УДК 517.925:517.977

А. К. ДЕМЕНЧУК

УПРАВЛЕНИЕ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПРАВЫМ БЛОКОМ НЕПОЛНОГО РАНГА

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 28.03.2014)

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица, B – постоянная $(n \times n)$-матрица. Будем считать, что управление задается в виде линейной по фазовым переменным обратной связи

$$u = U(t)x \tag{2}$$

с непрерывной ω-периодической $(n \times n)$-матрицей $U(t)$. Задача выбора такой матрицы $U(t)$ (коэффициента обратной связи), чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \tag{3}$$

имела сильно нерегулярные периодические решения с заданным спектром частот L (целевым множеством), названа задачей управления спектром нерегулярных колебаний с целевым множеством L (задачей управления асинхронным спектром) [1].

В работе [1] получено решение сформулированной задачи для системы (1) с невырожденной матрицей B, а также с вырожденной матрицей B и нулевым средним значением $\widehat{A}$ матрицы коэффициентов $A(t)$. В работе [2] рассмотрен случай совпадения рангов матрицы B и расширенной $(n \times 2n)$-матрицы, составленной из B и $\widehat{A}$. Для блочно-треугольного усреднения матрицы коэффициентов в [3] задача решена в некритическом случае, а в [4] – в критическом случае при наличии некоторых стационарных элементов матрицы коэффициентов. Решение поставленной задачи получено в [5–7] в предположении полного столбцового ранга двух блоков нестационарной части матрицы коэффициентов, а в [8] – с линейно независимыми столбцовыми базисами этих блоков.

В настоящей работе устанавливаются условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром для системы (1) с правым блоком неполного столбцового ранга.

Пусть $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{r'}\}$ – целевое множество частот, элементы которого попарно различны, соизмеримы между собой и несоизмеримы с $2\pi/\omega$. В таком случае найдется наибольшее положительное вещественное λ, которому будут кратны числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r'}$, т. е. $\lambda_j = k_j \lambda$ $(k_j \in N;\ j = \overline{1, r'})$. Обозначим $\Omega = 2\pi/\lambda$, при этом отношение чисел ω и Ω иррационально.

Будем рассматривать случай вырожденной матрицы B

$$\operatorname{rank} B = r < n, \quad (n - r = d). \tag{4}$$

Обозначим через $B_{d,n}$ и $B_{r,n}$ матрицы, составленные соответственно из d первых и r остальных строк матрицы B. Можно считать, что первые d строк матрицы B нулевые, т. е.

$$B_{d,n} = 0, \tag{5}$$

так как в противном случае этого можно добиться линейным неособенным стационарным преобразованием. Отметим, что в силу (4), (5) ранг матрицы $B_{r,n}$ также равен r.

Представим матрицу коэффициентов $A(t)$ в блочном виде, учитывая структуру матрицы B. Пусть $A^{(11)}_{d,d}(t)$, $A^{(21)}_{r,d}(t)$ – ее левые верхний и нижний, а $A^{(12)}_{d,r}(t)$, $A^{(22)}_{r,r}(t)$ – правые верхний и нижний блоки (нижние индексы указывают размерность блоков). Соответственно такому представлению усредненную матрицу $\widehat{A} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau)d\tau$ в свою очередь разобьем на такие же четыре блока $\widehat{A}^{(11)}_{d,d}$, $\widehat{A}^{(21)}_{r,d}$, $\widehat{A}^{(12)}_{d,r}$, $\widehat{A}^{(22)}_{r,r}$ соответствующих размерностей. Далее будем считать, что матрица $\widehat{A}$ имеет нижнюю блочно-треугольную форму, т. е.

$$\widehat{A}^{(12)}_{d,r} = 0\,, \tag{6}$$

причем имеет место критический случай, когда у левого верхнего блока $\widehat{A}^{(11)}_{d,d}$ имеются чисто мнимые собственные числа

$$\pm i\lambda_j \;\; (\lambda_j \in L;\; j = 1, \ldots, d';\; d' \le [d/2])\,. \tag{7}$$

Отметим, что в некритическом случае поставленная задача решена в работе [3].

Наряду с системой (3) рассмотрим также систему

$$\dot{x} = (\widehat{A} + B\widehat{U})x\,,\;\; (\tilde{A}(t) + B\tilde{U}(t))x = 0\,, \tag{8}$$

где $\widehat{U}$ – среднее значение коэффициента обратной связи $U(t)$, $\tilde{U}(t) = U(t) - \widehat{U}$, $\tilde{A}(t) = A(t) - \widehat{A}$. С учетом предположений (5), (6) систему (8) можно записать в виде

$$\dot{x}^{[d]} = \widehat{A}^{(11)}_{d,d}x^{[d]}\,,\;\; \dot{x}_{[r]} = \left(\widehat{A}^{(21)}_{r,d} + B_{r,n}\widehat{U}_{n,d}\right)x^{[d]} + \left(\widehat{A}^{(22)}_{r,r} + B_{r,n}\widehat{U}_{n,r}\right)x_{[r]}\,,$$

$$\tilde{A}^{(11)}_{d,d}(t)x^{[d]} + A^{(12)}_{d,r}(t)x_{[r]} = 0,\; \left(\tilde{A}^{(21)}_{r,d}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,d}(t)\right)x^{[d]}(t) + \left(\tilde{A}^{(22)}_{r,r}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,r}(t)\right)x_{[r]}(t) = 0, \tag{9}$$

где векторы $x = \mathrm{col}(x^{[d]}, x_{[r]})$, $x^{[d]} = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_d)$, $x_{[r]} = \mathrm{col}(x_{d+1}, \ldots, x_n)$ и матрицы $\widehat{U} = \left\{\widehat{U}_{n,d}, \widehat{U}_{n,r}\right\}$, $\tilde{U}(t) = \left\{\tilde{U}_{n,d}(t), \tilde{U}_{n,r}(t)\right\}$.

Как отмечено выше, случай, когда оба блока $\tilde{A}^{(11)}_{d,d}$ и $A^{(12)}_{d,r}$ матрицы $\tilde{A}(t)$ имеют полный столбцовый ранг, изучен в работах [5–7]. Поэтому предположим, что верхний левый блок имеет полный столбцовый ранг, а верхний правый – неполный, т. е. выполнены соотношения

$$\mathrm{rank}_{\,\mathrm{col}}\, \tilde{A}^{(11)}_{d,d} = r_1 = d\,,\;\; \mathrm{rank}_{\,\mathrm{col}}\, A^{(12)}_{d,r} = r_2 < r\,. \tag{10}$$

Если базисные столбцы правого блока образуют со столбцами левого блока линейно независимую систему, решение поставленной задачи управления можно получить на основании [8]. Учитывая это обстоятельство, далее будем считать, что для $(d \times n)$-матрицы $\left\{\tilde{A}^{(11)}_{d,d}, A^{(12)}_{d,r}\right\}$, составленной из столбцов блоков $\tilde{A}^{(11)}_{d,d}(t)$, $A^{(12)}_{d,r}(t)$, выполняется условие

$$\mathrm{rank}_{\,\mathrm{col}} \left\{\tilde{A}^{(11)}_{d,d}, A^{(12)}_{d,r}\right\} < d + r_2. \tag{11}$$

В силу второго условия в (10) найдется постоянная неособенная $(r \times r)$-матрица Q такая, что у матрицы $A^{(12)}_{d,r}(t)Q$ первые $d_2 = r - r_2$ столбцов нулевые, в то время как остальные r_2 столбцов будут линейно независимыми. Введем замену переменных

$$x_{[r]} = Qw\,, \tag{12}$$

которая приводит систему (9) к системе

$$\dot{x}^{[d]} = \widehat{A}^{(11)}_{d,d}x^{[d]}\,,\; \dot{w} = \hat{P}x^{[d]} + \hat{H}w,$$

$$\tilde{A}^{(11)}_{d,d}(t)x^{[d]} + A^{(12)}_{d,r}(t)Qw = 0,\;\; \tilde{P}(t)x^{[d]} + \tilde{H}(t)Qw = 0\,, \tag{13}$$

где $\hat{P} = Q^{-1}\left(\hat{A}^{(21)}_{r,d} + B_{r,n}\hat{U}_{n,d}\right)$, $\hat{H} = Q^{-1}\left(\hat{A}^{(22)}_{r,r} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r}\right)Q$, $\tilde{P}(t) = Q^{-1}\left(\tilde{A}^{(21)}_{r,d}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,d}(t)\right)$, $\tilde{H}(t) = Q^{-1}\left(\tilde{A}^{(22)}_{r,r}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,r}(t)\right)Q$. Обозначим матрицу, составленную из последних r_2 столбцов матричного коэффициента $A_{d,r}^{(12)}(t)Q$ третьей системы в (13), через $C(t)$. Согласно второму неравенству в (9), $(d\times r_2)$-матрица $C(t)$ имеет полный столбцовый ранг. Пусть $w=\mathrm{col}\left(w^{[d_2]},w_{[r_2]}\right)$, $w^{[d_2]}=\mathrm{col}(w_1,\ldots,w_{d_2})$, $w_{[r_2]}=\mathrm{col}(w_{d_2+1},\ldots,w_r)$. Учитывая структуру вектора w, представим матрицу $\hat H$ в блочном виде таком, что матрицы $\hat H_{d_2,d_2}^{(11)}$ и $\hat H_{r_2,d_2}^{(21)}$ – ее левые верхний и нижний, а матрицы $\hat H_{d_2,r_2}^{(12)}$ и $\hat H_{r_2,r_2}^{(22)}$ – правые верхний и нижний блоки соответственно (нижние индексы указывают размер блоков). Тогда система (13) примет вид

$$\dot x^{[d]}=\widehat{A}_{d,d}^{(11)}x^{[d]},$$

$$\dot w^{[d_2]}=\hat H_{d_2,d_2}^{(11)}w^{[d_2]}+\hat H_{d_2,r_2}^{(12)}w_{[r_2]}+\hat P_1x^{[d]},\ \dot w_{[r_2]}=\hat H_{r_2,d_2}^{(21)}w^{[d_2]}+\hat H_{r_2,r_2}^{(22)}w_{[r_2]}+\hat P_2x^{[d]},$$

$$\tilde A_{d,d}^{(11)}(t)x^{[d]}+C(t)w_{[r_2]}=0,\ \ \tilde P(t)x^{[d]}+\tilde H(t)w=0\,, \tag{14}$$

где матрицы $\hat P_1,\hat P_2$ составлены соответственно из d_2 первых и оставшихся r_2 строк матрицы $\hat P$.

Из условий (10), (11) вытекает, что пересечение векторных подпространств Π_1 и Π_2 пространства Π непрерывных ω-периодических вектор-функций, образованных линейными оболочками столбцов соответственно блоков $\tilde A_{d,d}^{(11)}(t)$ и $C(t)$, нетривиально, т. е., другими словами, $\dim(\Pi_1\bigcap\Pi_2)=s$, $1\le s\le\min\{d,r_2\}$. В таком случае между столбцами этих блоков имеется зависимость вида

$$\tilde A_{d,d}^{(11)}(t)F=C(t)G\,, \tag{15}$$

где F – постоянная ($d\times s$)-матрица, G – постоянная ($r_2\times s$)-матрица, $\operatorname{rank}F=\operatorname{rank}G=s$.

Зависимость вида (15) в [7] определена как двусторонняя. В частных случаях, когда в линейной комбинации (15) присутствует матричный коэффициент только при левом (правом) блоке, зависимость такого рода будет левосторонней (правосторонней), т. е. односторонней. Отметим, что при односторонней зависимости пересечением подпространств Π_1 и Π_2 является одно из этих подпространств.

Так как ранг матрицы F равен s, то у нее найдется отличный от нуля минор порядка s. Без ограничения общности будем считать, что этот минор является главным, поскольку в противном случае этого можно добиться подходящим линейным невырожденным преобразованием строк матрицы F. Пусть F_1 – ($s\times s$)-матрица, составленная из первых s строк матрицы F, а F_2 – $(d-s)\times s$-матрица, составленная из остальных строк. Согласно сделанному допущению, $\det F_1\ne 0$. Матрицу $\tilde A_{d,d}^{(11)}(t)$ разобьем по вертикали на два блока $\tilde A_1^{(11)}(t)$ и $\tilde A_2^{(11)}(t)$ размерностей $d\times s$ и $d\times(d-s)$. Представим двустороннюю зависимость (15) в виде

$$\tilde A_1^{(11)}(t)F_1+\tilde A_2^{(11)}(t)F_2=C(t)G,$$

откуда находим

$$\tilde A_1^{(11)}(t)=-\tilde A_2^{(11)}(t)F_2F_1^{-1}+C(t)GF_1^{-1}\,. \tag{16}$$

С учетом принятых обозначений четвертая система в (14) примет вид

$$\tilde A_1^{(11)}(t)x'^{[d]}+\tilde A_2^{(11)}(t)x''^{[d]}+C(t)w_{[r_2]}=0,$$

где векторы $x^{[d]}=\mathrm{col}\left(x'^{[d]},x''^{[d]}\right)$, $x'^{[d]}=\mathrm{col}\left(x_1^{[d]},\ldots,x_s^{[d]}\right)$, $x''^{[d]}=\mathrm{col}\left(x_{s+1}^{[d]},\ldots,x_d^{[d]}\right)$. Подставляя в последнее равенство вместо $\tilde A_1^{(11)}(t)$ зависимость (16), получим

$$\left(-\tilde A_2^{(11)}(t)F_2F_1^{-1}+C(t)GF_1^{-1}\right)x'^{[d]}+\tilde A_2^{(11)}(t)x''^{[d]}+C(t)w_{[r_2]}=0\,,$$

откуда находим

$$\tilde A_2^{(11)}(t)\left(-F_2F_1^{-1}x'^{[d]}+x''^{[d]}\right)+C(t)\left(GF_1^{-1}x'^{[d]}+w_{[r_2]}\right)=0\,.$$

Поскольку столбцы матриц $\tilde A_2^{(11)}(t)$ и $C(t)$ линейно независимы, то последняя система имеет сильно нерегулярные периодические решения тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$-F_2F_1^{-1}x^{'[d]}+x^{"[d]}=0$, $GF_1^{-1}x^{'[d]}+w_{[r_2]}=0$. Пусть матрица $\widehat{A}^{(11)}_{d,d}$ разбита соответственно представлению вектора $x^{[d]}=\mathrm{col}\left(x^{'[d]},x^{"[d]}\right)$ на четыре блока $\widehat{A}^{(11)}_{11}$, $\widehat{A}^{(11)}_{12}$, $\widehat{A}^{(11)}_{21}$, $\widehat{A}^{(11)}_{22}$. Тогда система (14) запишется в виде

$$\dot{x}^{'[d]}=\widehat{A}^{(11)}_{11}x^{'[d]}+\widehat{A}^{(11)}_{12}x^{"[d]},\ \dot{x}^{"[d]}=\widehat{A}^{(11)}_{21}x^{'[d]}+\widehat{A}^{(11)}_{22}x^{"[d]},$$
$$\dot{w}^{[d2]}=\hat{H}^{(11)}_{d2,d2}w^{[d2]}+\hat{H}^{(12)}_{d2,r2}w_{[r2]}+\hat{P}_1x^{[d]},$$
$$\dot{w}_{[r2]}=\hat{H}^{(21)}_{r2,d2}w^{[d2]}+\hat{H}^{(22)}_{r2,r2}w_{[r2]}+\hat{P}_2x^{[d]},$$
$$\tilde{P}(t)x^{[d]}+\tilde{H}(t)w=0,\ x^{"[d]}=F_2F_1^{-1}x^{'[d]},w_{[r_2]}=-GF_1^{-1}x^{'[d]},$$

откуда получаем

$$\dot{x}^{'[d]}=(\hat{A}^{(11)}_{11}+\hat{A}^{(11)}_{12}F_2F_1^{-1})x^{'[d]},\ (F_2F_1^{-1}(\hat{A}^{(11)}_{11}+\hat{A}^{(11)}_{12}F_2F_1^{-1})-(\hat{A}^{(11)}_{21}+\hat{A}^{(11)}_{22}F_2F_1^{-1}))x^{'[d]}=0,$$
$$\dot{w}^{[d2]}=\hat{H}^{(11)}_{d2,d2}w^{[d2]}+(-\hat{H}^{(12)}_{d2,r2}GF_1^{-1}+\hat{P}_{11}+\hat{P}_{12}F_2F_1^{-1})x^{'[d]},$$
$$GF_1^{-1}\dot{x}^{'[d]}=\hat{H}^{(21)}_{r2,d2}w^{[d2]}+(\hat{H}^{(22)}_{r2,r2}GF_1^{-1}+\hat{P}_{21}+\hat{P}_{22}F_2F_1^{-1})x^{'[d]},$$
$$\tilde{P}(t)x^{[d]}+\tilde{H}(t)w=0,\ x^{"[d]}=F_2F_1^{-1}x^{'[d]},\ w_{[r_2]}=-GF_1^{-1}x^{'[d]}, \tag{17}$$

где матрицы $\hat{P}_{11}$, $\hat{P}_{21}$ образованы первыми s столбцами матриц $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$, а $\hat{P}_{21}$, $\hat{P}_{22}$ – оставшимися $d-s$ столбцами указанных матриц.

В силу [9] частотные спектры сильно нерегулярных периодических решений систем (8) и (17) совпадают.

Л е м м а. *Пусть выполнены предположения* (4)–(7), (10), (11) *и* (15). *Тогда задача управления асинхронным спектром для системы* (1) *сводится к нахождению* ω*-периодической матрицы* $U(t)=\widehat{U}+\tilde{U}(t)$ *такой, что система* (17) *имеет сильно нерегулярное периодическое решение* $x^{[d]}(t)$, $w(t)$, *при этом нерегулярное решение замкнутой системы* (3) *имеет вид* $x(t)=\mathrm{col}\left(x^{[d]}(t),Qw(t)\right)$.

Заметим, что если у матрицы $\widehat{A}^{(11)}_{11}+\widehat{A}^{(11)}_{12}F_2F_1^{-1}$ имеются чисто мнимые собственные числа

$$\pm i\lambda_j\ \ (\lambda_j\in L;\ j=1,\dots,l;\ 0\le 2l\le s), \tag{18}$$

которым соответствует p_j групп элементарных делителей, то первая система в (17) имеет семейство Ω-периодических решений

$$x^{'[d]}(t)=\sum_{j=1}^{l}a_j\cos\lambda_jt+b_j\sin\lambda_jt, \tag{19}$$

где коэффициенты a_j, b_j зависят от $2l'$ произвольных вещественных постоянных ($p_1+\ldots+p_l=l'$).

Имеет место

Т е о р е м а. *Пусть в системе* (1) *у матрицы* B *первые* d *строк нулевые, а остальные строки линейно независимы, матрица коэффициентов* $A(t)$ *удовлетворяет условиям* (10), (11), (15), *а ее усреднение допускает нижнее блочно-треугольное представление* (6) *в критическом случае* (7).

Задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L *для системы* (1) *с обратной связью* (2) *разрешима тогда и только тогда, когда выполняется тождество*

$$\left(F_2F_1^{-1}\left(\hat{A}^{(11)}_{11}+\hat{A}^{(11)}_{12}F_2F_1^{-1}\right)-\hat{A}^{(11)}_{21}-\hat{A}^{(11)}_{22}F_2F_1^{-1}\right)x^{'[d]}(t)\equiv 0 \tag{20}$$

и имеет место оценка

$$|L|\le[s/2]+[(r-r_2)/2]. \tag{21}$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть поставленная задача разрешима, т. е. найдется непрерывный ω-периодический матричный коэффициент $U(t)$ обратной связи (2) такой, что замкнутая система (3) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$ с целевым множеством частот L. Докажем, что при сделанных предположениях (4)–(7), (10), (11) и (15) условия теоремы являются необходимыми.

Согласно лемме, вектор $x(t)=\operatorname{col}\left(x'^{[d]}(t), x''^{[d]}(t), Q\operatorname{col}\left(w^{[d_2]}(t), w_{[r_2]}(t)\right)\right)$ удовлетворяет также системе (17). Пусть матрица $\widehat{A}_{11}^{(11)}+\widehat{A}_{12}^{(11)}F_2F_1^{-1}$ имеет $0\le l\le[s/2]$ пар чисто мнимых собственных чисел (18). Тогда компонента $x'^{[d]}(t)$ нерегулярного решения $x(t)$ имеет вид (19) и мощность ее частотного спектра не превосходит величины $[s/2]$. Если таких собственных чисел нет, то $x'^{[d]}(t)\equiv 0$. Поскольку $x'^{[d]}(t)$ удовлетворяет второй системе в (17), то выполняется тождество (20).

Третья система в (17) является линейной неоднородной и имеет нерегулярное решение $w^{[d_2]}(t)$. Поскольку частотный спектр ее неоднородной части определяется вектором $x'^{[d]}(t)$, а соответствующая однородная система является стационарной, то частотный спектр решения $w^{[d_2]}(t)$ содержит не более $[(r-r_2)/2]$ частот, отличных от чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$. Оставшиеся компоненты $x''^{[d]}(t), w_{[r_2]}(t)$ нерегулярного решения системы (17) линейно выражаются через $x'^{[d]}(t)$. Поэтому их частотные спектры могут содержать только числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$. Значит, для мощности частотного спектра нерегулярного решения $x(t)$ системы (3) имеет место оценка (21).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнены условия теоремы. Требуемый для решения поставленной задачи ω-периодический коэффициент обратной связи управления (2) представим в каноническом виде $U(t)=\widehat{U}+\tilde{U}(t)$. При сделанных предположениях (4)–(7), (10), (11) и (15) в смысле существования нерегулярных колебаний системы (3) и (17) эквивалентны.

Поскольку матрица $\widehat{A}_{11}^{(11)}+\widehat{A}_{12}^{(11)}F_2F_1^{-1}$ имеет собственные числа (18), то вектор $x'^{[d]}(t)$, определяемый равенством (19), является решением первой системы в (17). Кроме этого, в силу тождества (20) $x'^{[d]}(t)$ удовлетворяет также и второй системе в (17).

Пусть $\hat{H}_{d2,d2}^{(11)}$– некоторая $d_2\times d_2$-матрица, имеющая собственные числа

$$\pm i\lambda_j\ \ (\lambda_j\in L;\ j=l+1,\ldots,l+m;\ 0<m\le[d_2/2]). \tag{22}$$

Выберем матрицы $\hat{H}_{d2,r2}^{(12)}$, $\hat{P}_{11}$, $\hat{P}_{12}$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$-\hat{H}_{d2,r2}^{(12)}GF_1^{-1}+\hat{P}_{11}+\hat{P}_{12}F_2F_1^{-1}=0. \tag{23}$$

Этого всегда можно добиться, так как, по меньшей мере, $\hat{P}_{11}$ линейно выражается через $\hat{H}_{d2,r2}^{(12)}$ и $\hat{P}_{12}$. С учетом (22), (23) третья система в (17) будет иметь периодическое решение

$$w'^{[d_2]}(t)=\sum_{j=l+1}^{l+m}a_j\cos\lambda_jt+b_j\sin\lambda_jt, \tag{24}$$

где коэффициенты a_j, b_j зависят от $2m$ произвольных вещественных постоянных, а частоты λ_j принадлежат целевому множеству L.

Далее положим

$$\hat{H}_{r2,d2}^{(21)}=0, \tag{25}$$

а матрицы $\hat{H}_{r2,r2}^{(22)}$, $\hat{P}_{21}$, $\hat{P}_{22}$ выберем так, чтобы выполнялось равеннство

$$\hat{H}_{r2,r2}^{(22)}GF_1^{-1}+\hat{P}_{21}+\hat{P}_{22}F_2F_1^{-1}=GF_1^{-1}\left(\hat{A}_{11}^{(11)}+\hat{A}_{12}^{(11)}F_2F_1^{-1}\right). \tag{26}$$

Этого также всегда можно добиться, поскольку, в частности, $\hat{P}_{21}$ линейно выражается через остальные матрицы. В силу (25), (26) четвертая система в (17) превращается в тождество.

Определим векторы $x''^{[d]}(t)$ и $w_{r_2}(t)$ следующим образом:

$$x''^{[d]}(t)=F_2F_1^{-1}x'^{[d]}(t),\ \ w_{[r_2]}(t)=GF_1^{-1}x'^{[d]}(t). \tag{27}$$

Тогда $x''^{[d]}(t)$ и $w_{[r_2]}(t)$ будут удовлетворять последним двум равенствам в системе (17).

Если выбрать матрицы

$$\tilde{P}(t) \equiv 0,\ \tilde{H}(t) \equiv 0, \tag{28}$$

то пятая система в (17) становится тождеством.

В итоге вектор

$$\mathrm{col}\left(x'^{[d]}(t),\ x''^{[d]}(t),\ w^{[d_2]}(t),\ w_{[r_2]}(t)\right) \tag{29}$$

будет Ω-периодическим решением системы (17).

Из построеных выше матриц с учетом (22), (23), (25), (26) образуем матрицы

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} \end{pmatrix},\ \hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}^{(11)}_{d2,d2} & \hat{H}^{(12)}_{d2,r2} \\ \hat{H}^{(21)}_{r2,d2} & \hat{H}^{(22)}_{r2,r2} \end{pmatrix} \tag{30}$$

и рассмотрим матричные уравнения

$$B_{r,n}\hat{Y}_{n,d} = -\hat{A}^{(21)}_{r,d} + Q\hat{P}, \tag{31}$$

$$B_{r,n}\hat{Y}_{n,r} = -\hat{A}^{(22)}_{r,r} + Q\hat{H} \tag{32}$$

с неизвестными матрицами $\hat{Y}_{n,d}$ и $\hat{Y}_{n,r}$ размерностей $n\times d$ и $n\times r$ соответственно.

Пусть $E_{r,r}$ – единичная $(r\times r)$-матрица. Так как ранг матрицы $B_{r,n}$ равен r, $r<n$, то система $B_{r,n}Y_0 + E_{r,r} = 0$ разрешима относительно $(n\times r)$-матрицы Y_0. Пусть Y_0 – какое-либо ее решение. Тогда матрицы $\hat{Y}_{n,d} = Y_0\left(\hat{A}^{(21)}_{r,d} - Q\hat{P}\right)$ и $\hat{Y}_{n,r} = Y_0\left(\hat{A}^{(22)}_{r,r} - Q\hat{H}\right)$ будут решениями уравнений (31) и (32). Для выбора стационарной составляющей коэффициента обратной связи положим

$$\hat{U} = \left\{\hat{Y}_{n,d},\ \hat{Y}_{n,r}\right\}. \tag{33}$$

Рассмотрим также матричные уравнения

$$B_{r,n}\tilde{Y}_{n,d} = -\tilde{A}^{(21)}_{r,d}(t) + Q\tilde{P}(t), \tag{34}$$

$$B_{r,n}\tilde{Y}_{n,r}(t) = -\tilde{A}^{(22)}_{r,r}(t) + Q\tilde{H}(t), \tag{35}$$

где $\tilde{Y}_{n,d}$ и $\tilde{Y}_{n,r}$ – неизвестные ω-периодические матрицы размерностей $n\times d$ и $n\times r$ соответственно, а $\tilde{P}(t)$ и $\tilde{H}(t)$ согласно (28) тождественно равны нулю. В таком случае $Y_{n,d}(t) = Y_0\tilde{A}^{(21)}_{r,d}(t)$ и $Y_{n,r}(t)Y_0\tilde{A}^{(22)}_{r,r}(t)$ будут решениями уравнений (34) и (35). Для выбора нестационарной составляющей коэффициента обратной связи положим

$$\tilde{U}(t) = \left\{\tilde{Y}_{n,d}(t),\ \tilde{Y}_{n,r}(t)\right\}. \tag{36}$$

Согласно лемме, вектор

$$x(t) = \mathrm{col}\left(x'^{[d]}(t), F_2F_1^{-1}x'^{[d]}(t), Q\,\mathrm{col}\left(w^{[d2]}(t), GF_1^{-1}x'^{[d]}(t)\right)\right), \tag{37}$$

где $x'^{[d]}(t)$, $w^{[d_2]}(t)$ определяются равенствами (19) и (24), является сильно нерегулярным решением замкнутой системы (3).

Таким образом, при выполнении условий теоремы для системы (1) разрешима задача управления асинхронным спектром. Требуемый коэффициент обратной связи управления (2) имеет канонический вид $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$, слагаемые которого определяются равенствами (33) и (36). Сильно нерегулярное периодическое решение с целевым множеством частот L замкнутой управлением (2) системы (3) представлено тригонометрическим многочленом вида (37).

Теорема доказана.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПНИ «Конвергенция».

Литература

1. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.
2. *Деменчук А. К.* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 9. С. 1241–1246.
3. *Деменчук А. К.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 4. С. 11–16.
4. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 5. С. 35–39.
5. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 4. С. 27–31.
6. *Деменчук А. К.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2013. Т. 21, № 2. С. 22–29.
7. *Деменчук А. К.* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 4. С. 439–445.
8. *Деменчук А .К.* // Дифференц. уравнения. 2013. Т.49, № 1. С. 3–8.
9. *Грудо Э. И.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.

A. K. DEMENCHUK

CONTROL PROBLEM OF AN ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR SYSTEMS WITH A RIGHT BLOCK OF IMPERFECT RANK

Summary

We consider a linear control periodic system with reverse communication. It is supposed that a right block of coefficint matrix has an imperfect column rank. The control problem of an asynchronous spectrum is solved.