аттестованных эталонов  $[S_x^k]$  и результатов измерений  $[S_{и}^k]$  найти миноры матрицы передачи  $[T]$ , необходимые для нахождения параметров передачи матрицы  $[T]$ .

Представим уравнение восстановления действительных значений параметров  $[S_x]$  (26) в следующем виде:

$$[S_x] = [C]^{-1}[D], \quad (31)$$

где

$$[C] = [T_{bb}] - [S_{и}][T_{ab}]; \quad [D] = [S_{и}][T_{aa}] - [T_{ba}].$$

После громоздких вычислений, подобных приведенным ранее, находим выражения для восстанавливаемых действительных значений параметров матрицы рассеяния  $[S_x]$ , выраженные через миноры матрицы передачи  $[T]$  восьмиполносника погрешностей и найденные при калибровке, и измеренные параметры матрицы  $[S_{и}]$ :

$$\begin{aligned} S_{11x} &= -\frac{1}{Z_3} \{M_{12,23}(T) - S_{11и}M_{23,23}(T) - S_{12и}M_{13,23}(T) + S_{21и}M_{24,23}(T) + S_{22и}M_{14,23}(T) + \Delta S_{и}M_{34,23}(T)\}; \\ S_{12x} &= -\frac{1}{Z_3} \{M_{12,13}(T) - S_{11и}M_{23,13}(T) - S_{12и}M_{13,13}(T) + S_{21и}M_{24,13}(T) + S_{22и}M_{14,13}(T) + \Delta S_{и}M_{34,13}(T)\}; \\ S_{21x} &= \frac{1}{Z_3} \{M_{12,24}(T) - S_{11и}M_{23,24}(T) - S_{12и}M_{13,24}(T) + S_{21и}M_{24,24}(T) + S_{22и}M_{14,24}(T) + \Delta S_{и}M_{34,24}(T)\}; \\ S_{22x} &= \frac{1}{Z_3} \{M_{12,14}(T) - S_{11и}M_{23,14}(T) - S_{12и}M_{13,14}(T) + S_{21и}M_{24,14}(T) + S_{22и}M_{14,14}(T) + \Delta S_{и}M_{34,14}(T)\}, \quad (32) \end{aligned}$$

где

$$Z_3 = M_{12,13}(T) - S_{11и}M_{23,23}(T) - S_{12и}M_{13,23}(T) + S_{21и}M_{24,23}(T) + S_{22и}M_{14,23}(T) + \Delta S_{и}M_{34,23}(T).$$

**Заключение.** Решена задача построения полной математической модели для четырехполосников путем учета в восьмиполоснике погрешностей не 12, а 16 параметров матрицы рассеяния. Рассмотрены уравнения, связывающие измеренные и действительные параметры объекта измерения в виде четырехполосника.

### Список использованных источников

1. Борович, З. И. Определители и матрицы / З. И. Борович. – М.: Рипол Класик, 2013. – 206 с.
2. Силаев, М. А. Приложение матриц и графов к анализу СВЧ-устройств / М. А. Силаев, С. Ф. Брянцев. – М.: Сов. радио, 1970. – 248 с.
3. Зелингер, Дж. Основы матричного анализа и синтез применительно к электронике / Дж. Зелингер. – М.: Сов. радио, 1970. – 240 с.
4. Scattering-Parameter Model and Representation for Microwave Mixers / D. F. William [et al.] // IEEE Trans. Micr. Theory and Techn. – 2005. – Vol. 53, № 1. – P. 314–321. <https://doi.org/10.1109/tmtt.2004.839917>
5. Гусинский, А. В. Векторные анализаторы цепей миллиметровых волн: монография: в 3 ч. / А. В. Гусинский, Г. А. Шаров, А. М. Кострикин. – Минск: БГУИР, 2008. – Ч. 3, кн. 1: Принципы построения и анализ схем векторных анализаторов цепей. – 240 с.
6. Шаров, Г. А. Математика радиоэлектроники сверхвысоких частот. Координаты. Векторы. Матрицы. Тензоры / Г. А. Шаров, А. М. Кострикин, А. В. Гусинский. – Минск: Бестпринт, 2014. – 242 с.

### References

1. Borevich Z. I. *Identifiers and Matrices*. Moscow, Ripol Klasik Publ., 2013. 206 p. (in Russian).
2. Silaev M. A. *Application of Matrices and Graphs to the Analysis of Microwave Devices*. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1970. 248 p. (in Russian).
3. Zelinger Dzh. *Basics of Matrix Analysis and Synthesis Applied to Electronics*. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1970. 240 p. (in Russian).
4. Williams D. F., Ndagijimana F., Remley K. A., Dunsmore J. A., Hubert S. Scattering-Parameter Model and Representation for Microwave Mixers. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2005, vol. 53, no. 1, pp. 314–321. <https://doi.org/10.1109/tmtt.2004.839917>
5. Gusinsky A. V., Sharov G. A., Kostrikin A. M. *Vector analyzers of chains of millimeter waves: monograph. Part 3, Book 1. Principles of construction and analysis of circuits of vector network analyzers*. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2008. 240 p. (in Russian).
6. Sharov G. A., Kostrikin A. M., Gusinsky A. V. *Mathematics of Radio Electronics Microwave. Coordinates. Vectors Matrices. Tensors*. Minsk, Bestprint Publ., 2014. 242 p. (in Russian).

### Информация об авторах

**Гусинский Александр Владимирович** – кандидат технических наук, доцент, начальник Центра 1.9 НИЧ Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: avggus@mail.ru

**Богущ Вадим Анатольевич** – доктор физико-математических наук, профессор, ректор Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь).

### Information about the authors

**Aleksander V. Gusinski** – Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Head of the Center 1.9 Scientific Research Institute of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: avggus@mail.ru

**Vadim A. Bogush** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Rector of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus).