

УДК 519.2

Ю. С. ХАРИН, М. К. ЖУРАК

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ
ПАРАМЕТРОВ БИНОМИАЛЬНОЙ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ**

*НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета,
Минск, Беларусь,
e-mail: kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com*

Исследованы асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных. Доказана асимптотическая нормальность и найдена асимптотическая ковариационная матрица построенных оценок. Представлены результаты компьютерных экспериментов.

Ключевые слова: пространственно-временные данные, цепь Маркова, оценки максимального правдоподобия, информационная матрица Фишера, ковариационная матрица.

Yu. S. KHARIN, M. K. ZHURAK

**ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATORS OF THE PARAMETERS
FOR A BINOMIAL CONDITIONALLY AUTOREGRESSIVE MODEL OF SPATIO-TEMPORAL DATA**

*Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus,
e-mail: kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com*

Asymptotic properties of the maximum likelihood estimators of parameters for a binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data are studied. The asymptotic normality is proved and the asymptotic covariance matrix is found for the estimators. The results of computer experiments are presented.

Keywords: spatio-temporal data, Markov chains, maximum likelihood estimators, Fisher information matrix, covariance matrix.

Введение. Моделирование и анализ пространственно-временных данных является актуальной научной задачей. В работе [1] байесовская пространственно-временная модель применялась для анализа случаев заболевания раком; в [2] байесовская пространственно-временная геостатистическая модель использовалась для решения задач при большом объеме данных. В [3] решается задача предсказания скорости ветра на основе пространственно-временных данных; в [4] изучена пуассоновская авторегрессионная модель, которая была применена для анализа финансовых данных фондовых операций.

При вероятностно-статистическом моделировании и анализе пространственно-временных данных возникают трудности двух типов. Во-первых, это необходимость совместного учета временных и пространственных зависимостей регистрируемых наблюдений, которая приводит к сложным моделям, содержащим много априорно неизвестных параметров. Во-вторых, это вычислительные проблемы, вызванные необходимостью обработки больших массивов пространственно-временных данных для достижения приемлемых уровней точности статистических оценок параметров, решений и прогнозов. В связи с этим в настоящее время большинство опубликованных работ имеет эмпирический характер: временные и пространственные зависимости рассматриваются по отдельности либо для этой цели приспособляются некоторые «близкие» модели без теоретического их обоснования.

© Харин Ю. С., Журак М. К., 2016

В статье [5] разработана биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и предложен алгоритм вычисления оценок максимального правдоподобия (ОМП), однако теоретический анализ свойств построенных ОМП не проводился. В данной работе продолжают начатые в [5] исследования: решается задача асимптотического анализа свойств построенных ОМП.

1. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных. Определим биномиальную условно авторегрессионную модель пространственно-временных данных, следуя [5]. Введем обозначения: (Ω, F, P) – вероятностное пространство; N – множество натуральных чисел; Z – множество целых чисел; $I\{H\}$ – индикаторная функция события H ; $s \in S = \{1, 2, \dots, n\}$ – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (условимся далее называть их сайтами), на которые разбита изучаемая пространственная область; n – число сайтов; $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ – дискретное время; $x_{s,t} \in \{0, 1, \dots, N\} = A$ – дискретная случайная величина наблюдения в момент времени t в сайте s ; $F_{<t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau \leq t-1\} \subset F$ – σ -алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $z_{j,t} \geq 0, j = 1, \dots, m$ – наблюдаемый (известный) набор значений m внешних факторов в момент времени t ; $L(\xi)$ – закон распределения вероятностей случайной величины ξ ; $\mathbf{E}\{\cdot\}$, $\mathbf{D}\{\cdot\}$, $\mathbf{cov}\{\cdot, \cdot\}$ – символы математического ожидания, дисперсии, ковариации случайных величин соответственно; $\mathbf{Bi}(\cdot; N, p)$ – биномиальный закон распределения вероятностей с параметрами $N \in \mathbf{N}, 0 \leq p \leq 1$ для случайной величины ξ :

$$\mathbf{P}\{\xi = l\} = \mathbf{Bi}(l; N, p) ::= C_N^l p^l (1-p)^{N-l}, \quad l \in A, \quad L\{\xi\} = \mathbf{Bi}(\cdot; N, p), \quad (1)$$

где $C_N^l = (N! / (N-l)! l!)$.

Предполагается, что при фиксированной предыстории $F_{<t} = \{x_{s,\tau} : s \in S, \tau \leq t-1\}$ случайные величины $x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}$ условно независимы, причем

$$L\{x_{s,t} | F_{<t}\} = \mathbf{Bi}(\cdot; N, p_{s,t}), \quad (2)$$

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \sum_{i=1}^n a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^m b_{s,j} z_{j,t}, \quad s \in S, t \in Z, \quad (3)$$

где $a_s = (a_{s,1}, a_{s,2}, \dots, a_{s,n})' \in R^n$, $b_s = (b_{s,1}, \dots, b_{s,m})' \in R^m$, $\theta_s = (a_s', b_s')' \in R^{n+m}$, $s \in S$, $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_n')' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор-столбец параметров модели, штрих обозначает транспонирование.

Справедливы следующие полезные выражения для вычисления вероятности $p_{s,t}$, вытекающие из (3):

$$p_{s,t} = p_s(X_{t-1}, Z_t) ::= \frac{\exp(a_s' X_{t-1} + b_s' Z_t)}{1 + \exp(a_s' X_{t-1} + b_s' Z_t)} = \frac{\exp(\theta_s' Y_t)}{1 + \exp(\theta_s' Y_t)}, \quad s \in S, t \in Z, \quad (4)$$

$$1 - p_{s,t} = \left(1 + \exp(\theta_s' Y_t)\right)^{-1}, \quad \frac{p_{s,t}}{1 - p_{s,t}} = \exp(\theta_s' Y_t),$$

где $Z_t = (z_{1,t}, z_{2,t}, \dots, z_{m,t})' \in R^m$ – вектор-столбец, задающий значения m внешних факторов в момент времени t ; $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t})' \in A^n$ – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления по всем n сайтам в момент времени $t \in Z$; $Y_t = (X_{t-1}', Z_t')' \in R^{n+m}$ – составной вектор-столбец «предопределенных» переменных.

Обозначим $L = \left\{l_j = (l_{1,j}, \dots, l_{n,j})' \in A^n : j = 1, 2, \dots, (N+1)^n\right\}$ – лексикографически упорядоченное множество $v = (N+1)^n$ всевозможных значений, которые принимает вектор X_t : $|L| = v$.

2. Вероятностные свойства биномиальной условно авторегрессионной модели. Установим ряд свойств биномиальной условно авторегрессионной модели, которые понадобятся при асимптотическом анализе свойств ОМП параметров этой модели.

Теорема 1 [5]. Если имеет место модель (2), (3), то наблюдаемый векторный временной ряд X_t является конечной неоднородной n -мерной векторной цепью Маркова с конечным пространством состояний L , матрицей вероятностей одношаговых переходов $Q = Q(\theta, t) = (q_{I,J}(\theta, t)) \in [0, 1]^{v \times v}$, $I = (I_s), J = (J_s) \in L$:

$$q_{I,J} = q_{I,J}(\theta, t) ::= \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \left(\exp(a_s' I + b_s' Z_{t-1}) \right)^{J_s} \left(1 + \exp(a_s' I + b_s' Z_{t-1}) \right)^{-N}, \quad t \in \mathbf{Z}. \quad (5)$$

Отметим, что в условиях теоремы 1, если вектор внешних факторов $Z_t = Z = (z_1, \dots, z_m)' \in R^m$ не зависит от t , то матрица вероятностей одношаговых переходов (5) не зависит от t и цепь Маркова является однородной [6]:

$$Q(\theta) = (q_{I,J}(\theta)) \in [0, 1]^{v \times v},$$

$$q_{I,J}(\theta) = \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \left(\exp\{a_s' I + b_s' Z\} \right)^{J_s} \left(1 + \exp\{a_s' I + b_s' Z\} \right)^{-N}, \quad I, J \in L. \quad (6)$$

Как доказано в [5], если имеет место модель (2), (3) и $Z_t = Z = (z_1, \dots, z_m)' \in R^m$ не зависит от t , то для n -мерной конечной векторной цепи Маркова X_t выполняется условие эргодичности и существует единственное стационарное распределение вероятностей $\pi = (\pi_I) \in [0, 1]^v$, являющееся решением системы уравнений:

$$Q' \pi = \pi, \quad \sum_{I \in L} \pi_I = 1. \quad (7)$$

Лемма 1. При фиксированной предыстории X_{t-1} вектор-столбец условного математического ожидания равен

$$\mathbf{E}\{X_t | X_{t-1}\} = (N p_i(X_{t-1}, Z_t)) \in R^n,$$

а условная ковариационная матрица принимает диагональный вид:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t | X_{t-1}\} = \text{diag}\{N p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))\} \in R^{n \times n}.$$

Доказательство. В силу модели (2), (3) и свойств биномиального распределения условное математическое ожидание случайной величины $x_{i,t}$ при условии X_{t-1} имеет вид

$$\mathbf{E}\{x_{i,t} | X_{t-1}\} = N p_i(X_{t-1}, Z_t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Найдем представление условной ковариационной матрицы $\mathbf{cov}\{X_t, X_t | X_{t-1}\} = (c_{i,j}) \in R^{n \times n}$, где $c_{i,j} = \mathbf{cov}\{x_{i,t}, x_{j,t} | X_{t-1}\} = \mathbf{E}\{(x_{i,t} - \mathbf{E}\{x_{i,t} | X_{t-1}\})(x_{j,t} - \mathbf{E}\{x_{j,t} | X_{t-1}\}) | X_{t-1}\}$. Для этого рассмотрим два случая. Если $i = j$, то дисперсия $c_{i,i} = \mathbf{D}\{x_{i,t} | X_{t-1}\} = N p_{i,t}(1 - p_{i,t})$.

Так как в условиях модели (2), (3) при фиксированной предыстории X_{t-1} случайные величины $x_{i,t}, x_{j,t}$, $i \neq j$, условно независимы, то согласно [7] ковариация $c_{i,j} = 0$.

Таким образом, матрица $\mathbf{cov}\{X_t, X_t | X_{t-1}\}$ является диагональной с диагональными элементами $N p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))$.

Лемма 2. Если имеет место модель (2), (3), то случайный процесс X_t является невырожденным при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$, т. е. в биномиальном распределении (2)

$$0 < p_{s,t} < 1 \text{ для всех } s \in S, t \in \mathbf{Z}.$$

Доказательство. Из (4) имеем:

$$p_{s,t} = \frac{\exp(\theta_s' Y_t)}{1 + \exp(\theta_s' Y_t)} = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_s' Y_t)}, Y_t = (X_{t-1}', Z_t')' \in R^{n+m}, t \in \mathbf{Z}.$$

Так как $x_{s,t} \in \{0, 1, \dots, N\}$, то при ограниченных значениях $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$ величина $|\theta_s' Y_t| < \infty$, следовательно, $0 < p_{s,t} < 1$ для всех $s \in S$.

Лемма 3. Если имеет место модель (2), (3), то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$ ковариационная матрица $\mathbf{cov}\{X_t, X_t\}$ является положительно определенной и принимает следующий вид:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = N \operatorname{diag}\{p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))\} + D \in R^{n \times n},$$

$$D = (d_{ij}), d_{ij} = N^2 \mathbf{cov}\left\{\left(1 + \exp(-\theta_i Y_t)\right)^{-1}, \left(1 + \exp(-\theta_j Y_t)\right)^{-1}\right\}, i, j = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Вычислим ковариационную матрицу, используя формулу полного математического ожидания:

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}\{X_t, X_t\} &= \mathbf{E}\left\{(X_t - \mathbf{E}\{X_t\})(X_t - \mathbf{E}\{X_t\})'\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{(X_t - \mathbf{E}\{X_t\})(X_t - \mathbf{E}\{X_t\})' \mid X_{t-1}\right\}\right\} \equiv \\ &\equiv \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\} - (\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\})\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\} - (\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\})\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} - \\ &- \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} - \\ &- \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} + \\ &+ \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{cov}\{X_t, X_t \mid X_{t-1}\}\right\} - \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right) \mid X_{t-1}\right\}\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)'\right\} - \\ &- \mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} + \\ &+ \mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)'\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{cov}\{X_t, X_t \mid X_{t-1}\}\right\} + D, \end{aligned}$$

где $D = \mathbf{cov}\left\{\mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}, \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right\}$. Пользуясь леммой 1 и формулой (4), получим:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = N \operatorname{diag}\left\{\mathbf{E}\left\{p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))\right\}\right\} + D, \quad (8)$$

где $D = (d_{ij}), d_{ij} = N^2 \mathbf{cov}\left\{\left(1 + \exp(-\theta_i Y_t)\right)^{-1}, \left(1 + \exp(-\theta_j Y_t)\right)^{-1}\right\}, i, j = 1, \dots, n$.

При любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$, в силу леммы 2, диагональная матрица $N \operatorname{diag}\left\{\mathbf{E}\left\{p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))\right\}\right\}$ является положительно определенной. В силу того, что D – ковариационная матрица, она неотрицательно определена [7]. Тогда из (8) и того факта [8], что сумма положительно определенной и неотрицательно определенной матриц

есть матрица положительно определенная, следует, что матрица $\text{cov}\{X_t, X_t\}$ положительно определена.

3. Оценки максимального правдоподобия параметров модели и их асимптотические свойства. Примем обозначения: $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_n')' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор $n(n+m)$ параметров, подлежащих оцениванию; \mathbf{O}_m – m -нулевой вектор-столбец.

В рамках модели (2), (3) логарифмическая функция правдоподобия для T наблюдений $\{X_t : t = 1, 2, \dots, T\}$ имеет аддитивный по $\theta_1, \dots, \theta_n$ вид [5]:

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^n l_s(\theta_s), l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^T \left(x_{s,t} \theta_s' Y_t - N \ln \left(1 + \exp(\theta_s' Y_t) \right) \right) + \ln C_N^{x_{s,t}}.$$

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta} \in R^{n(n+m)}$ определяется как решение следующей экстремальной задачи [5]:

$$l(\theta) \rightarrow \max_{\theta}. \quad (9)$$

Лемма 4. Пусть $\xi \in R^k$ – некоторый случайный вектор, $C(\xi) \in R^N$ – некоторый случайный вектор-столбец, а $\alpha(\xi) > 0$ – положительная случайная величина, зависящие от ξ . Тогда, если матрица $\mathbf{E}\{C(\xi)C'(\xi)\}$ положительно определена, то таким же свойством обладает матрица $\mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}$.

Доказательство. Пусть $z \in R^N$ – произвольный неслучайный ненулевой вектор. Проверим выполнение условия $z' \mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}z > 0$, характеризующего положительную определенность матрицы:

$$z' \mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}z = \mathbf{E}\{\alpha(\xi)z' C(\xi)C'(\xi)z\}.$$

Поскольку в условиях леммы матрица $\mathbf{E}\{C(\xi)C'(\xi)\} > 0$ является положительно определенной, то для произвольного ненулевого вектора выполняется $\mathbf{E}\{z' C(\xi)C'(\xi)z\} > 0$. Так как $\alpha(\xi) > 0$, то в силу свойств математического ожидания $\mathbf{E}\{\alpha(\xi)z' C(\xi)C'(\xi)z\} > 0$. Таким образом, выполняется критерий положительной определенности для интересующей нас матрицы $\mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}$.

Теорема 2. Если имеет место модель (2), (3), $m = 1$, $z_{1t} = z \neq 0$ не зависит от t и цепь Маркова $X_t \in L$ является стационарной, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in R^1$ информационная матрица Фишера является невырожденной и имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$G = N \text{diag} \left\{ \mathbf{E} \left\{ Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z) (1 - p_i(X_{t-1}, z)) \right\}, Y_t = (X_{t-1}', z)', i = 1, \dots, n. \right\} \quad (10)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что, как указано в п. 3 после теоремы 1, при $z_{1,t} = \text{const}$ цепь Маркова X_t эргодична. Условие стационарности означает, что распределение вероятностей X_t не зависит от t и совпадает со стационарным π , определенным в (7). Вычислим теперь матрицу $G = (g_{k,l}) \in R^{n(n+1) \times n(n+1)}$, введенную в [9], покажем ее связь с информационной матрицей Фишера и проверим ее невырожденность, следуя [9]:

$$g_{k,l} = \sum_{I,J} \left(\frac{\pi_I(\theta^0)}{q_{I,J}(\theta^0)} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right), \quad k, l = 1, 2, \dots, n(n+1), \quad (11)$$

где $q_{I,J} = q_{I,J}(V)$ определяется (6), $V = (v_k) = (\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,n+1}, \theta_{2,1}, \dots, \theta_{n,n+1}) \in R^{n(n+1)}$.

Поскольку справедливо тождество

$$\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_k} \equiv q_{I,J} \frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_k},$$

представим (11) в эквивалентном виде:

$$g_{k,l} = \sum_{I,J} \left(\frac{\pi_I(\theta^0)}{q_{I,J}(\theta^0)} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right) = \sum_{I,J} \left(\frac{\pi_I(\theta^0)}{q_{I,J}(\theta^0)} \left(q_{I,J} \frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(q_{I,J} \frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right) = \sum_{I,J} \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) \left(\frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right). \quad (12)$$

Из (12) и [7] видно, что матрица G представляет собой усредненную условную информационную матрицу Фишера $J_{kl}(X_{t-1})$ для условного распределения вероятностей X_t при условии X_{t-1} :

$$g_{kl} = \mathbf{E}\{J_{kl}(X_{t-1})\}, J_{kl}(X_{t-1}) = \mathbf{E}\left\{ \left(\frac{\partial \ln q_{X_{t-1}, X_t}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial \ln q_{X_{t-1}, X_t}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \middle| X_{t-1} \right\} \equiv \mathbf{E}\left\{ -\frac{\partial^2 \ln q_{X_{t-1}, X_t}}{\partial v_k \partial v_l} \middle| X_{t-1} \right\}.$$

Матрицу $G = (g_{k,l}) \in R^{n(n+1) \times n(n+1)}$ разобьем на $n \times n$ блочных $(n+1) \times (n+1)$ матриц:

$$H_{i,j} = \sum_{I,J} \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) (\nabla_{\theta_i} \ln q_{I,J})_{\theta^0} (\nabla_{\theta_j} \ln q_{I,J})_{\theta^0}' \right) \in R^{(n+1) \times (n+1)}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (13)$$

Используя (6), имеем ($i = 1, \dots, n$; $I = (I_s)$, $J = (J_s) \in L$):

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_i} \ln q_{I,J} &= \nabla_{\theta_i} \ln \left(\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) (1 + \exp(\theta_s' Y))^{-N} \right) = \\ &= \nabla_{\theta_i} \left(\sum_{s=1}^n \ln C_N^{J_s} + J_s \theta_s' Y - N \ln(1 + \exp(\theta_s' Y)) \right) = J_i Y - N \frac{\exp(\theta_i' Y)}{1 + \exp(\theta_i' Y)} Y = (J_i - N p_i(Y)) Y, \quad Y = (I', z)'. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_{i,j} &= \sum_{I,J} \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) (J_i Y - N p_i(Y)) (J_j Y - N p_j(Y))' \right) = \\ &= \sum_{I,J} Y Y' \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) (J_i - N p_i(Y)) (J_j - N p_j(Y)) \right) = \\ &= \sum_I Y Y' \pi_I(\theta^0) \sum_J q_{I,J}(\theta^0) (J_i - \mathbf{E}\{x_{i,t} | X_{t-1} = I\}) (J_j - \mathbf{E}\{x_{j,t} | X_{t-1} = I\}) = \\ &= \sum_I Y Y' \pi_I(\theta^0) \mathbf{cov}\{x_{i,t}, x_{j,t} | X_{t-1} = I\} = \mathbf{E}\{Y_t Y_t' \mathbf{cov}\{x_{i,t}, x_{j,t} | X_{t-1} = I\}\}, \end{aligned}$$

где $Y_t = (X_{t-1}', z)'$. Воспользуемся леммой 1, тогда

$$H_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{O}_{n+1}, & i \neq j; \\ N \mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z) (1 - p_i(X_{t-1}, z))\}, & i = j. \end{cases}$$

Таким образом, матрица G является блочно-диагональной с диагональными блоками $N \mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z) (1 - p_i(X_{t-1}, z))\}$. Тогда определитель матрицы G вычисляется следующим образом [8]:

$$\det(G) = N^{n(n+1)} \prod_{i=1}^n \det \left(\mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z) (1 - p_i(X_{t-1}, z))\} \right). \quad (14)$$

Вычислим $\det \mathbf{E}\{Y_t Y_t'\}$, используя свойства определителя блочных матриц [8]:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{E}\{Y_t Y_t'\} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}\{X_{t-1} X_{t-1}'\} & z \mathbf{E}\{X_{t-1}\} \\ z \mathbf{E}\{X_{t-1}'\} & z^2 \end{pmatrix} = z^2 \det \left(\mathbf{E}\{X_{t-1} X_{t-1}'\} - \frac{1}{z^2} z \mathbf{E}\{X_{t-1}\} z \mathbf{E}\{X_{t-1}'\} \right) = \\ &= z^2 \det \left(\mathbf{E}\{X_{t-1} X_{t-1}'\} - \mathbf{E}\{X_{t-1}\} \mathbf{E}\{X_{t-1}'\} \right) = z^2 \det(\mathbf{cov}\{X_{t-1}, X_{t-1}\}). \end{aligned}$$

Так как $z \neq 0$ и в силу леммы 3 $\mathbf{cov}\{X_{t-1}, X_{t-1}\} \succ 0$, то $\det(\mathbf{cov}\{X_{t-1}, X_{t-1}\}) > 0$, поэтому $\det \mathbf{E}\{Y_t Y_t'\} > 0$. В силу леммы 2 имеем $p_i(X_{t-1}, z)(1 - p_i(X_{t-1}, z)) > 0$. Тогда, поскольку $\mathbf{E}\{Y_t Y_t'\} \succ 0$ – положительно определенная матрица, то по лемме 4 матрица $\mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z)(1 - p_i(X_{t-1}, z))\} \succ 0$ также является положительно определенной, поэтому $\det \left(N \mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z)(1 - p_i(X_{t-1}, z))\} \right) \neq 0, i \in S$. Тогда из (14) следует, что $\det(G) \neq 0$, откуда получаем, что матрица G – невырожденная.

Заметим, что если $m > 1$, но $Z_t = (z_{j,t}) \in R^m$ не зависит от времени, то этот случай сводится к случаю, рассмотренному в теореме, введением вспомогательного параметра $\tilde{b}_s := \sum_{j=1}^m b_{s,j} z_{j,1}, s \in S$.

Теорема 3. Если $m = 1, z_{1t} = z \neq 0$ не зависит от t и цепь Маркова $X_t \in L$ стационарна, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in R^1$ построенные согласно (9) оценки максимального правдоподобия $\{\hat{\theta}_s\}$ при $T \rightarrow +\infty$ являются асимптотически нормально распределенными:

$$L\{\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^0)\} \longrightarrow N_{n(n+1)}(0, G^{-1}),$$

где информационная матрица Фишера G вычисляется по формулам (5), (10).

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.2 из [9]. Для этого необходимо проверить следующие условия относительно матрицы вероятностей одношаговых переходов $Q = (q_{I,J})$, определенной (5):

У1. Если $q_{I,J}(\theta) = q_{I,J}(\eta)$ для всех $I, J \in L$, то $\theta = \eta$;

У2. Вероятность перехода $q_{I,J}(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируема по параметру θ в точке θ^0 , где θ^0 – истинное значение вектора параметров;

У3. По крайней мере, одно из значений $\nabla_{\theta} q_{IJ}(\theta^0) \neq \mathbf{0}_{n(n+1)}$ при $I, J \in L$.

Представим $q_{I,J}, I, J \in L$, в следующем эквивалентном виде, используя (5):

$$\begin{aligned} q_{I,J}(\theta) &= \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \left(\exp(a_s' I + b_{s1} z) \right)^{J_s} \left(1 + \exp(a_s' I + b_{s1} z) \right)^{-N} = \\ &= \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^{-N}, \quad I = (I_s), J = (J_s) \in L, \end{aligned}$$

где $Y = (I', z)' \in R^{n+1}, \theta_s = (a_{s1}, \dots, a_{sn}, b_{s1})' \in R^{n+1}, \theta = (\theta_1', \dots, \theta_n')' \in R^{n(n+1)}$.

Для проверки условия У1 преобразуем равенство $q_{I,J}(\theta) - q_{I,J}(\eta) = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^{-N} - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \eta_s' Y) \left(1 + \exp(\eta_s' Y) \right)^{-N}}{\prod_{s=1}^n \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^N \prod_{s=1}^n \left(1 + \exp(\eta_s' Y) \right)^N} = \\ &= \frac{\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \left(1 + \exp(\eta_s' Y) \right)^N - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \eta_s' Y) \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^N}{\prod_{s=1}^n \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^N \prod_{s=1}^n \left(1 + \exp(\eta_s' Y) \right)^N} = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется, только если числитель равен 0:

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \left(1 + \exp(\eta_s' Y)\right)^N - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \eta_s' Y) \left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^N = \\
& = \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \sum_{k=0}^N C_N^k \exp(k \eta_s' Y) - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \eta_s' Y) \sum_{k=0}^N C_N^k \exp(k \theta_s' Y) = \\
& = \prod_{s=1}^n \sum_{k=0}^N C_N^{J_s} C_N^k \exp((k \eta_s + J_s \theta_s)' Y) - \prod_{s=1}^n \sum_{k=0}^N C_N^k C_N^{J_s} \exp((k \theta_s + J_s \eta_s)' Y) = \\
& = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} \exp((k_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y) - \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} \exp((k_s \theta_s + J_s \eta_s)' Y) = \\
& = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \left(\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{(k_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y} - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{(k_s \theta_s + J_s \eta_s)' Y} \right) = \\
& = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} \left(e^{\sum_{s=1}^n (k_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y} - e^{\sum_{s=1}^n (k_s \theta_s + J_s \eta_s)' Y} \right) = \\
& = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{\sum_{s=1}^n (J_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y} \left(e^{\sum_{s=1}^n (k_s - J_s) \eta_s' Y} - e^{\sum_{s=1}^n (k_s - J_s) \theta_s' Y} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Так как $\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{\sum_{s=1}^n (J_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y} > 0$, то данное равенство выполняется только в том случае, когда $e^{\sum_{s=1}^n (k_s - J_s) \eta_s' Y} - e^{\sum_{s=1}^n (k_s - J_s) \theta_s' Y} = 0$ для всех $I, J \in L, k_s = 0, \dots, N, s \in S$, т. е. если $\sum_{s=1}^n \alpha_s' \eta_s = \sum_{s=1}^n \alpha_s' \theta_s$, где $\alpha_s = (k_s - J_s)' Y \in R^{n+1}$. Данное условие представим в эквивалентном виде:

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s' (\eta_s - \theta_s) = 0, \quad \alpha_s = \{-N, \dots, N\}. \quad (15)$$

Если $\alpha_s > 0$ для всех $s \in S$ (данное условие возможно, поскольку в условиях теоремы при $z \neq 0$ вектор Y – ненулевой), то условие (15) выполняется только при $\eta_s = \theta_s, s \in S$. Таким образом, доказано выполнение условия У1.

В силу (5) функция $q_{I,J}(\theta)$ является дважды дифференцируемой по параметру θ в точке θ^0 , т. е. выполняется условие У2.

Для проверки условия У3 рассмотрим вспомогательную функцию ($I = (I_s), J = (J_s) \in L, Y = (I', z)'$):

$$f_{I,J}(\theta_s) = C_N^{J_s} \frac{\exp(J_s \theta_s' Y)}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^N}.$$

Вычислим градиент этой функции:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\theta_s} f_{I,J}(\theta_s^0) & = C_N^{J_s} \left[\frac{J_s \exp(J_s \theta_s' Y) Y}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^N} - N \frac{\exp((J_s + 1) \theta_s' Y) Y}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^{N+1}} \right] = \\
& = C_N^{J_s} \frac{\left(J_s \left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right) - N \exp(\theta_s' Y) \right) \exp(J_s \theta_s' Y)}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^{N+1}} Y =
\end{aligned}$$

$$= C_N^{J_s} \frac{\left(J_s + (J_s - N) \exp(\theta_s' Y) \right) \exp(J_s \theta_s' Y)}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^{N+1}} Y \in R^{n+1}. \quad (16)$$

В условиях теоремы при $z \neq 0$ вектор $Y \in R^{n+1}$ – ненулевой, поэтому из (16) заключаем, что $\nabla_{\theta_s} f_{I,J}(\theta_s^0)$ является ненулевым вектором, а в силу формулы нахождения производной произведения и вектор $\nabla_{\theta_s} q_{I,J}(\theta_s^0)$ – ненулевой для всех $I, J \in L$, т. е. выполняется условие УЗ.

Таким образом, в силу выполнения условий У1–У3 ОМП $\{\hat{\theta}_s\}$ являются при $T \rightarrow \infty$ совместно асимптотически нормально распределенными [9]:

$$L\left\{\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^0)\right\} \longrightarrow N_{n(n+1)}(0, G^{-1}),$$

где G – информационная матрица Фишера (10). Заметим, что в силу теоремы 2 при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in R^1$ матрица G является невырожденной, т. е. обратная матрица G^{-1} существует.

4. Результаты компьютерного моделирования. Компьютерные эксперименты проводились на модельных данных. Рассматривалась модель (1)–(3) при значениях параметров: $m = 1$, $z = 2$, $N = 4$, $A = \{0, 1, \dots, 4\}$, $n = 3$, $S = \{1, 2, 3\}$, $\theta_1 = (-0, 2; 0, 18; -0, 15; 0, 2)'$, $\theta_2 = (-0, 18; 0, 24; -0, 05; -0, 1)'$, $\theta_3 = (0, 13; -0, 13; -0, 29; 0, 3)$, $v = (N + 1)^n = 125$. Для этой модели была теоретически вычислена ковариационная матрица:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = \sum_{I \in A^n} \Pi' \pi_I - \left(\sum_{I \in A^n} \Pi \pi_I \right) \left(\sum_{I \in A^n} \Pi \pi_I \right)',$$

где $\pi = (\pi_I)$ – 125-мерное стационарное распределение вероятностей цепи Маркова, для нахождения которого решалась система уравнений (7). Для рассматриваемой модели вычисленная теоретически ковариационная матрица имеет вид:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = \begin{pmatrix} 1,07 & 0,08 & 0,0002 \\ 0,08 & 1,05 & -0,03 \\ 0,0002 & -0,03 & 1,09 \end{pmatrix}.$$

На рисунке представлены графики зависимости экспериментальной и теоретической среднеквадратической ошибки оценивания параметров модели в зависимости от длительности наблюдений T ($T \in [20, 300]$). Экспериментальная (выборочная) среднеквадратическая ошибка оценивания параметров вычислена по методу Монте-Карло:

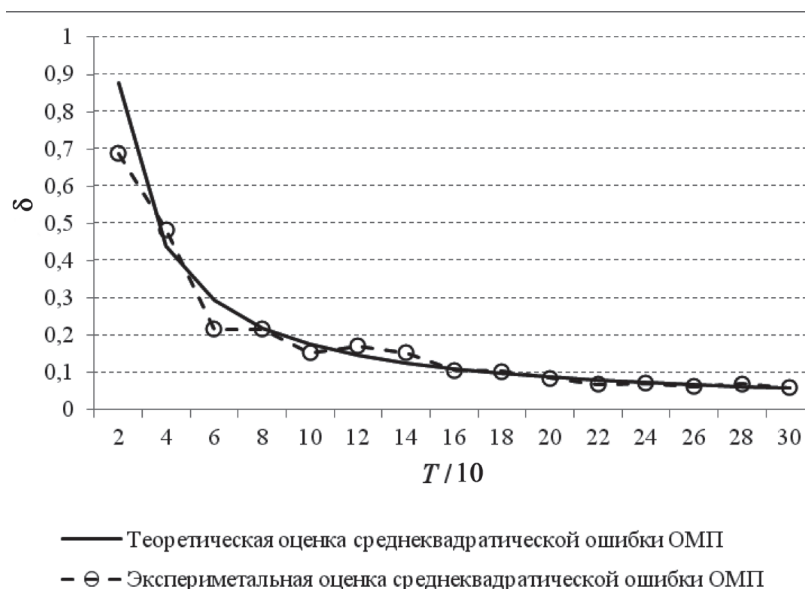
$$\hat{\delta} = \hat{\mathbf{E}} \left\{ \left\| \hat{\theta} - \theta \right\|^2 \right\} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left\| \hat{\theta}^{(k)} - \theta \right\|^2,$$

где $\hat{\theta}^{(k)}$ – оценка максимального правдоподобия вектора 12 параметров по k -й реализации пространственно-временных данных, θ – истинное значение вектора параметров, $M = 1000$ – количество реализаций Монте-Карло. Теоретическая среднеквадратическая ошибка оценивания параметров модели вычислена с использованием результатов, полученных в теоремах 2, 3:

$$\delta = \frac{1}{T} \text{tr}(G^{-1}), \quad G = \text{diag} \left\{ \sum_{I \in L} Y Y' \pi_I \frac{\exp(\theta_s' Y)}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^2} \right\}, \quad Y = (I', z)', s \in S,$$

где $\text{tr}(\cdot)$ – след матрицы.

Рисунок иллюстрирует состоятельность построенной оценки параметров модели и соответствие теоретических и экспериментальных результатов.



Зависимость среднеквадратической ошибки от длительности наблюдений

Заключение. В статье исследованы асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия параметров разработанной биномиальной условно авторегрессионной модели на основе пространственно-временных данных. Доказано, что оценки являются асимптотически нормально распределенными, и найдена асимптотическая ковариационная матрица оценок максимального правдоподобия, определяющая теоретическую среднеквадратическую погрешность оценивания. Проведены компьютерные эксперименты на модельных данных, показавшие согласие теоретических и экспериментальных результатов.

Список использованной литературы

1. Case Study for Modelling Cancer Incidence Using Bayesian Spatio-Temporal Models / S. Y. Kang [et al.] // Australian & New Zealand J. of Statistics. – 2015. – P. 325–345.
2. Xu, G. A Bayesian spatio-temporal geostatistical model with an auxiliary lattice for large datasets / G. Xu, F. Liang, M. G. Genton // Statistica Sinica. – 2015. – Vol. 25. – P. 61–79.
3. Space-time wind speed forecasting for improved power system dispatch (with discussion and rejoinder) / X. Zhu [et al.] // TEST. – 2014. – Vol. 23. – P. 1–25.
4. Zhu, F. Local influence analysis for Poisson autoregression with an application to stock transaction data / F. Zhu, S. Liu, L. Shi // Statistica Neerlandica. – 2016. – Vol. 7-1. – P. 4–25.
5. Харин, Ю. С. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и ее вероятностно-статистический анализ / Ю. С. Харин, М. К. Журак // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 6. – С. 5–12.
6. Кемени, Дж. Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл; пер. с англ. С. А. Молчанова [и др.]; под ред. А. А. Юшкевича. – М.: Наука, 1970.
7. Харин, Ю. С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика: учебник / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2011.
8. Маркус, М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств: пер. с англ. / М. Маркус, Х. Минк; под ред. В. Б. Лидского. – М.: Наука, 1972.
9. Basawa, I. V. Statistical Inference for Stochastic Processes / I. V. Basawa, B. P. Rao. – Academic Press, 1980. – P. 52–66.

Поступила в редакцию 28.01.2016