View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

ІНФАРМАТЫКА

УДК 658.512.2

Г. М. ЛЕВИН[1], Б. М. РОЗИН[1], А. Б. ДОЛГИЙ[2]

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫПУСКА И ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ОБРАБОТКИ ГРУППЫ ДЕТАЛЕЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ СПРОСЕ

[1]Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь, e-mail: levin@newman.bas-net.by, rozin@newman.bas-net.by
[2]Горная школа Нанта, Нант, Франция, e-mail: Alexandre.Dolgui@mines-nantes.fr

Рассматривается задача оптимизации размеров выпуска группы деталей и интенсивностей их обработки на многопозиционном оборудовании блоками инструментов при нестационарном спросе на заданных временных интервалах. Состав группы не меняется от интервала к интервалу. В качестве целевой функции принята сумма затрат на производство, хранение избытков деталей и штрафы за неудовлетворенный спрос на них. Затраты на выпуск группы деталей зависят от интенсивностей их обработки. Предложен декомпозиционный метод решения задачи.

Ключевые слова: размер партии, группа деталей, интенсивность обработки, минимизация затрат, декомпозиционный метод.

G. M. LEVIN[1], B. M. ROZIN[1], A. B. DOLGUI[2]

OPTIMIZING THE OUTPUT AND THE INTENSITIES OF PROCESSING A BATCH OF PARTS UNDER NON-STATIONARY DEMAND

[1]United Institute of Informatics Problems of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus, e-mail: levin@newman.bas-net.by, rozin@newman.bas-net.by
[2]Ecole des Mines de Nantes, Nantes, France, e-mail: Alexandre.Dolgui@mines-nantes.fr

We consider a problem of optimizing the output of a batch of parts and intensities of its processing with tool blocks on a multiposition equipment under non-stationary demand and predetermined time intervals. The batch content does not vary from one interval to another. The objective function is the sum of production cost, storage cost of excess parts, and penalties for unmet demand. The production cost depends on processing intensities. A decomposition method for solving the problem is proposed.

Keywords: lot size, batch of parts, intensity of processing, cost minimization, decomposition method.

Введение. Классификации задач планирования производства партий изделий с учетом затрат на их выпуск и хранение посвящены, в частности, обзоры [1–3] и др. К основным классификационным характеристикам подобных задач обычно относят следующие (см., напр., [1, 2]): горизонт планирования (конечный либо бесконечный), тип планирования (долгосрочное, среднесрочное или оперативное); количество наименований выпускаемых изделий (одно либо несколько); одноуровневое или многоуровневое принятие решений о размере выпуска в зависимости от сложности изготовляемых изделий; наличие либо отсутствие ресурсных ограничений, лимитирующих размер выпуска; предполагают ли условия хранения произведенных изделий их порчу в зависимости от времени хранения; допускается ли невыполнение (или частичное выполнение) заказов на изделия (отложенный спрос) либо неудовлетворенный спрос означает потерю заказа; является ли спрос на изделия стационарным (постоянным) либо динамически изменяемым; величина спроса детерминированная или случайная; зависит (или не зависит) спрос на изделия в конкретном временном интервале от спроса на изделия других наименований в этом интервале и на предыдущих временных интервалах планирования; учитываются ли затраты (материальные

© Левин Г. М., Розин Б. М., Долгий А. Б., 2016

и временные) на переналадку системы при добавлении либо замене выпуска системой изделий одних наименований на другие, а также при изменении программы выпуска. Сложность соответствующих задач существенно зависит от характеристик их конкретных постановок.

Бóльшая часть исследований в области одноуровневых детерминированных задач планирования выпуска изделий на конечном дискретном горизонте с динамически изменяющимся спросом и ограничениями на мощность производственной системы касается выпуска изделий одного наименования [4, 5]. Вместе с тем большое внимание уделяется многопродуктовым задачам [6]. Поскольку классические постановки обоих типов этих задач – NP-трудные [7, 8, 9], большинство предложенных алгоритмов их решения являются эвристическими (см., напр., [10–16]). Здесь особо следует отметить эвристики, предполагаюшие использование при их формулировке и реализации методов математического программирования ([15] и др.), а также эвристики, основанные на методе «ветвей и границ» [16].

Среди точных методов решения отмеченных задач, кроме непосредственного использования для их решения формулировок в терминах смешанного целочисленного линейного программирования и метода «ветвей и границ» [16–19], применяются также два других подхода. В одном из них используются методы генерации отсечений в комбинации с методом «ветвей и границ» [20, 21], а в другом производится переопределение переменных с последующим решением релаксированной задачи линейного программирования также в комбинации с методом «ветвей и границ» [22]. Для решения однопродуктовых задач с динамически изменяющимся спросом часто применялись также методы типа динамического программирования [23–25]. В последнее время внимание многих исследователей однопродуктовых задач с ограниченной мощностью системы привлекали также полностью полиномиальные многошаговые аппроксимационные схемы [4, 5], позволяющие находить приближенное решение задачи с заданной относительной погрешностью оптимального значения целевой функции.

Ниже рассматривается одна из постановок одноуровневых задач среднесрочного планирования выпуска производственной системой ограниченной мощности группы изделий с детерминированным динамическим спросом на конечном дискретном горизонте планирования, состоящем из заданного числа временных интервалов известной длительности. Допускается частичное (полное) невыполнение заказов по каждому изделию группы, которые могут быть удовлетворены на последующих интервалах (отложенный спрос).

В качестве основных отличий исследуемой постановки от известных можно отметить следуюшие. Во-первых, состав группы не изменяется от интервала к интервалу (что определяется спецификой используемой производственной системы), в то время как объемы спроса на различные изделия группы в различных временных интервалах не связаны между собой. Во-вторых, решения о размере партии в любом временном интервале принимаются одновременно с выбором интенсивностей обработки деталей группы, определяющих как возможность выпуска партии такого размера, так и стоимость самого выпуска. Следует отметить, что если пропорции спроса на различные детали группы не изменяются от интервала к интервалу, то такую задачу можно свести к однопродуктовой, где в качестве продукта рассматривается группа в целом. Таким образом, рассматриваемая задача занимает промежуточное место между много- и однопродуктовыми задачами.

1. Постановка задачи и математическая модель. Рассматривается задача управления программой выпуска и интенсивностями обработки при многономенклатурном производстве деталей заданного множества $D = \{d_1, d_2,\ldots, d_m\}$ их типов на временных интервалах $T_1,\ldots,T_t,\ldots,T_n$ заданного горизонта планирования $T = \sum_{t=1}^{n} T_t$ с учетом динамики предполагаемого спроса на детали, затрат на их производство, хранение излишков деталей и штрафов за не поставленные заказчику изделия.

Предполагается, что детали обрабатываются последовательно одна за другой идентичными как по составу, так и по порядку расположения деталей группами, каждая из которых включает h_d деталей $d \in D$, $\sum_{d \in D} h_d = h.$ Обработка производится на многопозиционной производственной линии конвейерного типа, состоящей из ряда линейно упорядоченных позиций [26]. Каждая деталь группы обрабатывается в указанном порядке на каждой рабочей позиции соответствующим этой позиции и детали набором блоков инструментов, причем в каждый момент времени на каждой позиции может обрабатываться лишь одна деталь. Один такт обработки состоит в одновременной обработке на каждой из рабочих позиций соответствующей (такту и позиции) детали.

После завершения любого такта обрабатываемые детали со своих позиций синхронно перемещаются на следующие позиции, деталь с последней рабочей позиции поступает на позицию разгрузки, а на первую рабочую позицию поступает очередная деталь последовательности. Цикл обработки всей группы деталей состоит из h тактов и может включать идентичные такты (характеризуемые идентичным расположением деталей группы на всех рабочих позициях с соответствующей их одинаковой обработкой). В дальнейшем $I = \{1,\ldots,\eta\}$ – множество номеров различных тактов и k_i – количество идентичных тактов $i \in I$ в цикле, $\sum_{i \in I} k_i = h$.

Обработка детали на позиции может осуществляться одним либо одновременно несколькими (соответствующими позиции и детали) кинематически не связанными между собой блоками инструментов, причем все инструменты одного блока работают параллельно и имеют общий параметр интенсивности обработки (например, минутную подачу). Таким образом, каждый такт $i \in I$ заключается в одновременной обработке различных деталей соответствующим подмножеством J_i блоков (инструментов) из множества J блоков, установленных на линии, причем такт i может включать обработку m_{ij} идентичными блоками $j \in J_i$. Подмножества блоков из семейства $\{J_1,\ldots,J_i,\ldots,J_\eta\}$ могут пересекаться и $\bigcup_{i=1}^{\eta} J_i = J$. Далее под парой ij подразумевается блок $j \in J$, выполняющий в такте $i \in I$ обработку детали, соответствующей такту и позиции, на которой блок выполняет обработку.

Выполнение обработки каждым блоком инструментов в некотором такте связано с расходом соответствующих возобновляемых ресурсов (в частности, инструментов, изнашиваемых в процессе обработки). Степень и скорость расхода ресурса зависят как от объема обработки, так и от интенсивности ее выполнения [26]. Восстановление любого из ресурсов (например, смена инструментов) осуществляется после его полного расходования (износа) по завершении такта, во время которого это произошло. Выполнение очередного такта может начаться лишь тогда, когда процесс восстановления соответствующего ресурса (смены инструментов блока) завершен.

В данной работе предполагается, что выбираемая интенсивность обработки деталей блоком $j \in J$ во временном интервале $t = 1,\ldots,n$ принимается одинаковой для всех обрабатываемых им деталей группы, т. е. не изменяется от такта к такту. Обозначим эту интенсивность (являющуюся искомым параметром) через z_{jt} и положим $z_t = (z_{jt}|j \in J)$ и $z = (z_t|t = 1,\ldots,n)$.

Для пар $ij \in G = \{ij|i \in I, j \in J_i\}$ задаются следующие параметры:

– объем V_{ij} обработки деталей блоком $j \in J$ в такте $i \in I$;

– отрезок $[z_{1jt}, z_{2jt}]$ возможных значений интенсивности z_{jt} в интервале t;

– определенные на этом отрезке выпуклые функции $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$, представляющие зависимости от принимаемой интенсивности z_{jt} отнесенных к единице объема затрат (включая затраты на ресурсы и их восстановление) на обработку деталей блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и времени восстановления ресурсов соответственно.

При фиксированном значении $z_t \in Z_t = \prod_{j \in J} [z_{1jt}, z_{2jt}]$ длительность обработки в интервале t детали блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и длительность этого такта равны $V_{ij} z_{jt}$ и $\max\{V_{ij} z_{jt}|j \in J_i\}$, а затраты на обработку детали блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и затраты времени на восстановление ресурсов, отнесенные к этой обработке, равны $V_{ij} f_{ijt}(z_{jt})$ и $V_{ij} \varphi_{ijt}(z_{jt})$ соответственно.

Общие затраты (как материальные, так и временные) на выполнение каждого из тактов $i \in I$ помимо суммарных затрат по всем составляющим его блокам включают также дополнительные. В достаточно общем случае можно принять, что эти дополнительные затраты состоят из двух частей, первая из которых пропорциональна длительности такта, а вторая от нее не зависит.

Параметры E_{1it}, E_{2it}, R_{1it} и R_{2it} этих линейных зависимостей для интервала $t\in\{1,\ldots,n\}$ предполагаются заданными.

При принятых предположениях общие затраты $F_{1t}(z_t)$ на выполнение всех тактов одного цикла обработки группы и общая длительность $F_{2t}(z_t)$ цикла в интервале t в зависимости от значения $z_t \in Z_t$ определяются следующими соотношениями:

$$F_{1t}(z_t) = \sum_{i\in I} k_i \left(E_{1it} + E_{2it} \max_{j\in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j\in J_i} m_{ij} V_{ij} f_{ijt}(z_{jt}) \right),$$

$$F_{2t}(z_t) = \sum_{i\in I} k_i \left(R_{1it} + R_{2it} \max_{j\in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j\in J_i} m_{ij} V_{ij} \varphi_{ijt}(z_{jt}) \right).$$

Для формирования математической модели рассматриваемой задачи в целом введем следующие дополнительные обозначения:

$x = (x_1,\ldots,x_t,\ldots,x_n)$, где x_t – количество групп деталей, которое планируется выпускать в интервале t;

$\overline{x}_t$ – предельное количество групп, которое может быть выпущено (исходя из производственных условий) в интервале $t = 1,\ldots,n$;

λ_{dt} – спрос на деталь $d \in D$ в интервале t и $\Lambda_{dt} = \sum_{r=1}^{t} \lambda_{dr}$;

$H_{dt}(y)$ – заданные функции стоимости хранения (при $y > 0$), либо штрафа за неудовлетворенный спрос (при $y < 0$) для y деталей $d \in M$ в интервале $t = 1,\ldots,n$. Функции $H_{dt}(y)$ определены на отрезках $[-\Lambda_{dt}, h_d \sum_{r=1}^{t} \overline{x}_r - \Lambda_{dt}]$, не возрастают при $y < 0$, не убывают при $y > 0$ и $H_{dt}(0) = 0$.

С учетом изложенного рассматриваемая задача определения оптимальных (в совокупности) программы x_t выпуска групп деталей и интенсивностей z_t их обработки в каждом интервале времени $t \in \{1,\ldots,n\}$ сводится к следующей задаче математического программирования:

$$\Psi(x,z) = \sum_{t=1}^{n} F_{1t}(z_t) x_t + \sum_{t=1}^{n} \sum_{d\in D} H_{dt}\left(h_d \sum_{r=1}^{t} x_r - \Lambda_{dt} \right) \to \min, \tag{1}$$

$$F_{2t}(z_t) x_t \le T_t, \quad t = 1,\ldots, n, \tag{2}$$

$$x_t \in [0, \overline{x}_t], \quad t = 1,\ldots, n, \tag{3}$$

$$z_t \in Z_t, \quad t = 1,\ldots, n. \tag{4}$$

Здесь целевая функция в (1) представляет зависимость общих затрат на выпуск заданных количеств групп деталей от оптимизируемых параметров с учетом как стоимости самого выпуска, так и затрат на хранение излишне произведенных деталей и штрафов за недопоставленные заказчику изделия. Ограничение (2) обеспечивает возможность выпуска за интервал t планируемого количества групп деталей. Задачу (1)–(4) будем называть в дальнейшем задачей $\boldsymbol{A}$.

2. Методы решения. Для решения задачи $\boldsymbol{A}$ можно воспользоваться следующей декомпозиционной схемой:

– на нижнем уровне при фиксированных величинах выпуска $x = (x_1,\ldots,x_n)$ для каждого $t = 1,\ldots, n$ решается автономная подзадача $\boldsymbol{B}_t(x_t)$ по определению оптимальных (для такой программы выпуска) значений $z_t^*(x_t)$ интенсивностей обработки;

– на верхнем уровне решается координирующая подзадача $\boldsymbol{C}$ по определению значений x^* вектора x выпуска групп деталей по всем интервалам времени с учетом совокупности всех рассматриваемых затрат.

При принятых предположениях о функциях $f_{ijt}(\cdot)$ и $\varphi_{ijt}(\cdot)$ подзадачи $\boldsymbol{B}_t(x_t)$ сводятся к следующим задачам выпуклого программирования:

$$\Phi_{1t}(z_t) = \sum_{i\in I} k_i \left(E_{2it} \max_{j\in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j\in J_i} m_{ij} V_{ij} f_{ijt}(z_{jt}) \right) \to \min \quad (=R_t(x_t)), \tag{5}$$

$$\Phi_{2t}(z_t) = \sum_{i\in I} k_i \left(R_{2it} \max_{j\in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j\in J_i} m_{ij} V_{ij} \varphi_{ijt}(z_{jt}) \right) \le T_t / x_t - \sum_{i\in I} k_i R_{1it}, \qquad (6)$$

$$z_t \in Z_t. \qquad (7)$$

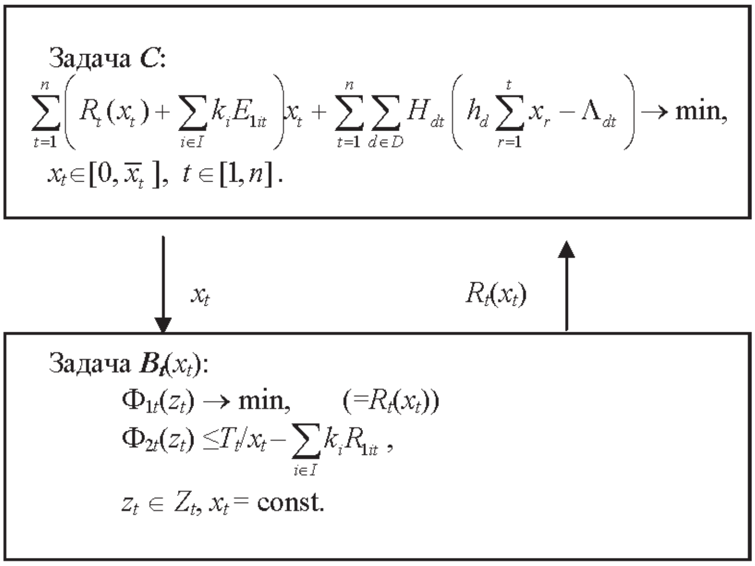
Предполагается, что $R_t(x_t) = \infty$, если для текушего значения x_t подзадача (5)–(7) не имеет решения.

В свою очередь подзадача $\boldsymbol{C}$ сводится к задаче многошаговой оптимизации:

$$\sum_{t=1}^{n} \left(R_t(x_t) + \sum_{i\in I} k_i E_{1it} \right) x_t + \sum_{t=1}^{n} \sum_{d\in D} H_{dt} \left(h_d \sum_{r=1}^{t} x_r - \Lambda_{dt} \right) \to \min, \quad (=\Psi^*), \qquad (8)$$

$$z_t \in Z_t, \ \ t = 1,\dots,n. \qquad (9)$$

Предлагаемая декомпозиционная схема решения задачи $\boldsymbol{A}$ укрупненно представлена на рисунке.



Декомпозиционная схема решения задачи $\boldsymbol{A}$

Очевидно, что если $z_t^*(x_t)$ являются решениями задач $\boldsymbol{B}_t(x_t)$ и x_t^* – решениями задачи $\boldsymbol{C}$ для $t \in [1, n]$, то $(x^*, z^*(x^*))$ – решение задачи $\boldsymbol{A}$.

Для решения задач $\boldsymbol{B}_t(x_t)$ могут быть использованы известные методы выпуклого программирования и реализующие их пакеты программ. В частности, они могут быть сведены к задачам линейного программирования посредством аппроксимации функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$ кусочно-линейными функциями [26], причем если функции $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$ одинаковы для всех интервалов t, то эти аппроксимации не зависят от t.

Аппроксимация кусочно-линейными функциями функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$ может быть выполнена, например, следующим образом.

Построим кусочно-линейные аппроксимации функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$, полагая для всех $ij \in G$, $t = 1,\dots,n$:

$$f_{ijt}(z_{jt}) \approx \max\{a_{ijkt} z_{jt} + b_{ijkt} \mid k = 1,\dots,v_{ijt}\} \qquad (10)$$

и

$$\varphi_{ijt}(z_{jt}) \approx \max\{c_{ijkt} z_{jt} + d_{ijkt} \mid k = 1,\dots,q_{ijt}\}, \qquad (11)$$

где a_{ijkt}, b_{ijkt}, v_{ijt}, c_{ijkt}, d_{ijkt} и q_{ijt} являются параметрами этой аппроксимации, параметры v_{ijt} и q_{ijt} во многом определяют ее точность.

Тогда приближенное решение подзадачи $\boldsymbol{B}_t(x_t)$, $t = 1,\dots,n$ может быть получено в результате решения следующей задачи линейного программирования:

$$\sum_{i\in I}\tilde{E}_{2it}\gamma_{it}+\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\tilde{V}_{ij}\chi_{ijt}\to\min; \qquad (12)$$

$$\sum_{i\in I}\tilde{R}_{2it}\gamma_{it}+\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\tilde{V}_{ij}\mu_{ijt}\le T_t/x_t-\sum_{i\in I}\tilde{R}_{1it}; \qquad (13)$$

$$\chi_{ijt}-a_{ijkt}z_{jt}\ge b_{ijkt},\quad i\in I,\ j\in J_i,\ k=1,\ldots,v_{ijt}; \qquad (14)$$

$$\mu_{ijt}-c_{ijkt}z_{jt}\ge d_{ijkt},\quad i\in I,\ j\in J_i,\ k=1,\ldots,q_{ijt}; \qquad (15)$$

$$\gamma_{it}-V_{ij}z_{jt}\ge 0,\quad i\in I,\ j\in J_i; \qquad (16)$$

$$z_{jt}\in[z_{1jt},z_{2jt}],\quad j\in J, \qquad (17)$$

где $\tilde{E}_{2it}=k_iE_{2it}$, $\tilde{R}_{1it}=k_iR_{1it}$, $\tilde{R}_{2it}=k_iR_{2it}$ и $\tilde{V}_{ij}=k_im_{ij}V_{ij}$. Искомыми в этой задаче являются векторы $\gamma_t=(\gamma_{it}\mid i\in I)$, $z_t=(z_{jt}\mid j\in J)$, $\chi_t=(\chi_{ijt}\mid i\in I, j\in J_i)$ и $\mu_t=(\mu_{ijt}\mid i\in I, j\in J_i)$. Очевидно, что если $(\gamma_t^*, z_t^*, \chi_t^*, \mu_t^*)$ – ее решение, то вектор z_t^* может быть принят в качестве приближенного решения исходной задачи $\boldsymbol{B}_t(x_t)$. Несовпадение минимальных значений целевых функций этих задач определяется точностью аппроксимации функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\varphi_{ijt}(z_{jt})$ в окрестности решения исходной задачи.

Пусть $t\in\{1,\ldots,n\}$, $\bar{X}_t=\sum_{r=1}^{t}\bar{x}_r$, $X_t\in[0,\bar{X}_t]$ и $\Phi_t(X_t)$ – наименьшее значение функции $\sum_{r=1}^{t}\left(R_r(x_r)+\sum_{i\in I}k_iE_{1ir}\right)x_r+\sum_{r=1}^{t}\sum_{d\in D}H_{dr}\left(h_d\sum_{q=1}^{r}x_q-\Lambda_{dr}\right)$ по всем таким $x^t=(x_1,\ldots,x_r,\ldots,x_t)$, что $x_r\in[0,\bar{x}_r]$ для всех $r=1,\ldots,t$ и $\sum_{r=1}^{t}x_r=X_t$. Поскольку $\Psi^*=\min\{\Phi_n(X_n)|X_n\in[0,\bar{X}_n]\}$, то решение подзадачи (8), (9) может быть получено с использованием следующего рекуррентного соотношения динамического программирования:

$$\Phi_t(X_t)=\min\{\Phi_{t-1}(X_{t-1})+(R_t(X_t-X_{t-1})+\sum_{i\in I}k_iE_{1t})(X_t-X_{t-1})+\sum_{d\in D}H_{dt}(h_dX_t-\Lambda_{dt})|X_{t-1}\in[0,\bar{X}_{t-1}],$$
$$X_t-X_{t-1}\in[0,\bar{x}_t]\},$$
$$\Phi_0(0)=0.$$

При использовании для решения задачи $\boldsymbol{C}$ верхнего уровня известных схем динамического программирования для оптимизации дискретных n-шаговых процессов число возможных состояний на шаге $t=1,\ldots,n$ не превосходит $\sum_{r=1}^{t}\bar{x}_r$. В этом случае трудоемкость решения задачи $\boldsymbol{C}$ может быть оценена как $O(nm(\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i)^2)$ операций при условии, что функции $R_t(x_t)$, $H_{dt}(\cdot)$, $d\in D=\{d_1,d_2,\ldots,d_m\}$, $t=1,\ldots,n$, вычисляются за постоянное число операций.

При погрешности δ_t определения величин $R_t(x_t)$, $t=1,\ldots,n$, при решении задач $\boldsymbol{B}_t(x_t)$ нижнего уровня погрешность в определении оптимального значения целевой функции предложенным методом не превосходит величины $\sum_{t=1}^{n}\delta_t\bar{x}_t$.

Заключение. Рассмотрена задача оптимизации стоимости серийного выпуска группы деталей нескольких наименований постоянного состава и интенсивностей обработки деталей набором блоков инструментов на многопозиционной производственной системе ограниченной мощности на ряде временных интервалов с учетом затрат как на сам выпуск, так и на хранение излишне произведенных деталей и штрафов за не поставленные заказчику изделия.

Предложена двухуровневая декомпозиционная схема решения этой задачи для случая выпуклых функций зависимости затрат на обработку деталей группы каждым блоком инструментов от принимаемой интенсивности, отнесенных к единице объема затрат (включая затраты на ресурсы и их восстановление). На нижнем уровне для каждого интервала решаются подзадачи выпуклого программирования по оптимизации интенсивностей обработки деталей группы соответствующими блоками инструментов при фиксированном объеме выпуска. На верхнем уровне методом динамического программирования оптимизируются числа выпускаемых групп для всех интервалов.

В дальнейшем предполагается исследовать более общие постановки рассматриваемой задачи, когда спрос на детали группы в различных временных интервалах является недетерминированным (в частности, подчиняется некоторому известному вероятностному распределению либо такое распределение не известно и заданы лишь диапазоны возможных величин спроса на каждую из деталей группы в каждом интервале), а также когда функции зависимости материальных и временных затрат на выпуск группы деталей от интенсивностей обработки не являются выпуклыми.

Список использованной литературы

1. *Karimi, B.* The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms / B. Karimi, S. M. T. Fatemi Ghomi, J. M. Wilson // Omega. – 2003. – Vol. 31, N 5. – P. 365–378.

2. *Ullah, H.* A Literature Review on Inventory Lot Sizing Problems / H. Ullah, S. Parveen // Global J. Res. Eng. – 2010. – Vol. 10, N 5. – P. 21–36.

3. *Robinson, P.* Coordinated deterministic dynamic demand lot-sizing problem: A review of models and algorithms / P. Robinson, A. Narayanan, F. Sahin // Omega. – 2009. – Vol. 37, N 1. – P. 3–15.

4. *Van Hoesel, C. P. M.* Fully polynomial approximation schemes for single-item capacitated economic lot-sizing problems / C. P. M. Van Hoesel, A. P. M. Wagelmans // Math. Oper. Res. – 2001. – Vol. 26, N 2. – P. 339–57.

5. *Ng, C. T.* A simple FPTAS for a single-item capacitated economic lot-sizing problem with monotone cost structure / C. T. Ng, M. Y. Kovalyov, T. C. E. Cheng // Eur. J. Oper. Res. – 2010. – Vol. 200. – P. 621–624.

6. *Absi, N.* The multi-item capacitated lot-sizing problem with safety stocks and demand shortage costs / N. Absi, S. Kedad-Sidhoum // Comput. Oper. Res. – 2009. – Vol. 36, N 11. – P. 2926–2936.

7. *Florian, M.* Deterministic production planning: Algorithms and complexity / M. Florian, J. K. Lenstra, A. H. G. R. Kan // Management Science. – 1980. – Vol. 26. – P. 669–679.

8. *Bitran, G. R.* Computational complexity of the capacitated lot size problem / G. R. Bitran, H. H. Yanasse // Management Science. – 1982. – Vol. 28, N 10. – P. 1174–1186.

9. *Chen, W. H.* Analysis of relaxations for the multi-item capacitated lot-sizing problem / W. H. Chen, J. M. Thizy // Ann. Oper. Res. – 1990. – Vol. 26. – P. 29–72.

10. *Dixon, P. S.* A heuristic solution procedure for the multi-item, single level, limited capacity, lot sizing problem / P. S. Dixon, E. A. Silver // J. of Operations Management. – 1981. – Vol. 21, N 1. – P. 23–40.

11. *Maes, J.* A simple heuristic for the multi-item single level capacitated lot sizing problem / J. Maes, L. N. Van Wassenhove // Oper. Res. Lett. – 1986. – Vol. 4, N 6. – P. 265–273.

12. *Dogramaci, A.* The dynamic lot-sizing problem for the multiple items under limited capacity / A. Dogramaci, J. C. Panayiotopoulos, N. R. Adam // AIIE Transactions. – 1981. – Vol. 13, N 4. – P. 294–303.

13. *Karni, R.* A heuristic algorithm for the multi-item lot sizing problem with capacity constraints / R. Karni, Y. Roll // AIIE Transactions. – 1982. – Vol. 14, N 4. – P. 249–259.

14. *Gunther, H. O.* Planning lot sizes and capacity requirements in a single stage production systems / H. O. Gunther // Eur. J. Oper. Res. – 1987. – Vol. 31, N 2. – P. 223–231.

15. *Thizy, J. M.* Lagrangean relaxation for the multi-item capacitated lot-sizing problem: a heuristic implementation / J. M. Thizy, L. N. Van Wassenhove // IIE Transactions. – 1985. – Vol. 17, N 4. – P. 308–313.

16. *Gelders, L. F.* A branch and bound algorithm for the multi item single level capacitated dynamic lotsizing problem / L. F. Gelders, J. Maes, L. N. Van Wassenhove // Multistage production planning and inventory control. Lecture notes in economics and mathematical systems / eds.: S. Axaster, Ch. Schneeweiss, E. Silver. – Berlin: Springer, 1986. – Vol. 266. – P. 92–108.

17. *Leung, J. M. Y.* Facets and algorithms for capacitated lot sizing / J. M. Y. Leung, T. L. Magnanti, R. Vachani // Mathematical Programming. – 1989. – Vol. 45. – P. 331–359.

18. *Belvaux, G.* Bc-prod: a specialised branch-and-cut system for lot-sizing problems / G. Belvaux, L. A. Wolsey // Management Science. – 2000. – Vol. 46, N 5. – P. 993–1007.

19. *Belvaux, G.* Modelling practical lot-sizing problems as mixed integer programs / G. Belvaux, L. A. Wolsey // Management Science. – 2001. – Vol. 47, N 7. – P. 724–738.

20. *Barany, I.* Strong formulations for multi-item capacitated lot sizing / I. Barany, T. J. Van Roy, L. A. Wolsey // Management Science. – 1984. – Vol. 30, N 10. – P. 1255–1261.

21. *Leung, J. M. Y.* Facets and algorithms for capacitated lot sizing / J. M. Y. Leung, T. L. Magnanti, R. Vachani // Mathematical Programming. – 1989. – Vol. 45. – P. 331–359.

22. *Eppen, G. D.* Solving multi-item capacitated lot sizing problems using variable redefinition / G. D. Eppen, R. K. Martin // Oper. Res. – 1987. – Vol. 35, N 6. – P. 832–848.

23. *Wagelmans, A*. Economic lotsizing: an O(n log n) algorithm that runs in linear time in the Wagner – Whitin case / A. Wagelmans, S.van Hoesel, A. Kolen // Oper. Res. – 1992. – Vol. 40. – P. 145–155.

24. *Aggarwal, A*. Improved algorithms for economic lot-size problem / A. Aggarwal, J. K. Park // Oper. Res. – 1993. – Vol. 41, N 3. – P. 549–571.

25. *Federgruen, A*. A simple forward algorithm to solve general dynamic lot sizing models with n periods in O(n log n) or O(n) time / A. Federgruen, M. A. Tzur // Management Science. – 1991. – Vol. 37, N 8. – P. 909–925.

26. *Левин, Г. М.* Линейная аппроксимация задачи оптимизации интенсивностей последовательно-параллельного выполнения пересекающихся множеств операций / Г. М. Левин, Б. М. Розин, А. Б. Долгий // Информатика. – 2014. – № 3. – С. 44–51.

Поступила в редакцию 17.05.2016