ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 1 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.2

С. Ю. ЧЕРНОВ, А. Ю. ХАРИН

О ВЛИЯНИИ ИСКАЖЕНИЙ В L_1- И *C*-МЕТРИКАХ НА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБОК ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Белорусский государственный университет

(*Поступила в редакцию 25.10.2013*)

Введение. Последовательный подход проверки гипотез [1] используется для решения многих практических задач статистического анализа данных [2] в экономике, медицине и других областях. При выполнении гипотетических предположений последовательные критерии позволяют затратить в среднем меньшее число наблюдений по сравнению с их классическими аналогами, основанных на фиксированном числе наблюдений. Однако на практике в данных могут присутствовать искажения, т. е. наблюдения, не удовлетворяющие предположениям, используемым при построении математической модели. Поэтому возникает вопрос о влиянии описанных искажений на вероятностные характеристики последовательных критериев. Данная задача не является абсолютно новой. Например, в работах [5, 6] исследована устойчивость вероятностей ошибочных решений и средней длительности последовательного критерия отношения вероятностей (ПКОВ) к искажениям типа Тьюки – Хьюбера для дискретного распределения вероятностей наблюдений.

В данной работе рассмотрено влияние искажений, заданных в L_1- и *C*-метриках, на вероятности ошибок первого и второго рода ПКОВ, если наблюдения имеют непрерывное распределение. А именно, для заданной заранее величины меры различия (т. е. расстояния в соответствующей метрике) между фактическим и гипотетическим распределениями вероятностей наблюдений построены так называемые наименее привлекательные распределения, которые максимизируют вероятность ошибки первого рода ПКОВ.

1. Математическая модель. Рассмотрим математическую модель, сформулированную в работе [7]. Пусть на измеримом пространстве (Ω, F) наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $x_1, x_2, \ldots \in \mathrm{R}$. Пусть эти случайные величины имеют плотность распределения вероятностей $f(x,\theta)$ с параметром $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, истинное значение которого неизвестно. Плотности распределения вероятностей $f(x,\theta)$ соответствует функция распределения $F(x,\theta)$. Пусть $\mathrm{D} = \{x \in \mathrm{R} : f(x,\theta) \neq 0\}$.

Относительно параметра θ имеются две простые гипотезы

$$H_0 : \theta = \theta_0, \qquad H_1 : \theta = \theta_1. \tag{1}$$

Обозначим статистику логарифмического отношения правдоподобия:

$$\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k,$$

где

$$\lambda_k = \lambda(x_k) = \ln \frac{f(x_k, \theta_1)}{f(x_k, \theta_0)} \tag{2}$$

– логарифм статистики отношения правдоподобия, вычисленной по наблюдению x_k, $k \in \mathrm{N}$. Положим по определению $\lambda_0 = 0$.

Для проверки гипотез (1) по наблюдениям $x_1, x_2, \ldots$ выносится решение, основанное на последовательном критерии отношения вероятностей [1]:

$$N = \min\{n \in \mathrm{N} : \Lambda_n \notin (C_-, C_+)\}, \tag{3}$$

$$d = 1_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_N), \tag{4}$$

где N – момент остановки, после которого принимается решение d в соответствии с (4). В (3) C_- и C_+ – пороги критерия, определенные в соответствии с [1]:

$$C_- = \ln\frac{\beta_0}{1-\alpha_0}, \quad C_+ = \ln\frac{1-\beta_0}{\alpha_0}, \tag{5}$$

где $\alpha_0, \beta_0 \in (0; 0,5)$ – заданные значения вероятностей ошибок первого и второго рода.

Пусть $\alpha(f)$, $\beta(f)$ – вероятности ошибок первого и второго рода критерия (3), (4), если наблюдения x_n имеют плотность распределения $f(x,\theta)$.

Известно (см., напр., [1, 4]), что α_0 и β_0 лишь приближенно равняются результирующим вероятностям ошибок первого $\alpha(f)$ и второго $\beta(f)$ рода, фактически имеющим место при задании порогов по формулам (5).

Дополнительно сделаем следующие предположения:

П1 – функция $\lambda(x)$, определенная (2), измерима относительно борелевской σ-алгебры $B(\mathrm{R})$; множество $\mathrm{D} \in B(\mathrm{R})$;

П2 – область значений функции $\lambda(x)$ принадлежит отрезку $[-(C_+ - C_-), C_+ - C_-]$, т. е. $\lambda(x) \in [-C_+ + C_-, C_+ - C_-]$ для любого $x \in \mathrm{D}$.

Предположение П2 означает, что с точки зрения значений величины $\alpha(f)$ не важно, насколько значение λ_n больше (или меньше) величины $C_+ - C_-$ (или $-(C_+ - C_-)$), так как если $\lambda_n > C_+ - C_-$ (или $\lambda_n < -(C_+ - C_-)$), то статистика критерия $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \lambda_n$ гарантированно выходит за верхний C_+ (или нижний C_-) порог. Обозначим $\lambda^{-1}(A) = \{x \in \mathrm{D} : \lambda(x) \in A\}$ – прообраз множества $A \in B(\mathrm{R})$. Для краткости, пусть $\lambda^{-1}(a,b) = \lambda^{-1}((a,b))$ и $\lambda^{-1}(a) = \lambda^{-1}(\{a\})$, $a, b \in \mathrm{R}$, $a<b$; $h_k = \lambda^{-1}(kh-h, kh)$, $k = \overline{-m+1, m}$.

Без ограничения общности будем считать, что истинной гипотезой является H_0 (случай H_1 рассматривается аналогично), поэтому в дальнейшем рассматривается вероятность ошибки первого рода α. Обозначим

$$F(x) = F(x,\theta_0), \qquad f(x) = f(x,\theta_0), \qquad F_\lambda(x) = P\{\lambda_1 \le x\}.$$

С целью уменьшения влияния искажений в наблюдениях на значение вероятности ошибки первого рода последовательного критерия (3), (4), для произвольной плотности $s(x)$ построим так называемую *усеченную* плотность распределения вероятностей одного наблюдения x_k (когда x_k принимает конечное множество значений аналогичная конструкция представлена, напр., в [7]):

$$s^g(x) = 1_{\lambda^{-1}(g_-, g_+)} s(x) + \varepsilon_- u_-(x) + \varepsilon_+ u_+(x), \tag{6}$$

где

1) g_- и g_+ ($g_- < g_+$) – заданные параметры усечения статистик λ_n;

2) $u_-(x)$ и $u_+(x)$ – некоторые плотности распределения вероятностей, носители [3] которых удовлетворяют включениям $\operatorname{supp} u_- \subseteq \lambda^{-1}(g_-)$ и $\operatorname{supp} u_+ \subseteq \lambda^{-1}(g_+)$;

3) $\varepsilon_- = \varepsilon_-(s) = S_\lambda(g_-) = \int_{\lambda^{-1}(-\infty, g_-)} s(y)dy$, $\varepsilon_+ = \varepsilon_+(s) = 1 - S_\lambda(g_+) = \int_{\lambda^{-1}(g_+, +\infty)} s(y)dy$;

4) функции $u_-(x)$ и $u_+(x)$ не зависят от плотности распределения вероятностей $s(x)$.

З а м е ч а н и е 1. Построенная функция $s^g(x)$ действительно является плотностью распределения вероятностей:

$$\int_{\mathrm{R}} s^g(y)dy = \int_{\mathrm{R}} 1_{\lambda^{-1}(g_-, g_+)} s(y)dy + \int_{\mathrm{R}} \varepsilon_- u_-(y)dy + \int_{\mathrm{R}} \varepsilon_+ u_+(y)dy =$$

$$= \int_{\lambda^{-1}(g_-, g_+)} s(y)dy + \varepsilon_- \int_{\lambda^{-1}(g_-)} u_-(y)dy + \varepsilon_+ \int_{\lambda^{-1}(g_+)} u_+(y)dy =$$

$$= \int_{\lambda^{-1}(g_-,g_+)} s(y)dy + \varepsilon_- \cdot 1 + \varepsilon_+ \cdot 1 =$$

$$= \int_{\lambda^{-1}(g_-,g_+)} s(y)dy + \int_{\lambda^{-1}(-\infty,g_-)} s(y)dy + \int_{\lambda^{-1}(g_+,+\infty)} s(y)dy = \int_{\lambda^{-1}(-\infty,+\infty)} s(y)dy = 1.$$

З а м е ч а н и е 2. Построение функции $s^g(x)$ возможно для произвольной неотрицательной суммируемой на R функции $s(x)$.

З а м е ч а н и е 3. При $g_- = -\infty$ и $g_+ = +\infty$ усеченная плотность $s^g(x)$ совпадает с плотностью $s(x)$, поэтому введенная операция не сужает класс рассматриваемых плотностей наблюдений x_n.

З а м е ч а н и е 4. Если исходная плотность $f(x)$ не удовлетворяет П2, то рассмотрим плотность $f^g(x)$ при $g_- = -(C_+ - C_-)$, $g_+ = C_+ - C_-$, для которой, легко видеть, П2 уже выполняется, причем $\alpha(f^g) = \alpha(f)$.

2. Зависимость величины $\alpha(\cdot)$ от вероятностного распределения наблюдений. Предположим, что нам известна зависимость между случайными наблюдениями $x_n = x(\omega)$ и $y_n = y(\omega)$, заданными плотностями распределения вероятностей $a(x)$ и $b(x)$ соответственно. Выясним, как связаны между собой значения вероятностей ошибок $\alpha(a)$ и $\alpha(b)$ последовательного критерия (3), (4).

Л е м м а 1. *Пусть $x(\omega)$ и $y(\omega)$ – случайные величины, заданные на (Ω, F), с плотностями распределения вероятностей $a(x)$ и $b(x)$ соответственно. Если для любого $\omega \in \Omega$ верно $\lambda(x(\omega)) \le \lambda(y(\omega))$, то выполняется неравенство $\alpha(a) \le \alpha(b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы следует соотношение

$$\Lambda_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \lambda(x_k) \le \sum_{k=0}^{n} \lambda(y_k) = \Lambda_n(b),$$

поэтому $\alpha(a) \le \alpha(b)$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ – плотности распределения вероятностей. Если для любых x и y, для которых $x \in \{z : a(z) > b(z)\}$, $y \in \{z : a(z) < b(z)\}$, верно $\lambda(x) \le \lambda(y)$, то выполняется неравенство $\alpha(a) \le \alpha(b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$M^+ = \{x : a(x) > b(x)\}, \qquad M^- = \{x : a(x) < b(x)\};$$

$$p = \int_{M^+} (a(x) - b(x))dx = \int_{M^-} (b(x) - a(x))dx.$$

На (Ω, F) рассмотрим случайные величины $\xi_a(\omega)$ и $\xi_b(\omega)$, такие что

$$\xi_a(\omega) = (1 - \eta(\omega))\xi(\omega) + \eta(\omega)\xi^+(\omega), \qquad \xi_b(\omega) = (1 - \eta(\omega))\xi(\omega) + \eta(\omega)\xi^-(\omega),$$

где $\xi(\omega)$, $\xi^+(\omega)$ и $\xi^-(\omega)$ – случайные величины с плотностями распределения вероятностей $\min\{a(x), b(x)\} / (1 - p)$, $1_{M^+}(x)(a(x) - b(x)) / p$ и $1_{M^-}(x)(b(x) - a(x)) / p$ соответственно; $\eta(\omega)$ – случайная величина Бернулли с параметром p, т. е. $P\{\eta = 1\} = p$, $P\{\eta = 0\} = 1 - p$.

Тогда плотности распределения вероятностей $\xi_a(\omega)$ и $\xi_b(\omega)$ равны

$$f_a(x) = (1 - p) \cdot \frac{\min\{a(x), b(x)\}}{1 - p} + p \cdot \frac{1_{M^+}(x)}{p}(a(x) - b(x)),$$

$$f_b(x) = (1 - p) \cdot \frac{\min\{a(x), b(x)\}}{1 - p} + p \cdot \frac{1_{M^-}(x)}{p}(b(x) - a(x))$$

или

$$f_a(x) = \min\{a(x), b(x)\} + 1_{M^+}(x)(a(x) - b(x)) = a(x),$$

$$f_b(x) = \min\{a(x), b(x)\} + 1_{M^-}(x)(b(x) - a(x)) = b(x),$$

следовательно, $\alpha(a) = \alpha(f_a)$ и $\alpha(b) = \alpha(f_b)$.

Случайные величины $\xi^-(\omega)$ и $\xi^+(\omega)$ отличны от нуля на множествах M^- и M^+ соответственно, поэтому из условия леммы следует, что $\lambda(\xi^+(\omega)) \le \lambda(\xi^-(\omega))$ и $\lambda(\xi_a(\omega)) \le \lambda(\xi_b(\omega))$ для любого $\omega \in \Omega$. Тогда по лемме 1 $\alpha(f_a) \le \alpha(f_b)$ и $\alpha(a) \le \alpha(b)$. Лемма доказана.

3. Случай искажений в L_1-метрике. Пусть в нарушение гипотетической модели, представленной в п. 1, независимые одинаково распределенные наблюдения x_n, $n \in \mathrm{N}$, подвержены искажениям, т. е. имеют плотность распределения вероятностей $s(x)$, которая может отличаться от гипотетической плотности распределения вероятностей $f(x)$, однако расстояние в L_1-метрике между функциями $s(x)$ и $f(x)$ не превышает ε:

$$\int_{\mathrm{D}} |\, s(x) - f(x)\,|\, dx \le \varepsilon, \tag{7}$$

где $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, причем величина ε_0 задается заранее.

Семейство плотностей распределения вероятностей $s(x)$, удовлетворяющих (7) при фиксированном ε, обозначим $L_1(f,\varepsilon)$. Пусть плотности $s(x)$ соответствует функция распределения вероятностей $S(x)$. Для произвольной $s(\cdot) \in L_1(f,\varepsilon)$ вероятность ошибки первого рода последовательного критерия (3), (4) обозначим $\alpha(s,\varepsilon)$.

Найдем наихудшее распределение вероятностей наблюдений x_n, т. е. такое, которое максимизирует величину $\alpha(\cdot,\varepsilon)$ на множестве $L_1(f,\varepsilon)$.

Рассмотрим случайную величину $\overline{x}_n$, построенную по наблюдению x_n:

$$\overline{x}_n(\omega) = \begin{cases} x_n(\omega), & x_n(\omega) \in \lambda^{-1}(g_-, +\infty), \\ u_n(\omega), & x_n(\omega) \in \lambda^{-1}(-\infty, g_-), \end{cases} \tag{8}$$

где

1) $\varepsilon / 2 = F_\lambda(g_-) = \int_{\lambda^{-1}(-\infty, g_-)} f(y)dy$;

2) $u_n(x)$ – случайная величина с плотностью распределения вероятностей $u_+(x)$, параметр g_+, от которого зависит функция $u_+(x)$, удовлетворяет условию $g_+ \ge C_+ - C_-$.

Пусть $\overline{x}_n$ имеет плотность распределения вероятностей $\overline{f}(x)$, тогда

$$\overline{f}(x) = 1_{\lambda^{-1}(g_-, +\infty)}(x) f(x) + \frac{\varepsilon}{2} u_+(x). \tag{9}$$

З а м е ч а н и е 5. Ограничения на параметры g_- и g_+ в (8) означают, что с вероятностью $\varepsilon/2 = F_\lambda(g_-)$ случайная величина $\overline{x}_n$ примет значение на множестве $\lambda^{-1}(g_+)$ (на котором отлична от нуля $u_+(x)$), т. е. $\lambda(\overline{x}_n) = g_+$ и статистика $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \lambda(\overline{x}_n)$ на n-м шаге выйдет за верхний порог C_+.

З а м е ч а н и е 6. Общий принцип построения плотности $\overline{f}(x)$ по плотности $f(x)$, выраженный (9), состоит в следующем. Вначале выбирается подмножество $\lambda^{-1}(-\infty, g_-)$ из D, на котором функция $\lambda(\cdot)$ принимает малые (в данном случае не превосходящие g_-) значения. Затем вероятностная масса, равная $\int_{\lambda^{-1}(-\infty, g_-)} f(x)dx = \varepsilon/2$, «переносится» на подмножество $\lambda^{-1}(g_+)$, на котором функция $\lambda(\cdot)$ принимает бóльшие (равные g_+) значения.

З а м е ч а н и е 7. Функция $\overline{f}(x)$ принадлежит $L_1(f,\varepsilon)$. Действительно,

$$\int_{\mathrm{D}} |\, \overline{f}(x) - f(x)\,|\, dx = \int_{\lambda^{-1}(-\infty, g_-)} f(x)dx + \int_{\lambda^{-1}(g_-, +\infty)} |\, \overline{f}(x) - f(x)\,|\, dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{\lambda^{-1}(g_-, +\infty)} u_+(x)dx = \varepsilon.$$

Покажем, что если наблюдения x_n имеют плотность $\overline{f}(x)$, то вероятность ошибки $\alpha(\overline{f})$ действительно является наибольшей среди функций из $L_1(f,\varepsilon)$.

Т е о р е м а 1. *Если плотность распределения вероятностей* $s(x)$ *принадлежит* $L_1(f,\varepsilon)$, *то выполняется соотношение*

$$\alpha(s,\varepsilon) \le \alpha(\overline{f},\varepsilon).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s(\cdot) \in L_1(f,\varepsilon)$. Обозначим

$$p = \int_{(s>f)} s(x) - f(x)dx = \int_{(s<f)} f(x) - s(x)dx.$$

Ясно, что $p \le \varepsilon/2$. Последовательно построим плотности распределения вероятностей $s_1(x)$ и $s_2(x)$, такие что

$$s_1(x) = 1_{(s \le f)}(x)s(x) + 1_{(s > f)}(x)f(x) + p \cdot u_+(x) = 1_{(s < f)}(x)s(x) + 1_{(s \ge f)}(x)f(x) + p \cdot u_+(x),$$
$$s_2(x) = 1_{\lambda^{-1}(g_-, +\infty) \cap (s < f)}(x)s(x) + 1_{\lambda^{-1}(g_-, +\infty) \cap (s \ge f)}(x)f(x) + \varepsilon_-(s_1)u_-(x) + p \cdot u_+(x).$$

Сравним величины $\alpha(s)$, $\alpha(s_1)$, $\alpha(s_2)$ и $\alpha(\overline{f})$ между собой. Рассмотрим множества, на которых указанные плотности отличны друг от друга:

$$\{x : s(x) < s_1(x)\} \subseteq \lambda^{-1}(g_+), \qquad \{x : s(x) > s_1(x)\} \subseteq (s > f) \setminus \lambda^{-1}(g_+),$$
$$\{x : s_1(x) < s_2(x)\} \subseteq \lambda^{-1}(g_-), \qquad \{x : s_1(x) > s_2(x)\} \subseteq \lambda^{-1}(g_-, +\infty),$$
$$\{x : s_2(x) < \overline{f}(x)\} \subseteq (\lambda^{-1}(g_-, +\infty) \cap (s < f)) \cup \lambda^{-1}(g_+),$$
$$\{x : s_2(x) > \overline{f}(x)\} \subseteq \lambda^{-1}(g_-).$$

В силу леммы 2

$$\alpha(s, \varepsilon) \le \alpha(s_1, \varepsilon) \le \alpha(s_2, \varepsilon) \le \alpha(\overline{f}, \varepsilon),$$

откуда следует утверждение теоремы.

С л е д с т в и е 1. *Вероятность ошибки первого рода* $\alpha(\overline{f}, \varepsilon)$ *монотонно возрастает по переменной* ε, *в частности, для любого* ε, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, *выполняется неравенство*

$$\alpha(\overline{f}, \varepsilon) \le \alpha(\overline{f}, \varepsilon_0).$$

Покажем, что если плотность $s(x)$ принадлежит ε-окрестности функции $f(x)$ в L_1-метрике, то усеченная плотность $s^g(x)$ принадлежит ε-окрестности функции $f^g(x)$, а именно, справедлива следующая лемма.

Л е м м а 3. *Если* $s(x) \in L_1(f, \varepsilon)$, *то* $s^g(x) \in L_1(f^g, \varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\int_D |s^g(x) - f^g(x)|\, dx = \int_{\lambda^{-1}(g_-, g_+)} |s(x) - f(x)|dx +$$
$$+ \int_{\lambda^{-1}(g_-)} u_-(x) |\varepsilon_-(s) - \varepsilon_-(f)|dx + \int_{\lambda^{-1}(g_+)} u_+(x) |\varepsilon_+(s) - \varepsilon_+(f)|dx =$$
$$= \int_{\lambda^{-1}(g_-, g_+)} |s(x) - f(x)|dx + |\varepsilon_-(s) - \varepsilon_-(f)| + |\varepsilon_+(s) - \varepsilon_+(f)| =$$
$$= \int_{\lambda^{-1}(g_-, g_+)} |s(x) - f(x)|dx + \left| \int_{\lambda^{-1}(-\infty, g_-)} s(x) - f(x)dx \right| +$$
$$+ \left| \int_{\lambda^{-1}(g_+, +\infty)} s(x) - f(x)dx \right| \le \int_D |s(x) - f(x)|dx \le \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Далее, при заданных порогах усечения g_- и g_+ найдем наихудшее распределение вероятностей, т. е. такое, которое максимизирует величину $\alpha(\cdot, \varepsilon)$ на множестве $L_1(f^g, \varepsilon)$. Покажем, что если $\overline{f}(x)$ – наихудшее распределение в $L_1(f, \varepsilon)$, то $\overline{f}^g(x)$ – наихудшее распределение в $L_1(f^g, \varepsilon)$.

Если $\overline{f}(x)$ удовлетворяет (9), то $\overline{f}^g(x)$, построенная в соответствии с (6), имеет вид

$$\overline{f}^g(x) = 1_{\lambda^{-1}(g_-, g_+)}(x)f(x) + \left(\varepsilon_- - \frac{\varepsilon}{2}\right)u_-(x) + \left(\varepsilon_+ + \frac{\varepsilon}{2}\right)u_+(x).$$

Т е о р е м а 2. *Если плотность распределения вероятностей* $s(x)$ *принадлежит* $L_1(f, \varepsilon)$, *то выполняется соотношение*

$$\alpha(s^g, \varepsilon) \le \alpha(\overline{f}^g, \varepsilon).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из леммы 3 и теоремы 1.

С л е д с т в и е 2. *Вероятность ошибки первого рода* $\alpha(\overline{f}^g,\varepsilon)$ *монотонно возрастает по переменной* ε, *для любого* ε, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, *выполняется неравенство*

$$\alpha(\overline{f}^g,\varepsilon) \le \alpha(\overline{f}^g,\varepsilon_0).$$

4. Случай искажений в *C*-метрике с весом. Пусть независимые одинаково распределенные наблюдения x_n, $n \in \mathrm{N}$, имеют плотность распределения вероятностей $s(x)$, которая может отличаться от теоретической плотности распределения вероятностей $f(x)$. Однако расстояние в C-метрике с весом $1/w(x)$ между функциями $s(x)$ и $f(x)$ не превышает ε (пусть $w(x)$ – неотрицательная и непрерывная функция):

$$\sup_{x\in \mathrm{D}}\left\{\frac{1}{w(x)}|s(x)-f(x)|\right\} \le \varepsilon, \tag{10}$$

где $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, причем величина ε_0 задается заранее.

Множество плотностей распределения вероятностей $s(x)$, удовлетворяющих (10) при фиксированных ε и весовой функции $w(x)$, обозначим $C_w(f,\varepsilon)$. Плотности $s(x)$ соответствует функция распределения вероятностей $S(x)$.

Заметим, что (10) означает, что для произвольного $x \in \mathrm{D}$ выполняется неравенство

$$f(x)-\varepsilon\cdot w(x) \le s(x) \le f(x)+\varepsilon\cdot w(x),$$

поэтому, в силу неотрицательности $s(x)$, предположим, что

$$0 \le f(x)-\varepsilon\cdot w(x), \tag{11}$$

(если же это не так, то переопределим функцию $w(x)$ соответствующим образом).

Покажем, что если плотность $s(x)$ принадлежит ε-окрестности (10) функции $f(x)$ с весом $1/w(x)$, то усеченная плотность $s^g(x)$ принадлежит ε-окрестности функции $f^g(x)$ в C-метрике с весом $1/w^g(x)$.

Л е м м а 4. *Если* $s \in C_w(f,\varepsilon)$, *то* $s^g \in C_{w^g}(f^g,\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо доказать неравенство (при $w^g(x) \ne 0$)

$$\sup_{x\in \mathrm{D}}\left\{\frac{1}{w^g(x)}|s^g(x)-f^g(x)|\right\} \le \varepsilon \tag{12}$$

или неравенство $|s^g(x)-f^g(x)| \le \varepsilon w^g(x)$, для произвольного $x \in \mathrm{D}$.

Если $x \in \lambda^{-1}(g_-,g_+)$, то неравенство (12) верно, так как совпадает с (10) и $s \in C_w(f,\varepsilon)$.

Если $x \in \lambda^{-1}(-\infty,g_-)$, то

$$|s^g(x)-f^g(x)| = u_-(x)\cdot|\varepsilon_-(s)-\varepsilon_-(f)| = u_-(x)\cdot\left|\int_{\lambda^{-1}(-\infty,g_-)}(s(y)-f(y))dy\right| \le$$

$$\le u_-(x)\cdot\int_{\lambda^{-1}(-\infty,g_-)}|s(y)-f(y)|\,dy \le u_-(x)\cdot\varepsilon\int_{\lambda^{-1}(-\infty,g_-)}w(y)dy = \varepsilon\cdot\varepsilon_-(w)u_-(x) = \varepsilon w^g(x).$$

Аналогично рассматривается случай, когда $x \in \lambda^{-1}(g_+,+\infty)$. Лемма доказана.

Как и в случае с L_1-метрикой, найдем наихудшее распределение вероятностей $\overline{f}_C^g(x)$, которое удовлетворяет (10) и максимизирует величину $\alpha(\cdot,\varepsilon)$.

Пусть действительное число t $(g_- < t < g_+)$ удовлетворяет соотношению (такое число существует в силу непрерывности и неотрицательности функции $w(x)$)

$$\int_{\lambda^{-1}(g_-,t)}w(y)dy = \int_{\lambda^{-1}(t,g_+)}w(y)dy. \tag{13}$$

Обозначим

$$\overline{f}_C^g(x) = 1_{\lambda^{-1}(g_-,t)}(x)\cdot(f(x)-\varepsilon\cdot w(x)) + 1_{\lambda^{-1}(t,g_+)}(x)\cdot(f(x)+\varepsilon\cdot w(x)).$$

З а м е ч а н и е 8. Функция $\overline{f}_C^g(x)$ является плотностью распределения вероятностей в силу (11) (условие неотрицательности) и (13) (условие нормировки). Функция $\overline{f}_C^g(x)$ принадлежит $C_{w^g}(f^g,\varepsilon)$ в силу леммы 4.

Т е о р е м а 3. *Если плотность распределения вероятностей s*(*x*) *удовлетворяет* (10)*, то выполняется соотношение*

$$\alpha(s^g,\varepsilon)\le\alpha(\overline{f}_C^g,\varepsilon).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из леммы 2, так как функция $\lambda(x)$ на множестве $\{x{:}s^g(x)\ \le\overline{f}_C^g(x)\}=\lambda^{-1}(t,g_+)$ принимает бóльшие значения, чем на $\{x{:}s^g(x)\ \ge\overline{f}_C^g(x)\}=\lambda^{-1}(g_-,t)$.

С л е д с т в и е 3. *Вероятность ошибки первого рода* $\alpha(\overline{f}_C^g,\varepsilon)$ *монотонно возрастает по переменной* ε, *в частности, для любого* ε, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, *выполняется неравенство*

$$\alpha(\overline{f}_C^g,\varepsilon)\le\alpha(\overline{f}_C^g,\varepsilon_0).$$

Заключение. В работе построены распределения вероятностей наблюдений, которые максимизируют вероятности ошибок первого рода последовательного критерия отношения вероятностей и лежат в ε-окрестности теоретической плотности распределения вероятностей в L_1- и *C*-метриках. Полученные результаты позволяют оценить, насколько сильно вероятности ошибочных решений последовательных критериев зависят от искажений в наблюдениях, заданных в указанных метриках.

Исследования частично поддержаны Международным научно-исследовательским центром (проект B-1910).

Литература

1. *Вальд А.* Последовательный анализ. М., 1960.
2. *Mukhopadhyay N., Datta S.* Applied Sequential Methodologies. New York, 2004.
3. *Зорич В. А.* Математический анализ. М., 2012. Ч. 2.
4. *Харин А. Ю.* // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2002. № 1. С. 92–96.
5. *Kharin A., Kishylau D.* // Austrial J. of Statistics. 2005. Vol. 34, N 2. P. 153–162.
6. *Kharin A.* // Austrial J. of Statistics. 2002. Vol. 31, N 4. P. 267–277.
7. *Харин А. Ю., Чернов С. Ю.* // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2011. № 1. С. 96–100.

S. Yu. CHARNOU, A. Yu. KHARIN

INFLUENCE OF DISTORTIONS IN THE L_1- AND *C*-METRICS ON THE ERROR PROBABILITIES FOR THE SEQUENTIAL PROBABILITY RATIO TEST

Summary

The sequential probability ratio test (SPRT) is considered, when the actual probability distribution of observations is unknown and differs from the theoretical one, but belongs to its ε-neighborhood in the L_1- or *C*-metric. The least favorable distribution (that maximizes the type I error probability of the SPRT) of observations is constructed for each metric and each ε fixed in advance.