ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 4 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.1

П. А. ИРЖАВСКИЙ

ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫХ ГРАФОВ: СЛОЖНОСТНЫЕ АСПЕКТЫ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 14.11.2014)

Введение. Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется *гамильтонов цикл*, т. е. простой цикл, содержащий все вершины этого графа. К проблеме гамильтоновости графов, а также к ее взвешенному аналогу – задаче о коммивояжере – проявляется устойчивый интерес в течение многих лет, а исследование этих задач представляет собой одно из магистральных направлений теории графов и комбинаторной оптимизации. *Задача о гамильтоновом цикле* заключается в ответе на вопрос, является ли граф гамильтоновым. Эта задача NP-полна в общем случае [1] и остается NP-полной во многих узких классах графов. С другой стороны, известен ряд достаточных условий, когда задача разрешима за полиномиальное время. Исследование «областей эффективности» задачи о гамильтоновом цикле – классов графов, для которых она может быть решена за полиномиальное время, – имеет не только теоретический, но и практический интерес. Целью настоящей работы является установление вычислительной сложности задачи о гамильтоновом цикле в ряде классов графов с предписанными локальными ограничениями.

Далее под *графом* понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [2]. Пусть G – граф с множеством вершин $V(G)$. Число $|V(G)|$ вершин графа G называется *порядком* графа G и обозначается через $|G|$. *Степень* вершины – число смежных с ней вершин. Наибольшая и наименьшая среди степеней вершин графа G обозначаются через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно.

Как обычно, через K_n, $K_{n,\,m}$ и $K_{n,\,m,\,\ell}$ обозначаются полный граф порядка n, полный двудольный граф с долями размера n и m и полный трехдольный граф с долями размера n, m и ℓ соответственно, через P_n – простая цепь порядка n, а через C_n – простой цикл порядка n. Также граф K_3 будем называть *треугольником*, всякий граф $K_{1,\,p}$ при $p \geq 3$ – *звездой*, а вершину звезды из доли размера 1 – *центром* этой звезды. Подграф графа G, порожденный множеством $X \subseteq V(G)$ вершин, обозначается через $G(X)$.

Простой цикл C графа G называется *расширяемым* [3], если в графе G существует простой цикл C^+, для которого $V(C) \subset V(C^+)$ и $|V(C^+)| = |V(C)| + 1$. Граф G называется *вполне циклически расширяемым* [3], если каждый простой негамильтонов цикл в G расширяемый и каждая вершина графа G принадлежит треугольнику. Легко видеть, что всякий вполне циклически расширяемый граф является гамильтоновым, но обратное, вообще говоря, неверно.

Окружением вершины v в графе G называется множество $N(v)$ всех вершин, смежных с v в графе G. Множество $N_2(v)$ всех ребер, каждое из которых инцидентно хотя бы одной вершине из $N(v)$, но не инцидентно v, называется N_2-*окружением* вершины v в графе G. Вершина v графа G называется *локально связной*, если подграф, порожденный ее окружением, связен. Вершина v графа G называется N_2-*локально связной*, если подграф, образованный ребрами из $N_2(v)$ и инцидентными им вершинами, является связным. Граф G называется *локально связным* [4] (N_2-*локально связным* [5]), если каждая его вершина локально связна (N_2-локально связна). Несложно заметить, что локально связный граф является N_2-локально связным, но обратное, вообще говоря, неверно.

Граф, не содержащий порожденного подграфа, изоморфного звезде $K_{1,\,p}$, называется *$K_{1,\,p}$-свободным*. При $p \geq 3$ граф G называется *$K_{1,\,p}$-ограниченным* [6], если для любого (не порожденного) подграфа H графа G, изоморфного $K_{1,\,p}$, граф G содержит не менее $p+p-2$ ребер, оба конца которых принадлежат $V(H)$. Граф G называется *почти $K_{1,\,3}$-свободным* [7], если в нем центры порожденных звезд $K_{1,\,3}$ попарно не смежны, т. е. образуют независимое множество, и для каждого такого центра v верно $\gamma(G(N(v))) \leq 2$, где $\gamma(H)$ – число доминирования графа H. Заметим, что всякий $K_{1,\,3}$-свободный граф является почти $K_{1,\,3}$-свободным, но обратное, вообще говоря, неверно.

1. Локально связные графы с ограниченными степенями вершин. Сначала рассмотрим задачу о гамильтоновом цикле для графов с ограниченными степенями вершин.

Т е о р е м а 1 [8]. *Задача о гамильтоновом цикле* NP-*полна в классе планарных кубических 3-связных графов.*

Легко видеть, что граф G с $\Delta(G) \leq 2$ гамильтонов тогда и только тогда, когда G изоморфен $C_{|G|}$. Значит, с учетом теоремы 1 получаем, что задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе графов со степенями вершин, не превосходящими 3, и разрешима за полиномиальное время в классе графов со степенями вершин, строго меньшими 3. Исследуем аналогичный вопрос для локально связных графов. Обозначим через Δ^* число, при котором задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе локально связных графов со степенями вершин, не превосходящими Δ^*, и разрешима за полиномиальное время в классе локально связных графов со степенями вершин, строго меньшими Δ^* (см. также [9]). Отметим, что число Δ^* корректно определено в предположении, что $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$. Дальнейшее изложение также опирается на это допущение.

Г и п о т е з а 1 [9]. $\Delta^* = 7$.

Авторами [9] также установлена верхняя граница для числа Δ^*.

Т е о р е м а 2 [9]. *Задача о гамильтоновом цикле* NP-*полна в классе локально связных графов со степенями вершин, не превосходящими* 7.

Проследим, как улучшалась с течением времени нижняя граница для числа Δ^*. Сначала сделаем следующее простое наблюдение.

Н а б л ю д е н и е 1. *Пусть G – связный локально связный граф порядка не меньше* 3 *с* $\Delta(G) \leq 3$. *Тогда G изоморфен K_3, K_4 или $K_{1,\,1,\,2}$ и, следовательно, G гамильтонов.*

Значит, $\Delta^* \geq 4$. Следующая теорема усиливает эту оценку до 5.

Т е о р е м а 3 [4]. *Пусть G – связный локально связный граф порядка не меньше* 3 *с* $\Delta(G) \leq 4$. *Тогда либо G гамильтонов, либо G изоморфен $K_{1,\,1,\,3}$.*

В ходе дальнейших исследований появилось ограничение на $\delta(G)$.

Т е о р е м а 4 [3]. *Пусть G – связный локально связный граф порядка не меньше* 3 *с* $\Delta(G) \leq 5$ *и* $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$. *Тогда G – вполне циклически расширяемый граф.*

Следующий результат позволяет ослабить ограничение на $\delta(G)$ для графа G с $\Delta(G) = 5$.

Т е о р е м а 5 [9]. *Пусть G – связный локально связный граф с* $\Delta(G) = 5$ *и* $\delta(G) \geq 3$. *Тогда G – вполне циклически расширяемый граф.*

Тем не менее полностью отказаться от ограничения снизу на степени вершин графа невозможно, поскольку в таком классе графов задача о гамильтоновом цикле, как показывает основной результат настоящей работы, становится NP-полной.

Т е о р е м а 6. *Задача о гамильтоновом цикле* NP-*полна в классе планарных локально связных графов со степенями вершин, не превосходящими* 5.

Таким образом, $\Delta^* = 5$, что опровергает гипотезу 1. Доказательство теоремы 6 приводится в разделе 3. Следующий наш результат позволяет дать исчерпывающий ответ на вопрос о вычислительной сложности задачи о гамильтоновом цикле для произвольного локально связного графа G с заданными $\delta(G)$ и $\Delta(G)$.

Т е о р е м а 7. *Для любых целых чисел $D \geq 6$ и $2 \leq d \leq D$ задача о гамильтоновом цикле* NP-*полна в классе локально связных графов, для каждого из которых минимальная степень вершин равна d, а максимальная – равна D.*

Заметим, что теорема 7 усиливает результат [10] о том, что при каждом фиксированном $k \geq 6$ задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе k-регулярных графов.

2. Графы с дополнительными локальными ограничениями. В [11] получено следующее достаточное условие полной циклической расширяемости графа.

Т е о р е м а 8 [11]. *Пусть* G *– связный локально связный* $K_{1,4}$*-ограниченный граф порядка не меньше* 3. *Тогда либо* G *– вполне циклически расширяемый граф, либо* G *изоморфен одному из пяти негамильтоновых графов.*

С одной стороны, эта теорема обобщает ряд полученных ранее результатов (см. [11]), в частности, классическую теорему о гамильтоновости связного локально связного $K_{1,3}$-свободного графа порядка не меньше 3 [12]. С другой стороны, можно показать, что ее условия являются «хрупкими», т. е. рассматриваемый в этой теореме класс графов не может быть естественным образом расширен без потери свойства полиномиальной разрешимости задачи о гамильтоновом цикле.

Н а б л ю д е н и е 2. *При любом* $p \geq 3$ *всякий* $K_{1,p}$*-ограниченный граф является* $K_{1,p+1}$*-ограниченным и* $K_{1,p}$*-свободным. При* $p = 3$ *верно и обратное:* $K_{1,3}$*-свободный граф является* $K_{1,3}$*-ограниченным.*

Естественным обобщением теоремы 8 представляется расширение класса локально связных $K_{1,4}$-ограниченных графов до локально связных $K_{1,5}$-ограниченных и/или $K_{1,4}$-свободных графов. С другой стороны, можно заметить следующее:

Н а б л ю д е н и е 3. *Пусть* G *– связный локально связный граф с* $\Delta(G) \leq 5$. *Тогда* G *–* $K_{1,5}$*-ограниченный граф и либо* G *–* $K_{1,4}$*-свободный граф, либо* G *изоморфен* $K_{1,1,4}$.

Таким образом, из теоремы 6 заключаем:

С л е д с т в и е. *Задача о гамильтоновом цикле* NP*-полна в классе локально связных* $K_{1,4}$*-свободных* $K_{1,5}$*-ограниченных графов.*

Значит, описанное выше расширение класса локально связных $K_{1,4}$-ограниченных графов невозможно без потери свойства полиномиальной разрешимости задачи о гамильтоновом цикле. Следующий наш результат с учетом наблюдения 2 демонстрирует невозможность ослабления другого условия теоремы 8, локальной связности, до N_2-локальной связности.

Т е о р е м а 9. *Задача о гамильтоновом цикле* NP*-полна в классе* N_2*-локально связных* $K_{1,3}$*-свободных графов.*

В заключение этого раздела рассмотрим еще одно достаточное условие полной циклической расширяемости графа.

Т е о р е м а 10 [7]. *Пусть* G *– связный локально связный* $K_{1,4}$*-свободный, почти* $K_{1,3}$*-свободный граф порядка не меньше* 3. *Тогда* G *– вполне циклически расширяемый граф.*

Согласно теореме 9, условие локальной связности также не может быть ослаблено до условия N_2-локальной связности. Следующая теорема показывает, что условие принадлежности графа к классу $K_{1,4}$-свободных графов не может быть опущено.

Т е о р е м а 11. *Задача о гамильтоновом цикле* NP*-полна в классе локально связных почти* $K_{1,3}$*-свободных графов.*

3. Доказательство теоремы 6. Легко видеть, что задача о гамильтоновом цикле в рассматриваемом классе графов принадлежит к классу NP. Докажем NP-полноту этой задачи в классе планарных локально связных графов, степени вершин которых не превосходят 5, сведением к ней задачи о гамильтоновом цикле для планарных кубических графов, которая, как известно [8], NP-полна. Далее через $\mathbb{Z}_m$ будем обозначать полную систему из наименьших неотрицательных вычетов по модулю m.

Покажем, как устроено преобразование φ плоского кубического графа G в плоский локально связный граф $H = \varphi(G)$ с $\Delta(H) = 5$. Для графа G порядка n введем функцию $f\colon V(G) \times \mathbb{Z}_3 \to V(G)$, позволяющую для вершины v графа G перечислить вершины $f(v,0)$, $f(v,1)$ и $f(v,2)$, смежные с v, в порядке обхода против часовой стрелки относительно вершины v. Теперь зададим сюръективную функцию $\psi\colon V(G) \times \mathbb{Z}_{12} \to V(H)$ следующим образом. Если для двух смежных вершин u и v графа G верно $f(u,b) = v$ и $f(v,a) = u$, то $\psi(v,4a+1) = \psi(u,4b+3)$, $\psi(v,4a+2) = \psi(u,4b+2)$ и $\psi(v,4a+3) = \psi(u,4b+1)$. Все прочие пары значений функции ψ являются различными. Таким образом, граф H содержит

$$12|V(G)| - 3|E(G)| = 3|V(G)| + 3|E(G)| = 15n/2$$

вершин. Множество ребер графа H определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} E(H) = \Big\{ \{ \psi(v,k), \psi(v,k+1) \} \quad & \forall v \in V(G), k \in \mathbb{Z}_{12} \Big\} \cup \\ \cup \Big\{ \{ \psi(v,4k), \psi(v,4k+4) \} \quad & \forall v \in V(G), k \in \mathbb{Z}_3 \Big\} \cup \\ \cup \Big\{ \{ \psi(v,4k), \psi(v,4k+3) \} \quad & \forall v \in V(G), k \in \mathbb{Z}_3 \Big\} \cup \\ \cup \Big\{ \{ \psi(v,4k+1), \psi(v,4k+3) \} \quad & \forall v \in V(G), k \in \mathbb{Z}_3 \Big\}. \end{aligned}$$

Другими словами, при преобразовании ψ каждая вершина и каждое ребро графа G заменяются на треугольники, соединенные, как показано на рис. 1 (числом k обозначена вершина $\psi(v,k)$ графа $\varphi(G)$). Таким образом, граф H плоский. Каждую вершину графа H можно отнести к одному из трех типов. Так, для вершины вида $\psi(v,4k+2)$ подграф, порожденный ее окружением, изоморфен P_2, для вершины вида $\psi(v,4k)$ – изоморфен P_5, а для вершины вида $\psi(v,2k+1)$ – изоморфен графу, который получается из звезды $K_{1,3}$ подразбиением одного из ее ребер. Отсюда следует локальная связность графа H, а также равенство $\Delta(H)=5$.

Легко видеть, что граф H можно построить по графу G за полиномиальное время. Покажем теперь, что граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда граф H гамильтонов.

Пусть в графе G существует гамильтонов цикл $C = v_1 v_2 \ldots v_n v_1$, для которого $f(v_i, \ell_i) = v_{i-1}$ и $f(v_i, r_i) = v_{i+1}$ для всех $1 \le i \le n$ (полагая $v_0 = v_n$ и $v_{n+1} = v_1$). Каждое ребро графа G, не входящее в цикл C, назначим одной из инцидентных ему вершин. Тогда, поскольку для каждой вершины два из трех инцидентных ей ребер входят в цикл C, каждой вершине будет назначено не более одного ребра. Гамильтонов цикл в графе H может быть получен следующим образом. Всякую вершину v_i, которой не назначено ребро, заменим на последовательность вершин

$$\psi(v_i, 4\ell_i + 2)\psi(v_i, 4\ell_i + 3)\psi(v_i, 4\ell_i)\psi(v_i, 12 - 4\ell_i - 4r_i)\psi(v_i, 4r_i)\psi(v_i, 4r_i + 3).$$

Каждую вершину v_i, которой назначено ребро и для которой $r_i = \ell_i - 1$, заменим на последовательность вершин

$$\begin{gathered} \psi(v_i, 4\ell_i + 2)\psi(v_i, 4\ell_i + 3)\psi(v_i, 4\ell_i)\psi(v_i, 4\ell_i + 4)\psi(v_i, 4\ell_i + 5) \\ \psi(v_i, 4\ell_i + 6)\psi(v_i, 4\ell_i + 7)\psi(v_i, 4\ell_i + 8)\psi(v_i, 4\ell_i + 11). \end{gathered}$$

Каждую вершину v_i, которой назначено ребро и для которой $r_i = \ell_i + 1$, заменим на последовательность вершин

$$\begin{gathered} \psi(v_i, 4\ell_i + 2)\psi(v_i, 4\ell_i + 3)\psi(v_i, 4\ell_i)\psi(v_i, 4\ell_i - 1)\psi(v_i, 4\ell_i - 2) \\ \psi(v_i, 4\ell_i - 3)\psi(v_i, 4\ell_i - 4)\psi(v_i, 4\ell_i + 4)\psi(v_i, 4\ell_i + 7). \end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что эти последовательности вершин задают попарно не пересекающиеся по вершинам простые цепи в графе H. Также заметим следующее: все эти последовательности заканчиваются на вершину вида $\psi(v_i, 4r_i + 3)$, при этом $\psi(v_i, 4r_i + 2) = \psi(v_{i+1}, 4\ell_{i+1} + 2)$ (где $\ell_{n+1} = \ell_1$),

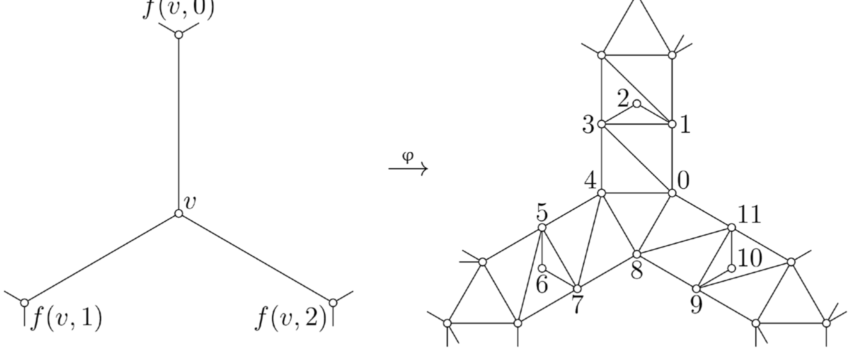

Рис. 1. Фрагмент преобразования φ

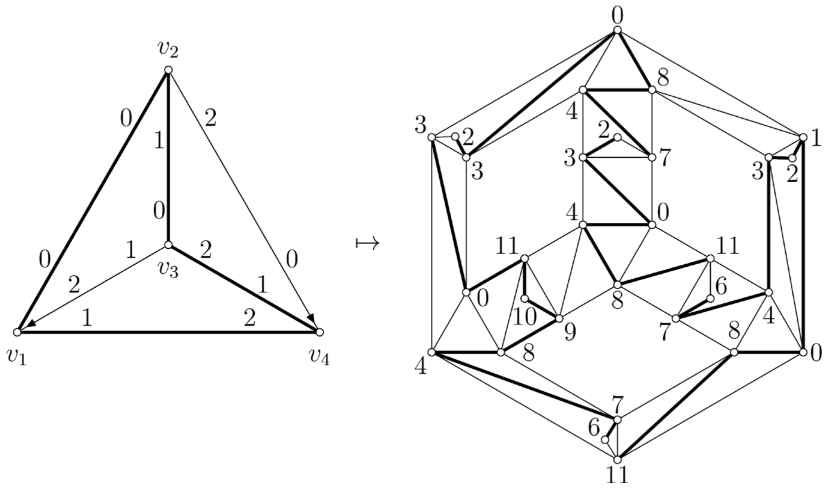

Рис. 2. Пример преобразования

поскольку $v_i = f(v_{i+1}, \ell_{i+1})$ и $v_{i+1} = f(v_i, r_i)$. Кроме того, $\{ \psi(v_i, 4r_i + 3), \psi(v_i, 4r_i + 2) \} \in E(H)$. Таким образом, в результате замены каждой вершины цикла C на соответствующую последовательность вершин графа H мы получим цикл в графе H. По построению этот цикл содержит все вершины графа H и является простым, а значит, он гамильтонов.

На рис. 2 изображена описанная выше замена вершин графа G (слева) на соответствующие последовательности вершин графа H (справа) на примере $G = K_4$. Жирными линиями выделены ребра гамильтонова цикла в графе G и ребра простых цепей в графе H, соответствующих последовательностям вершин графа H, на которые заменяются вершины графа G. С помощью стрелок показано, каким вершинам назначены ребра графа G, не вошедшие в гамильтонов цикл. В графе G число k, расположенное над ребром $\{ v, u \}$ ближе к вершине v, означает, что $f(v,k) = u$, а в графе H числом k обозначена вершина $\psi(v,k)$, входящая в последовательность, на которую заменяется вершина v графа G. Например, вершина $\psi(v_1, 1) = \psi(v_2, 3)$ графа H обозначена числом 3, поскольку она содержится только в последовательности вершин, на которую заменяется вершина v_2.

Пусть теперь в графе H существует гамильтонов цикл $C = u_1 u_2 \ldots u_{15n/2} u_1$. Поскольку вершины вида $\psi(v, 4k+2)$ и только они имеют степень 2, то при любых $v \in V(G)$ и $k \in \mathbb{Z}_3$ вершины $\psi(v, 4k+1)$ и $\psi(v, 4k+3)$ расположены в цикле C на позициях, соседних с вершиной $\psi(v, 4k+2)$. В связи с этим нетрудно убедиться, что если в циклической последовательности $u_1 u_2 \ldots u_{15n/2} u_1$ вершин оставить все вершины вида $\psi(v, 4k)$ и только их, то две вершины из тройки $\psi(v, 0)$, $\psi(v, 4)$ и $\psi(v, 8)$ будут расположены на позициях, соседних с третьей вершиной этой же тройки. Заменив теперь каждую такую тройку на соответствующую вершину v графа G, мы получим циклическую последовательность вершин, в которой любые две соседние смежны. Кроме того, эта последовательность содержит каждую вершину графа G ровно один раз, а значит, задает в графе G гамильтонов цикл.

Таким образом, NP-полная задача распознавания гамильтоновости графа в классе плоских кубических графов полиномиально сводится к задаче распознавания гамильтоновости графа в классе плоских локально связных графов со степенями вершин, не превосходящими 5, откуда следует NP-полнота последней. Теорема 6 доказана.

4. Схемы доказательств теорем 7, 9 и 11. На рис. 3 изображены фрагменты преобразований φ' и φ'', позволяющих аналогичным образом доказать теоремы 9 и 11. Более точно, в доказательстве определяются преобразования φ' и φ'' плоского кубического графа G в N_2-локально связный $K_{1,3}$-свободный граф $\varphi'(G)$ и локально связный почти $K_{1,3}$-свободный граф $\varphi''(G)$, требующие полиномиального времени и обладающие следующим свойством: граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда граф $\varphi'(G)$ гамильтонов, а также тогда и только тогда, когда граф $\varphi''(G)$ гамильтонов.

Теорема 7 в свою очередь доказывается небольшими модификациями преобразования φ из доказательства теоремы 6. Так, если в графе $H = \varphi(G) = \varphi_2^5(G)$ ровно одну вершину u степени 2 удалить и заменить двумя новыми вершинами, смежными друг другу, и вершинам, смежным u в H,

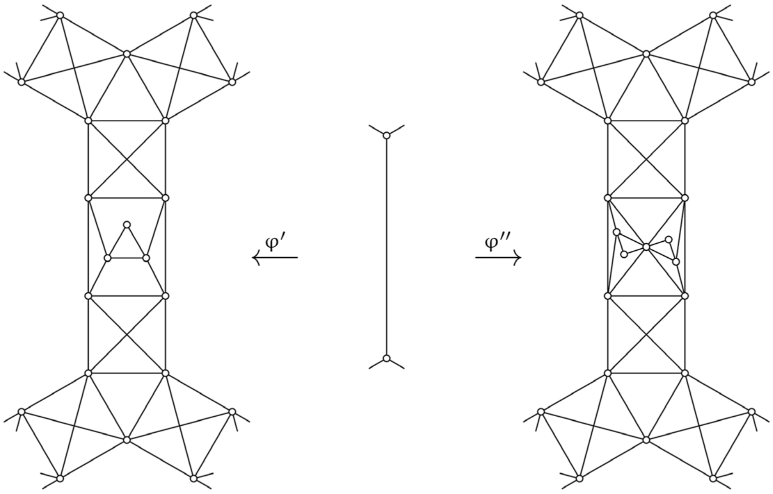

Рис. 3. Фрагменты преобразований φ′ и φ″

то новый граф H_2^6, как легко видеть, будет гамильтонов тогда и только тогда, когда граф H гамильтонов. При этом H_2^6 локально связен, $\Delta(H_2^6) = 6$ и $\delta(H_2^6) = 2$. Если же такую операцию произвести с каждой вершиной степени 2, получим локально связный граф H_3^6 с $\Delta(H_3^6) = 6$ и $\delta(H_3^6) = 3$, который также гамильтонов тогда и только тогда, когда граф H гамильтонов. Для дальнейшего повышения δ до 4 можно заменить каждую вершину степени 2 графа H не двумя вершинами, а кликой из пяти вершин, две из которых также смежны вершинам, смежным u в H. В результате будет получен локально связный граф H_4^6 с $\Delta(H_4^6) = 6$ и $\delta(H_4^6) = 4$, который гамильтонов тогда и только тогда, когда граф H гамильтонов. Чтобы поднять δ до 5, аналогично заменим вершину u степени 2 графа H кликой уже не из пяти вершин, а из семи, среди которых две вершины x и y также смежны вершинам, смежным u в H. Выберем теперь четыре вершины клики, отличные от x и y, разобьем их на две пары и удалим ребра, соединяющие вершины первой пары с вершиной x, а также ребра, соединяющие вершины второй пары с вершиной y. Несложно убедиться, что, проделав такую опе-

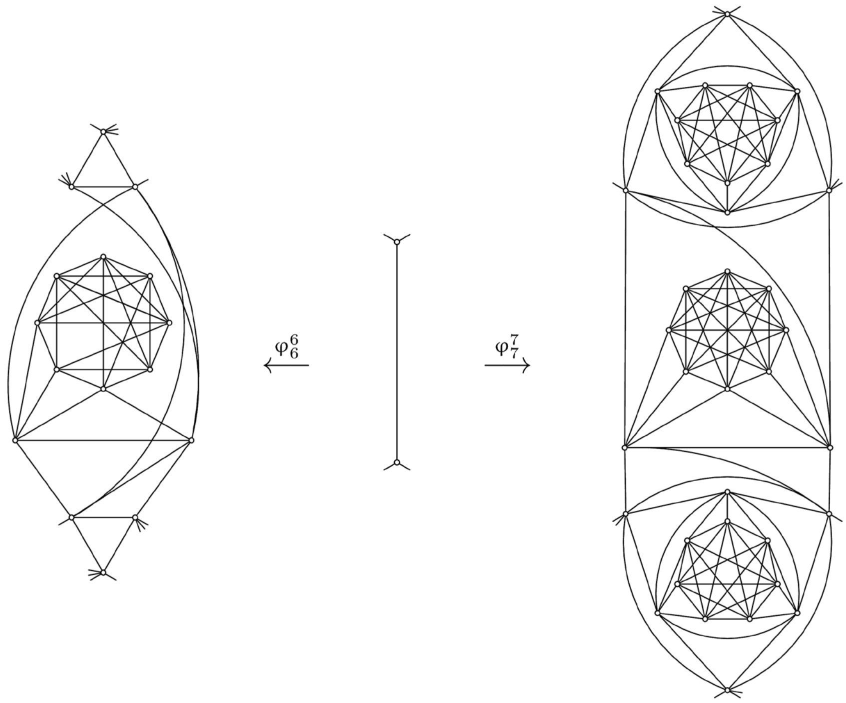

Рис. 4. Фрагменты преобразований φ_6^6 и φ_7^7

рацию с каждой вершиной степени 2 графа H, получим локально связный граф H_5^6 с $\Delta(H_5^6)=6$ и $\delta(H_5^6)=5$, который гамильтонов тогда и только тогда, когда граф H гамильтонов.

Случай r-регулярных локально связных графов ($r \ge 6$) заслуживает отдельного внимания. На рис. 4 приведены фрагменты преобразований φ_6^6 и φ_7^7, позволяющих доказать NP-полноту задачи о гамильтоновом цикле в классе локально связных 6-регулярных графов и в классе локально связных 7-регулярных графов соответственно. Увеличение r на 2 осуществляется так же, как переход от случая $(D,d)=(5,2)$ к случаю $(D,d)=(7,7)$. При $D \ge 7$ и $2 \le d < D$ доказательство NP-полноты задачи о гамильтоновом цикле в классе локально связных графов со степенями вершин от d до D включительно получается из доказательства NP-полноты этой же задачи в классе $(D-1)$-регулярных локально связных графов и абсолютно аналогично переходу от случая $(D,d)=(5,2)$ к одному из случаев $(D,d)=(6,2)$, $(D,d)=(6,3)$, $(D,d)=(6,4)$ или $(D,d)=(6,5)$.

Отметим, что в теореме 7, в отличие от теоремы 6, не оговаривается условие планарности графа. Для этого есть вполне объективные причины: не существует планарного графа G с $\delta(G) \ge 6$. Тем не менее легко видеть, что при доказательстве теоремы 7 для случаев $(D,d)=(6,2)$ и $(D,d)=(6,3)$ в результате соответствующих преобразований получаются планарные графы. Также можно показать, что для любых целых чисел $D \ge 6$ и $2 \le d \le 5$ задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе планарных локально связных графов, для каждого из которых минимальная степень вершин равна d, а максимальная – равна D.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13К-078).

Литература

1. *Karp R. M.* // Proc. of a Symp. on the Complexity of Computer Computations. New York, 1972. P. 85–103.
2. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М., 1990.
3. *Hendry G. R. T.* // J. Graph Theory. 1989. Vol. 13. P. 257–260.
4. *Chartrand G., Pippert R.* // Čas. Pěst. Mat. 1974. Vol. 99. P. 158–163.
5. *Ryjáček Z.* // J. Graph Theory. 1990. Vol. 14. P. 321–331.
6. *Wang J., Teng Y.* // Adv. Math. 2006. Vol. 35. P. 657–662 (in Chinese).
7. *Ryjáček Z.* // J. Graph Theory. 1994. Vol. 18. P. 469–477.
8. *Garey M. R., Johnson D. S., Tarjan R. E.* // SIAM J. Comput. 1976. Vol. 5. P. 704–714.
9. *Gordon V. S., Orlovich Yu. L., Potts C. N., Strusevich V. A.* // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159. P. 1759–1774.
10. *Picouleau C.* // Theor. Comput. Sci. 1994. Vol. 131. P. 463–473.
11. *Иржавский П. А., Орлович Ю. Л.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 36–50.
12. *Oberly D. J., Sumner D. P.* // J. Graph Theory. 1979. Vol. 3. P. 351–356.

P. A. IRZHAVSKI

HAMILTONICITY OF LOCALLY CONNECTED GRAPHS: COMPLEXITY RESULTS

Summary

In this article we consider the complexity of recognizing Hamiltonian graphs with a prescribed local structure: locally connected graphs with a bounded vertex degree, N_2-locally connected $K_{1,3}$-free graphs and locally connected almost $K_{1,3}$-free graphs. We establish the NP-completeness of the problem for each class of graphs under consideration. In particular, the conjecture stated in 2011 on polynomial solvability of the Hamiltonian cycle problem for locally connected graphs of maximum degree at most 6 was disproved. Also, for several known sufficient conditions of Hamiltonicity, it is shown that these conditions cannot be naturally weakened without loss of the polynomial solvability of the Hamiltonian cycle problem.