ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2015
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

МАТЭМАТЫКА

УДК 517.926.4+517.928.2

М. В. КАРПУК

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: m.vasilitch@gmail.com

Для семейства $dx/dt=\mu A(t)x,\ \ x\in\mathbb{R}^n,\ \ t\ge 0$, линейных n-мерных дифференциальных систем с кусочно-непрерывной матрицей $A(t),\ t\ge 0$, и вещественным параметром μ получено для любого натурального n полное описание старшего показателя Ляпунова его систем, рассматриваемого как функция параметра μ. Доказано, что функция $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ является старшим показателем Ляпунова некоторого такого семейства, если и только если она удовлетворяет четырем условиям: 1) принадлежит бэровскому классу $(*,G_\delta)$; 2) равна нулю в нуле; 3) неотрицательна на некоторой полуоси; 4) если она не равна тождественно $+\infty$ ни на одной из открытых полуосей, то существует действительное число b такое, что неравенство $f(\mu)\ge b\mu$ выполняется при всех $\mu\in\mathbb{R}$.

Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, параметр-множитель, показатели Ляпунова, бэровский класс.

M. V. KARPUK

DESCRIPTION OF THE LARGEST LYAPUNOV EXPONENT OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH A PARAMETER-MULTIPLIER

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: m.vasilitch@gmail.com

The largest Lyapunov exponents of linear differential systems $dx/dt=\mu A(t)x,\ \ x\in\mathbb{R}^n,\ \ t\ge 0$, with the real parameter-multiplier μ are considered. It is proven that a function $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ is the largest Lyapunov exponent of some linear differential system with a real parameter-multiplier if and only if it fits the next four conditions: 1) it belongs to the $(*,G_\delta)$ Baire class; 2) it vanishes at zero; 3) it is nonnegative on some real semi-axis; 4) if it is not identically equal to $+\infty$ on any real semi-axis, then there exists such a real number b that the inequality $f(\mu)\ge b\mu$ holds for all $\mu\in\mathbb{R}$.

Keywords: linear differential systems, parameter-multiplier, Lyapunov exponents, Baire class.

Введение. Рассмотрим n-мерную линейную систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt=A(t)x,\quad x=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,\quad t\ge 0,\tag{1}$$

матрица коэффициентов $A(\cdot):[0,+\infty)\to\mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$ которой кусочно-непрерывна на временнóй полуоси $t\ge 0$. Класс всех таких систем обозначим через $\mathcal{M}_n^*$. Отождествляя систему (1) и ее матрицу коэффициентов, будем писать $A\in\mathcal{M}_n^*$. Наряду с системой (1) рассмотрим порожденное ею однопараметрическое семейство

$$dx/dt=\mu A(t)x,\quad x=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,\quad t\ge 0,\tag{2}$$

линейных дифференциальных систем со скалярным параметром-множителем $\mu\in\mathbb{R}$. Класс семейств (2), порождаемых системами $A\in\mathcal{M}_n^*$, обозначим через $\mathcal{K}_n^*$. Фиксируя в семействе (2) значение параметра μ, получаем линейную дифференциальную систему, которую обозначаем через $\langle\mu\rangle_A$. Через $\lambda_1(\mu A)\le\ldots\le\lambda_n(\mu A)$ обозначим показатели Ляпунова [1, с. 34; 2, с. 63] системы $\langle\mu\rangle_A$.

Меры множеств $S_\sigma(\mu A)$, составленных из наборов $(\lambda_1(\mu(A+Q),\ldots,\lambda_n(\mu(A+Q))$ показателей Ляпунова, при отделенных от нуля положительных значениях параметра μ и всех матрицах-возмущениях $Q(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\|Q(t)\|\le \mathrm{const}_Q \exp(-\sigma t)$, исследовались в работах [3, 4]. В них установлено существование систем (2) с множествами $S_\sigma(\mu A)$ положительной меры Лебега, неограниченной по параметру μ. В работе [5] получено необходимое и достаточное условие на матрицу-возмущение $Q(\cdot)$, при котором наборы показателей Ляпунова исходной ($Q(\cdot)\equiv 0$) и возмущенной систем совпадают.

В. И. Зубов в монографии [6, с. 408; проблема 1] поставил задачу выяснить, как изменяются показатели Ляпунова системы (1) после умножения на постоянную вещественную величину μ всех ее коэффициентов, т. е. как связаны показатели Ляпунова систем (1) и (2). Подчеркнем, что в [6] в постановке задачи ограниченности матрицы коэффициентов системы (1) не предполагается. Поэтому, вообще говоря, показатель $\lambda_i(\mu A)$, $i=1,\ldots,n$, может при некоторых или всех значениях μ принимать несобственные значения: $-\infty$ или $+\infty$. Следовательно, функция $\lambda_i(\mu A)$ переменной $\mu\in\mathbb{R}$, которую назовем i-м показателем Ляпунова семейства (2), – это функция $\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\sqcup\{-\infty,+\infty\}$.

Задача Зубова равносильным образом может быть сформулирована так: для каждого $i=1,\ldots,n$ дать полное описание множества $\mathcal{L}_i^n \overset{\mathrm{def}}{=} \{\lambda_i(\mu A): A\in\mathcal{M}_n^*\}$ функций $\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$, представляющих собой i-е показатели Ляпунова семейств из $\mathcal{K}_n^*$. В настоящей работе эта задача решена для старших показателей Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$, т. е. для каждого натурального $n\ge 2$ дано полное описание множества $\mathcal{L}_n^n$.

Отметим, что случай $n=1$ тривиален. Пусть $A(\cdot):[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, а $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int_0^t A(\tau)\,d\tau=\overline{A}$ и $\underline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int_0^t A(\tau)\,d\tau=\underline{A}$. Тогда, очевидно, $\lambda_1(\mu A)=\mu\overline{A}$, если $\mu>0$, и $\lambda_1(\mu A)=-\mu\underline{A}$, если $\mu<0$, кроме того, $\lambda_1(0)=0$. Поскольку для любых значений $\underline{A}$, $\overline{A}\in\overline{\mathbb{R}}$, таких, что $\underline{A}\le\overline{A}$, найдется [2, с. 149] функция $A(\cdot):[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, нижние и верхние интегральные средние которой совпадают с этими значениями соответственно, то класс $\mathcal{L}_1^1$ состоит из всех функций $f(\cdot):\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$, равных нулю в нуле, таких, что их сужение на открытую полуось – линейная однородная функция (возможно, равная $-\infty$ или $+\infty$) и $-f(-1)\le f(1)$.

Необходимые определения и предварительные результаты. Для $q\in\mathbb{R}$ множество Лебега $f^{-1}([q,+\infty))$ вещественнозначной функции f (т. е. прообраз промежутка $[q,+\infty)$ при отображении f), будем, следуя [7, с. 221], обозначать через $[f\ge q]$. Напомним, что вещественнозначная функция f называется [7, с. 223–224] функцией класса $(*,G_\delta)$, если для каждого $q\in\mathbb{R}$ ее множество Лебега $[f\ge q]$ является G_δ-множеством (множество в топологическом пространстве называется G_δ-множеством, если оно представимо в виде счетного пересечения открытых в этом пространстве множеств). Считаем, что на расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ задана естественная порядковая топология, т. е. $\overline{\mathbb{R}}$ гомеоморфно отрезку $[-1,1]$. Введем ограничивающее преобразование $\ell:\overline{\mathbb{R}}\to[-1,1]$ стандартным образом:

$$\ell(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|+1} & \text{при}\quad x\in\mathbb{R},\\ \operatorname{sgn}(x) & \text{при}\quad x=\pm\infty.\end{cases}$$

Поскольку отображение ℓ осуществляет сохраняющий порядок гомеоморфизм между $\overline{\mathbb{R}}$ и отрезком $[-1,1]$, то скажем, что функция $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ принадлежит бэровскому классу $\mathcal{K}$, если этому же классу $\mathcal{K}$ принадлежит и композиция $\ell\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (это определение равносильно определению [8, с. 382, 401] бэровских классов функций для отображений метрических пространств). В частности, скажем, что функция $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(*,G_\delta)$, если этому классу принадлежит композиция $\ell\circ f$.

В теореме 3 работы [9] доказано, что для каждой системы $A\in\mathcal{M}_n^*$ функция $\lambda_n(\mu A):\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ аргумента μ удовлетворяет следующим трем необходимым условиям: а) она принадлежит классу $(*,G_\delta)$; б) обращается в нуле в нуль; в) принимает на одной из числовых полуосей только неотрицательные значения. Рассмотрим функцию $\lambda_n(\mu A)$ на той открытой полуоси, на которой она неотрицательна. Могут представиться только две возможности: 1) либо функция $\lambda_n(\mu A)$ принимает на этой полуоси хотя бы одно конечное значение; 2) либо на этой полуоси функция $\lambda_n(\mu A)$ тождественно равна $+\infty$. В [9, теорема 3] доказано, что если имеет место случай 1), то функция $\lambda_n(\mu A)$ удовлетворяет еще одному необходимому условию: г) найдется такое число $b\in\mathbb{R}$, что при всех $\mu\in\mathbb{R}$ верно неравенство $\lambda_n(\mu A)\ge b\mu$. В [9, теорема 4] доказано, что в случае 1) необходимые условия а) – г) являются и достаточными, т. е. для любой функции $f(\cdot):\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющей условиям а) – г), существует такая система $A\in\mathcal{M}_n^*$, что старший показатель Ляпунова семейства (2) совпадает с $f(\mu)$ при всех $\mu\in\mathbb{R}$. Вопрос о полном описании старшего показателя Ляпунова в случае 2) оставался открытым.

В настоящей работе доказано (в этом и состоит ее основной результат), что в случае 2) необходимые условия а) – в) являются также и достаточными. Этим с учетом результатов работы [9] задача Зубова для старшего показателя Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$ решена полностью.

Основные результаты. В силу вышесказанного множество старших показателей Ляпунова тех семейств (2), для которых они тождественно равны $+\infty$ на одной из полуосей, полностью описывает

Т е о р е м а 1. *Для каждого натурального $n\ge 2$ и любой функции $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ класса $(*,G_\delta)$, обращающейся в нуле в нуль и тождественно равной $+\infty$ на одной из открытых полуосей, существует такая система $A\in\mathcal{M}_n^*$ с бесконечно дифференцируемой матрицей коэффициентов, что старший показатель Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$ системы $\langle\mu\rangle_A$ равен $f(\mu)$ при всех $\mu\in\mathbb{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, считаем, что функция f неотрицательна на положительной полуоси, поскольку очевидно, что если $\lambda_n(\mu A)=f(\mu)$, то $\lambda_n(\mu(-A))=f(-\mu)$, $\mu\in\mathbb{R}$. Для доказательства теоремы нам понадобится ряд дополнительных построений, которые будем выписывать как его отдельные пункты.

1. Построим вначале двумерную систему, удовлетворяющую условиям теоремы. Для ее построения нам понадобится несколько модифицировать конструкцию работ [10, 11]. Опишем эту конструкцию вместе с нужными нам изменениями. Зафиксируем какие-либо кусочно-непрерывные 2×2-матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$ и возьмем матрицу $A(\cdot)$ системы (1), где $n=2$, в виде:

$$A(t)=U^{-1}(t)B(t)U(t)-U^{-1}(t)\,dU(t)/dt,\quad t\ge 0,\tag{3}$$

здесь $U(t)$ – матрица поворота на угол $\varphi(t)=\int_0^t\omega(\tau)\,d\tau$ по ходу часовой стрелки (не нарушая общности, считаем ортонормальную систему координат Ox_1x_2 правой). Сделав в семействе (2) с матрицей $A(\cdot)$, задаваемой равенством (3), линейную замену переменных $y=U(t)x$, придем, как легко убедиться, к следующему семейству:

$$dy/dt=\mu B(t)y+(1-\mu)\omega(t)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}y\equiv C_{B,\omega}(t,\mu)y,\quad y\in\mathbb{R}^2,\quad t\ge 0.\tag{4}$$

Так как матрица $U(t)$ является при каждом $t\ge 0$ ортогональной, то замена переменных $y=U(t)x$ не изменяет норму решений, а значит, для любого $\mu\in\mathbb{R}$ показатели Ляпунова системы $\langle\mu\rangle_A$ семейства (2) с матрицей (3) и системы $\langle\mu\rangle_C$ семейства (4) совпадают. Таким образом, построение нужной двумерной системы (1) сводится к построению соответствующих матрицы $B(\cdot)$ и функции $\omega(\cdot)$. Эти матрица $B(\cdot)$ и функция $\omega(\cdot)$ будут определены в п. 5 доказательства после некоторых дополнительных вспомогательных построений п. 2 и 3.

2. Матрицу $C_{B,\omega}(\cdot;\mu)$ семейства (4) (т. е. матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$) будем строить на временнóй полуоси $t \geq 0$ как кусочно-постоянную, значения которой составлены из элементов определяемого ниже семейства матриц.

Рассмотрим следующее четырехпараметрическое семейство 2×2-матриц:

$$D(\mu; p) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mu a & \mu(b-c)+c \\ \mu(d+c)-c & \mu a \end{pmatrix}, \tag{5}$$

зависящее от четырех вещественных параметров a, b, c, d (обозначим составленный из них вектор $(a, b, c, d)^{\mathrm{T}}$ через p) и переменной $\mu \in \mathbb{R}$. Для матрицы $D(\mu; p)$ ее характеристическое уравнение $\det(\nu E - D(\mu; p)) = 0$ имеет вид $(\nu - \mu a)^2 - (\mu(b-c)+c)(\mu(d+c)-c) = 0$. Дискриминант $R(\mu; p)$ этого уравнения равен $R(\mu; p) = 4((b-c)(d+c)\mu^2 + c(2c+d-b)\mu - c^2)$.

Для вещественных чисел r и s $(r < s)$ одного знака (в частности, ненулевых) компоненты вектора p выберем удовлетворяющими условиям:

$$a > 0, \quad c \geq 0, \quad b = c(s-1)/s, \quad d = c(1-r)/r. \tag{6}$$

При таком, как в (6), выборе параметров a, b, c, d корнями квадратного относительно μ трехчлена $R(\mu; p)$ являются числа r и s, его старший коэффициент равен $4(b-c)(d+c) = -4c^2/(rs) < 0$, а характеристические числа $\nu_{1,2}(\mu)$ матрицы $D(\mu; p)$ задаются, как нетрудно найти, равенством $\nu_{1,2}(\mu) = a\mu \pm c\sqrt{(s-\mu)(\mu-r)/(rs)}$. Поэтому корни $\nu_{1,2}(\mu)$ вещественны только при $\mu \in [r, s]$, а при всех μ, не принадлежащих отрезку $[r, s]$, вещественная часть обоих характеристических чисел $\nu_1(\mu)$ и $\nu_2(\mu)$ равна $a\mu$. Так как $c \geq 0$, то для нахождения большего характеристического числа (пусть это ν_2) при $\mu \in [r, s]$ в последнем равенстве нужно взять знак «плюс», т. е. при $\mu \in [r, s]$ имеет место равенство $\nu_2(\mu) = a\mu + c\sqrt{(s-\mu)(\mu-r)/(rs)}$; в частности, $\nu_2(\mu) \geq a\mu$ при всех $\mu \in [r, s]$.

Рассмотрим вещественную часть $\operatorname{Re}\nu_2(\mu)$ большего характеристического числа $\nu_2(\mu)$ как функцию аргумента $\mu \in \mathbb{R}$ и обозначим эту функцию через $\nu(\mu)$, т. е.

$$\nu(\mu) = \begin{cases} a\mu + c\sqrt{(s-\mu)(\mu-r)/(rs)} & \text{при} \quad m \in [r, s], \\ a\mu & \text{при} \quad m \in \mathbb{R} \setminus [r, s]. \end{cases} \tag{7}$$

Покажем, что максимум этой функции на отрезке $[r, s]$ достигается в точке

$$\mu_{\max} = \xi + L\sqrt{a^2 rs/(c^2 + a^2 rs)}, \tag{8}$$

где $\xi = (s+r)/2$ и $L = (s-r)/2$. Действительно, сделаем замену переменной (сдвиг) $\mu = \omega + \xi$; тогда, поскольку $\mu \in [r, s]$, переменная $\omega \in [-L, L]$, а функция $\nu(\mu)$ при такой замене перейдет в функцию $\gamma(\omega) = a\xi + a\omega + c\sqrt{L^2 - \omega^2}/\sqrt{rs}$. Очевидно, что равенство $d\gamma(\omega)/d\omega = 0$ равносильно равенству $\omega/\sqrt{L^2 - \omega^2} = a\sqrt{rs}/c$. Корень последнего уравнения положителен и, как легко убедиться, равен $L\sqrt{a^2 rs/(c^2 + a^2 rs)}$, откуда обратной заменой получаем равенство (8). Из проведенных вычислений видно, что на отрезке $[r, s]$ функция $\nu(\mu)$ возрастает при $\mu \in [r, \mu_{\max}]$ и убывает при $\mu \in [\mu_{\max}, s]$.

Обозначим для удобства число $\sqrt{a^2 rs/(c^2 + a^2 rs)}$ через h; в этих обозначениях формула (8) примет вид $\mu_{\max} = \xi + Lh$. Учитывая очевидное включение $h \in (0,1]$, из формулы (8) получаем, что $\mu_{\max} \in (\xi, s]$. Подставив вместо μ значение $\mu_{\max}$ в первое выражение из (7), после очевидных преобразований находим, что максимальное значение $\nu_{\max}$ функции $\nu(\cdot)$ на отрезке $[r, s]$ равно

$$\nu_{\max} = a\xi + aL/h. \tag{9}$$

Пусть задано некоторое число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon < a\xi + aL / h - as = aL(1-h) / h. \qquad (10)$$

Обозначим $q = \nu_{\max} - \varepsilon$. В силу неравенства (10) и того, что на отрезке $[r,s]$ функция $\nu(\mu)$ возрастает при $\mu \in [r, \mu_{\max}]$ и убывает при $\mu \in [\mu_{\max}, s]$, множество тех $\mu \in [r,s]$, в которых значения функции $\nu(\cdot)$ отличаются от ее максимального значения $\nu_{\max}$ не более, чем на ε, является отрезком. Чтобы найти его концы, т. е. те два значения δ, при которых точки $\mu_{\max} + \delta$ принадлежат отрезку $[r,s]$ и выполняется равенство $\nu(\mu_{\max} + \delta) = q$, подставим в первое выражение из (7), записанное в виде $\nu(\mu) = a\xi + a(\mu - \xi) + c\sqrt{L^2 - (\mu - \xi)^2} / \sqrt{rs}$, вместо переменной μ значение $\mu_{\max} + \delta$, получим равенство

$$\nu(\mu_{\max} + \delta) = a\xi + a(\delta + Lh) + c\sqrt{L^2 - (\delta + Lh)^2} / \sqrt{rs}.$$

Приравнивая правые части последнего равенства и равенства (9): $\nu_{\max} - \varepsilon = a\xi + aL / h - \varepsilon$, получим уравнение $a(\delta + Lh) + c\sqrt{L^2 - (\delta + Lh)^2} / \sqrt{rs} = aL / h - \varepsilon$, или, после преобразований,

$$(L^2 - (\delta + Lh)^2)c^2 / (rs) = (aL / h - aLh - a\delta - \varepsilon)^2.$$

Раскрывая скобки и собирая члены при одинаковых степенях δ, а также учитывая, что $c^2 / (rs) = = a^2(1 - h^2) / h^2$, придем к квадратному относительно δ уравнению

$$(a^2 / h^2)\delta^2 + 2a\varepsilon\delta + \varepsilon^2 - 2\varepsilon aL(1 - h^2) / h = 0. \qquad (11)$$

Дискриминант D уравнения (11) равен: $D = (4\varepsilon a^2(1 - h^2) / h^2)(2aL / h - \varepsilon)$. В силу неравенства (10), поскольку $2aL / h > (aL / h)(1 - h)$, дискриминант D положителен. Кроме того, так как $\varepsilon < (aL / h)(1 - h) < (2aL / h)(1 - h^2)$, то свободный член квадратного трехчлена в (11) отрицателен, а значит, корни $\delta_{1,2}$ уравнения (11) разного знака (не ограничивая общности, считаем $\delta_1 < 0 < \delta_2$). Таким образом, множеством решений неравенства $\nu(\mu) \geq q$ на отрезке $[r,s]$ является отрезок $[\mu_{\max} + \delta_1, \mu_{\max} + \delta_2]$.

В дальнейшем мы будем применять конструкцию этого пункта следующим образом: по заданным значениям r, s, a, q, ε из равенства $\nu_{\max} = q + \varepsilon$ найдем вследствие (9) коэффициент c, затем из двух последних равенств в (6) – коэффициенты b и d; тогда определен вектор $p = (a, b, c, d)^{\mathrm{T}}$, а значит, матрица (5) и функция $\nu(\cdot)$, про которую будем говорить, что она построена на отрезке $[r,s]$ по числам a, q, ε.

3. В этом пункте определим отрезки, на которых будем строить нужные нам функции $\nu(\cdot)$ из п. 2.

3.1. Воспользуемся полученным в [12] представлением множеств Лебега функций класса $(*, G_\delta)$. Функция f класса $(*, G_\delta)$, как и любая вещественнозначная функция, однозначно определяется [7, с. 221] своими множествами Лебега $[f \geq q_w]$, где $\{q_w : w \in \mathbb{N}\}$ – множество рациональных чисел, занумерованных каким-либо образом. Так как f – функция класса $(*, G_\delta)$, то для каждого $q \in \mathbb{R}$ ее множество Лебега $[f \geq q]$, являясь G_δ-множеством, представимо в виде счетного пересечения открытых множеств. Для всех q_w, $w \in \mathbb{N}$, выберем это представление таким же, как в работах [9, 12], т. е. таким, чтобы выполнялась

Л е м м а [12]. *Для любой функции $f \in (*, G_\delta)$ существует семейство $\{(G_w^i)_{i \in \mathbb{N}} : w \in \mathbb{N}\}$ убывающих последовательностей $(G_w^i)_{i \in \mathbb{N}}$ открытых множеств такое, что при всех $w \in \mathbb{N}$ верно представление $[f \geq q_w] = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_w^i$, и каждая точка $\mu \in \mathbb{R}$, не принадлежащая множеству $[f \geq q_w]$, принадлежит не более чем конечному количеству тех множеств G_j^i, $i \in \mathbb{N}$, для нижнего индекса j которых выполнено неравенство $q_j \geq q_w$.*

3.2. Поскольку, как сказано в начале доказательства, справедливы равенства $f \equiv +\infty$ на $(0,+\infty)$ и $f(0)=0$, то далее вместо f достаточно рассматривать ее сужение $f|_{(-\infty,0)}$ на полуось $(-\infty,0)$. Так как $[f|_{(-\infty,0)} \geq q] = [f \geq q] \bigcap (-\infty,0)$, то множества G_w^i из леммы, дающие представление множеств Лебега $[f|_{(-\infty,0)} \geq q]$, являются подмножествами интервала $(-\infty,0)$ для всех $(w,i) \in \mathbb{N}^2$. Построим теперь нужное в дальнейшем представление самих открытых множеств G_w^i. Каждое множество G_w^i, являясь открытым подмножеством интервала $(-\infty,0)$, представляет собой не более чем счетное объединение $G_w^i = \sqcup_{k\in\mathbb{N}} I_w^i(k)$ непересекающихся интервалов $I_w^i(k)$, лежащих на полуоси $(-\infty,0)$.

Зафиксируем какую-либо функцию $\varepsilon(w,i)$ такую, что $\varepsilon(w,i) \to 0$ при $|w|+|i| \to +\infty$, например, $\varepsilon(w,i) = (w^2+i^2)^{-1}$. Рассмотрим отдельно каждый интервал $I_w^i(k)$. Если этот интервал конечен, то определены числа r,s,q,ε, а именно, $I_w^i(k)=(r,s)$, $q=q_w$ и $\varepsilon=\varepsilon(w,i)$, которые до конца этого подпункта 3.2 будем писать, не отмечая их зависимость от w и w, i. Выберем на интервале (r,s) два семейства отрезков

$$\Delta_w^i(k,-l) = [r+2^{-l-1}L,\ r+2^{-l}L] \quad \text{и} \quad \Delta_w^i(k,l) = [s-2^{-l}L,\ s-2^{-l-1}L], \quad l \in \mathbb{N},$$

где, как и выше, $L=(s-r)/2$. Если интервал $I_w^i(k)$ бесконечен, т. е. $I_w^i(k)=(-\infty,s)$, то в этом случае семейства отрезков зададим так:

$$\Delta_w^i(k,-l) = [s-l-1,\ s-l+1/2] \quad \text{и} \quad \Delta_w^i(k,l) = [s-2^{-l},\ s-2^{-l-1}], \quad l \in \mathbb{N},$$

а число L положим равным $1/2$. В дальнейшем случаи конечных и бесконечных интервалов $I_w^i(k)$ различать не будем, так как построения этого подпункта будут верны для обоих случаев. Каждому отрезку $\Delta_w^i(k,l)$, $l\in\mathbb{Z}$, $l\neq 0$, поставим в соответствие число $a=\max(w+i+k+l,[q/s]+1)$, где $[q/s]$ – целая часть числа q/s (позднее нам понадобится условие $q>as$ для того, чтобы для этого отрезка выполнялось неравенство (10)).

Покажем, что каждая точка μ отрезка $\Delta_w^i(k,l)$, $l\neq 0$, может быть точкой максимума какой-то функции $\nu(\cdot)$, построенной, как в п. 2, на некотором отрезке $[r',s'] \subset I_w^i(k)$ по числам a, q, ε, причем $\nu(\mu)=q+\varepsilon$ и расстояния от точек r' и s' до отрезка $\Delta_w^i(k,l)$ не будут превышать $2^{-l-2}L$ (расстояние от точки до множества – инфимум расстояний от нее до точек множества). Будем говорить, что указанный отрезок $[r',s']$ реализует точку μ.

Действительно, выпишем формулы из конструкции п. 2, примененной к какому-то, пока неизвестному, отрезку $[r',s']$ и определенным выше числам a, q, ε и найдем, каким требованиям должны удовлетворять числа r' и s', чтобы этот отрезок реализовывал точку μ. Ниже во всех выкладках используем аналогичные п. 2 обозначения, отмечая их штрихами: $L'=(s'-r')/2$, $\xi'=(r'+s')/2$ и $h'=\sqrt{a^2r's'/((c')^2+a^2r's')}$. В силу формулы (8), условие, что μ – точка максимума функции $\nu(\cdot)$, запишется как $\mu=\mu_{\max}=\xi'+L'h'$, а равенство $\nu(\mu)=q+\varepsilon$, с учетом (9), примет вид $q+\varepsilon=a\xi'+aL'/h'$. Исключив из второго условия h' и подставив в первое, получим равенство $\mu=\xi'+a(L')^2/(q+\varepsilon-a\xi')$, откуда найдем $L'=\sqrt{(\mu-\xi')(q+\varepsilon-a\xi')/a}$. В силу непрерывности L' как функции ξ' можно так выбрать $\xi'<\mu$, достаточно близкое к μ, что L', найденное из последней формулы, будет достаточно малым, а отрезок с концами $r'=\xi'-L'$ и $s'=\xi'+L'$ будет удовлетворять нашим требованиям.

Для каждой точки μ из отрезка $\Delta_w^i(k,l)$ построим отрезок $\Theta(\mu)$, который ее реализует. В этом отрезке, в свою очередь, выберем подинтервал $\theta(\mu)$, на котором функция $\nu(\cdot)$ принимает значения из промежутка $(q,q+\varepsilon]$. Совокупность всех подинтервалов $\{\theta(\mu):\mu\in\Delta_w^i(k,l)\}$ образует открытое покрытие отрезка $\Delta_w^i(k,l)$, из которого по лемме Гейне – Бореля выберем конечное подпокрытие: $\bigcup_{j=1}^{J}\theta(\mu_j) \supset \Delta_w^i(k,l)$. При этом реализующие отрезки $\Theta(\mu_j)$, $j=1,\ldots,J$, будем называть основными для отрезка $\Delta_w^i(k,l)$.

3.3. Проделав эти построения для всех интервалов $I_w^i(k)$, получим множество основных отрезков, которые занумеруем одним параметром $m \in \mathbb{N}$; при этом основной отрезок, отвечающий номеру m, обозначим через $\Delta(m)$, ту четверку (w, i, k, l), для которой $\Delta(m)$ является основным (одним из основных) отрезком для $\Delta_w^i(k,l)$ – через $o(m)$, число ε – через $\varepsilon(m)$, функцию $\nu(\mu)$, построенную, как в подп. 3.2, для $\Delta(m)$ – через $\nu(\mu,m)$, параметры (6) функции $\nu(\mu,m)$ – через $a(m)$, $b(m)$, $c(m)$, $d(m)$, а вектор $(a(m), b(m), c(m), d(m))^{\mathrm{T}}$ – через $p(m)$. Компоненты w и i четверки $o(m)=(w,i,k,l)$ будем обозначать $o_1(m)$ и $o_2(m)$ соответственно.

Непосредственно из построений вытекают следующие свойства:

i) для каждой точки $\mu \in I_w^i(k)$ найдется номер $m \in \mathbb{N}$ такой, что $\nu(\mu,m) \in (q_w, q_w + \varepsilon(w,i)]$, при этом $o(m)=(w,i,k,l)$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$;

ii) для каждой точки $\mu \in I_w^i(k)$ найдется не более, чем конечное количество номеров $m \in \mathbb{N}$ таких, что $\nu(\mu,m) > a(w,i,k,l)\mu$ и $o(m)=(w,i,k,l)$ при некотором $l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ (т. е. $\mu \in \Delta(m)$ лишь для конечного количества тех m, для которых $o(m)=(w,i,k,l)$);

iii) $a(m) \to +\infty$ при $m \to +\infty$.

4. Покажем, что из построений п. 3. следует равенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\, \nu(\mu,m) = f(\mu), \quad \mu \in (-\infty, 0). \tag{12}$$

Рассмотрим сначала те номера m, при которых точка μ не принадлежит отрезку $\Delta(m)$, занумеруем их по возрастанию и обозначим полученную последовательность номеров через $(m_s)_{s\in\mathbb{N}}$. По построению $\nu(\mu,m_s) = a(m_s)\mu$, следовательно, $\overline{\lim_{s\to+\infty}}\, \nu(\mu,m_s) = -\infty$, так как $\mu<0$ и, по свойству iii) предыдущего пункта, имеет место соотношение $\lim_{s\to+\infty} a(m_s) = +\infty$.

Выберем какую-либо последовательность рациональных чисел $(q_{w_j})_{j\in\mathbb{N}} \uparrow f(\mu)$. При всех $j \in \mathbb{N}$ точка μ принадлежит множеству $[f \ge q_{w_j}]$, а значит, к ней применимо свойство i) подп. 3.3.Таким образом, найдется последовательность натуральных чисел $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$, для которой $\nu(\mu,m_j) > q_{w_j}$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, верно неравенство $\overline{\lim_{m\to+\infty}}\, \nu(\mu,m) \ge f(\mu)$.

Для завершения доказательства равенства (12) осталось показать, что для любого $\eta>0$ существует не более, чем конечное количество номеров m таких, что

$$\nu(\mu,m) \ge f(\mu) + \eta. \tag{13}$$

Оценим сверху количество таких m. Выберем номер $w \in \mathbb{N}$, для которого выполнено двойное неравенство $f(\mu) \le q_w < f(\mu) + \eta$. Тогда $\mu \notin [f \ge q_w]$, а значит, по лемме из подп. 3.1 точка μ может принадлежать лишь конечному количеству множеств G_j^k, где $k \in \mathbb{N}$, а $q_j > q_w$. Но каждая точка множества G_j^k принадлежит по свойству ii) подп. 3.3 не более, чем конечному количеству интервалов $\Delta(m)$ таких, что $o_1(m) = j$, $o_2(m) = k$. Следовательно, при всех $j \in \mathbb{N}$, при которых $q_j > q_w$, неравенство (13) выполняется не более чем конечное количество раз.

Остались еще номера $j \in \mathbb{N}$, для которых $q_j \le q_w$. Начиная с некоторого номера N все члены последовательности $(\varepsilon(m))_{m\in\mathbb{N}}$ будут меньше, чем положительное число $f(\mu)+\eta-q_w$, а значит, и максимум функции $\nu(\cdot,m)$ будет меньше, чем $f(\mu)+\eta$ при всех $m \in \mathbb{N}$, таких, что $o_1(m) = j$, $m \ge N$, $q_j \le q_w$. И в этом случае получили, что неравенство (13) выполняется не более чем конечное количество раз. Равенство (12) доказано.

5. Построение матрицы системы будем вести индукцией по шагам, на которых будем, согласно п. 1, строить соответствующие 2×2-матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$ семейства (4), т. е. матрицу $C_{B,\omega}(\cdot,\mu)$. Считаем, что фиксирована возрастающая последовательность $(T_m)_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, которую определим позднее; пока же предполагаем только, что она удовлетворяет следующим условиям: $T_0 = 0$, $\lim_{m\to+\infty} T_m = +\infty$ и что четыре числа $T_{3m-3}, T_{3m-2}, T_{3m-1}, T_{3m}$ образуют арифметическую прогрессию при каждом $m \in \mathbb{N}$. На m-м шаге ($m \in \mathbb{N}$) будем строить матрицу $C_{B,\omega}$ на полуинтервале $(T_{3(m-1)}, T_{3m}]$, при этом, если необходимо, будем изменять ее значения на предыдущем полуинтервале $(T_{3(m-2)}, T_{3(m-1)}]$. Обозначим $\tau_m = (T_{m-1}, T_m]$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть сделан $m-1$ шаг, т. е. матрица $B(t)$ и функция $\omega(t)$ определены при всех $t \in [0, T_{3(m-1)}]$. Сделаем m-й шаг.

Зададим пару $(B(\cdot), \omega(\cdot))$ на полуинтервале $(T_{3(m-1)}, T_{3m}]$ равенствами

$$
\begin{aligned}
&B(t) = \begin{pmatrix} a(m) & b(m) \\ d(m) & a(m) \end{pmatrix} \text{ и } \omega(t) = c(m) && \text{при } t \in \tau_{3m-2}, \\
&B(t) = \alpha_m E_2 \text{ и } \omega(t) = 0 && \text{при } t \in \tau_{3m-1}, \\
&B(t) = \begin{pmatrix} -a(m) & -b(m) \\ -d(m) & -a(m) \end{pmatrix} \text{ и } \omega(t) = -c(m) && \text{при } t \in \tau_{3m}.
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Последовательность $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ определим позднее. Эти построения задают матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$ при всех $t \geq 0$. Матрицу $C_{B,\omega}(t,\mu)$ семейства (4) с построенными матрицей $B(t)$ и функцией $\omega(t)$ обозначим через $C(t,\mu)$, через $\langle\mu\rangle_C$ – систему $\langle\mu\rangle$ этого семейства, а через $X_\mu(\cdot,\cdot)$ – матрицу Коши системы $\langle\mu\rangle_C$. По построению матрица $C(\cdot,\cdot)$ кусочно-постоянна на временно́й полуоси и при всех $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $C(t,\mu) = D(\mu; p(m))$, если $t \in \tau_{3m-2}$, $C(t,\mu) = \alpha_m \mu E_2$, если $t \in \tau_{3m-1}$, и $C(t,\mu) = -D(\mu; p(m))$, если $t \in \tau_{3m}$.

До конца доказательства $A(\cdot)$ обозначает матрицу, связанную с построенными матрицей $B(\cdot)$ и функцией $\omega(\cdot)$ равенством (3), в котором матрица $B(\cdot)$ и функция $\omega(\cdot)$ определяются соотношениями (14).

Из определения (14), поскольку на полуинтервалах τ_m матрица $C(\cdot,\cdot)$ постоянна, непосредственно следует, что для матрицы Коши $X_\mu(\cdot,\cdot)$ системы $\langle\mu\rangle_C$ справедливы представления

$$
X_\mu(t, T_{3m-i}) = \begin{cases} \exp(D(\mu, p(m))(t - T_{3m-3})) & \text{при } i = 3,\ t \in \tau_{3m-2}, \\ \exp(\alpha_m \mu (t - T_{3m-2})) E_2 & \text{при } i = 2,\ t \in \tau_{3m-1}, \\ \exp(-D(\mu, p(m))(t - T_{3m-1})) & \text{при } i = 1,\ t \in \tau_{3m}. \end{cases} \qquad (15)
$$

Из этих равенств очевидно вытекает $X_\mu(T_{3m}, T_{3m-3}) = \exp(\alpha_m (T_{3m} - T_{3m-3})\mu / 3) E_2$. Обозначим сумму $\sum_{i=1}^{m} \alpha_m (T_{3m} - T_{3m-3}) / 3$ через s_m. Тогда, как нетрудно убедиться, для фундаментальной матрицы $X_\mu(\cdot, 0)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ верны равенства

$$
\begin{gathered}
X_\mu(T_{3m}, 0) = \exp(s_m \mu) E_2, \\
X_\mu(T_{3m+1}, 0) = \exp(s_m \mu) \exp(D(\mu, p(m+1))(T_{3m+1} - T_{3m})), \\
X_\mu(T_{3m+2}, 0) = \exp(s_{m+1} \mu) \exp(D(\mu, p(m+1))(T_{3m+1} - T_{3m})).
\end{gathered}
\qquad (16)
$$

6. Покажем, что последовательности $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ и $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ можно задать так, чтобы старший показатель Ляпунова построенного семейства совпадал с функцией $f(\mu)$ при всех $\mu \in \mathbb{R}$, т. е. чтобы при всех $\mu \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство

$$
\lambda_2(\mu A) = \overline{\lim_{m\to+\infty}} \nu(\mu, m). \qquad (17)
$$

Рассмотрим вначале точки $\mu \in (-\infty, 0)$. Как известно [13, с. 170], старший показатель Ляпунова можно вычислять по формуле $\lambda_2(\mu A) = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} t^{-1} \ln \| X_\mu(t,0) \|$. Фундаментальная матрица $X_\mu(t,0)$ имеет различный вид на полуинтервалах $\tau_{3m+1}, \tau_{3m+2}, \tau_{3m+3}$ при всех $m \in \mathbb{N}$, поэтому рассмотрим отдельно каждый из них.

1) Пусть $t \in \tau_{3m+1}$. Тогда из соотношений (15) и (16) следует равенство

$$
X_\mu(t, 0) = \exp(s_m \mu) \exp(D(\mu, p(m+1))(t - T_{3m})). \qquad (18)
$$

Оценим норму матрицы $\exp(D(\mu; p(m+1)))(t-T_{3m})$. Согласно [2, с. 131] имеет место неравенство

$$\|\exp(D(\mu; p(m+1))(t-T_{3m}))\| \le \exp(\nu(\mu, m+1)(t-T_{3m}))H_{\mu,m+1}(t), \tag{19}$$

где $H_{\mu,m+1}(t) = 1 + 2(t-T_{3m})\| D(\mu; p(m+1))\|$. Воспользовавшись (18) и (19), получим, что

$$t^{-1}\ln\| X_\mu(t,0)\| \le t^{-1}(s_m\mu + \nu(\mu, m+1)(t-T_{3m}) + \ln H_{\mu,m+1}(t)),$$

откуда, после преобразований, приходим к оценке

$$t^{-1}\ln\| X_\mu(t,0)\| \le \nu(\mu, m+1) + (s_m\mu - \nu(\mu, m+1)T_{3m} + \ln H_{\mu,m+1}(t))/t. \tag{20}$$

Функция $(\ln H_{\mu,m+1}(t))/t$ для каждого μ, начиная с некоторого момента времени (своего для каждого μ), убывает и стремится к нулю. Рассмотрим $\mu \in [-m, -1/m]$, и пусть $t_{m+1}(\mu)$ – то число, начиная с которого $(\ln H_{\mu,m+1}(t))/t \le m^{-1}$. Коэффициенты матрицы $D(\mu; p(m+1))$ линейно зависят от μ, следовательно, $\|D(\mu; p(m+1))\|$ непрерывно зависит от μ, поэтому и $t_{m+1}(\mu)$ – непрерывная функция аргумента μ, а значит, величина

$$M(m+1) = \max_{\mu\in[-m,-1/m]}\ \max_{t\in[T_{3m}, t_{m+1}(\mu)]} \ln H_{\mu,m+1}(t),$$

конечна; без ограничения общности считаем это число неотрицательным. Число α_m, выбранное на предыдущем шаге, увеличим при необходимости так, чтобы выполнялось неравенство $s_m \ge a(m+1) + mM(m+1)$. Тогда при всех $\mu \in [-m, -1/m]$ и $t \in \tau_{3m+1}$ будет верна оценка $t^{-1}\ln\| X_\mu(t,0)\| \le \nu(\mu, m+1) + m^{-1}$, так как в правой части (20) либо числитель дроби неположителен, либо сама дробь не больше m^{-1}.

Из представления (18) следует, что $t^{-1}\ln\| X_\mu(t,0)\| = t^{-1}(s_m\mu + \ln\| D(\mu, p(m+1))(t-T_{3m})\|)$. Так как матрица $D(\mu, p(m+1))$ постоянна, то [2, с. 122] $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\| D(\mu, p(m+1))(t)\| = \nu(\mu, m+1)$. Выберем теперь T_{3m+1} настолько большим, чтобы при всех $\mu \in [-m, -1/m]$ на полуинтервале τ_{3m+1} нашлась точка $t'_{3m+1}(\mu)$, для которой верно неравенство

$$\left(t'_{3m+1}(\mu)\right)^{-1}\left(-s_m m + \ln\| D\left(\mu, p(m+1)\right)\left(t'_{3m+1}(\mu) - T_{3m}\right)\|\right) > \nu(\mu, m+1) - m^{-1}$$

(такое T_{3m+1} найдется в силу непрерывности функции $t^{-1}\ln\| D(\mu, p(m+1))(t-T_{3m})\|$ по t и μ, непрерывности $\nu(\mu, m+1)$ по μ и компактности отрезка $[-m, -1/m]$). При таком выборе при всех $\mu \in [-m, -1/m]$ справедливо неравенство $\left(t'_{3m+1}(\mu)\right)^{-1}\ln\| X_\mu\left(t'_{3m+1}(\mu), 0\right)\| > \nu(\mu, m+1) - m^{-1}$.

Объединяя полученные результаты, получим $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\| X(t,0)\| = \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\, \nu(\mu, m)$, где верхний предел в левой части вычисляется только по $t \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \tau_{3m+1}$.

2) Пусть $t \in \tau_{3m+2}$. Тогда из соотношений (15) и (16) получаем, что

$$X_\mu(t,0) = \exp(D(\mu, p(m+1))(T_{3m+1} - T_{3m}))\exp((s_m + \alpha_{m+1}(t - T_{3m+1}))\mu). \tag{21}$$

Обозначим $(T_{3m+1})^{-1}\ln\| X_\mu(T_{3m+1}, 0)\|$ через $N(\mu, m)$, тогда из (21) следует равенство

$$t^{-1}\ln\| X_\mu(t,0)\| = t^{-1}(N(\mu,m)T_{3m+1} + \alpha_{m+1}\mu(t - T_{3m+1})) = \alpha_{m+1}\mu + (N(\mu,m) - \alpha_{m+1}\mu)T_{3m+1}/t.$$

В зависимости от знака величины $N(\mu,m) - \alpha_{m+1}\mu$ это выражение принимает наибольшее значение в одной из крайних точек полуинтервала τ_{3m+2}. Выберем α_{m+1} достаточно большим, чтобы при всех $\mu \in [-m, -1/m]$ выполнялось неравенство $N(\mu,m) \ge \alpha_{m+1}\mu$. Такое положительное α_{m+1}

найдется, так как функция $(T_{3m+1})^{-1}\ln\|X_\mu(T_{3m+1},0)\|$ аргумента μ непрерывна на компакте $[-m,-1/m]$, а значит, принимает на нем свое минимальное значение. Тогда максимум функции $t^{-1}\ln\|X_\mu(t,0)\|$ будет достигаться в точке T_{3m+1}, но, как показано в случае 1), $(T_{3m+1})^{-1}\ln\|X_\mu(T_{3m+1},0)\|\le\nu(\mu,m+1)+m^{-1}$. Отметим, что, так как в этом случае нам было достаточно только оценки на α_{m+1} снизу, то эти рассуждения останутся верными, если на следующем шаге в случае 1) величина α_{m+1} увеличится.

3) Пусть t принадлежит τ_{3m+3}. Тогда из соотношений (15) и (16) следует, что

$$X_\mu(t,0)=\exp(s_{m+1}\mu)\exp(D(\mu,p(m+1))(T_{3m+1}-T_{3m}))\exp(-D(\mu,p(m+1))(t-T_{3m+2})).$$

Поскольку матрицы $D(\mu,p(m+1))$ и $-D(\mu,p(m+1))$ перестановочны, то последнее равенство можно переписать в виде

$$X_\mu(t,0)=\exp(s_{m+1}\mu)\exp(D(\mu,p(m+1))(T_{3m+3}-t)). \tag{22}$$

Как и в случае 1), запишем неравенство, аналогичное неравенству (19):

$$\|\exp(D(\mu;p(m+1))(T_{3m+3}-t))\|\le\exp(\nu(\mu,m+1)(T_{3m}-t))\tilde H_{\mu,m+1}(t),$$

где $\tilde H_{\mu,m+1}(t)=1+2(T_{3m+3}-t)\|D(\mu;p(m+1))\|$. Следовательно,

$$t^{-1}\ln\|X_\mu(t,0)\|\le t^{-1}(s_{m+1}\mu+\nu(\mu,m+1)(T_{3m+3}-t)+\ln\tilde H_{\mu,m+1}(t)),$$

откуда после преобразований получаем оценку

$$t^{-1}\ln\|X_\mu(t,0)\|\le-\nu(\mu,m+1)+(s_{m+1}\mu+\nu(\mu,m+1)T_{3m+3}+\ln\tilde H_{\mu,m+1}(t))/t. \tag{23}$$

При $\mu\in[-m,-1/m]$, $t\in[T_{3m+2},T_{3m+3}]$ сумма $\nu(\mu,m+1)T_{3m+3}+\ln\tilde H_{\mu,m+1}(t)$ ограничена, поэтому выберем α_{m+1} настолько большим, чтобы числитель дроби в правой части неравенства (23) был отрицательным, тогда правая часть оценки (23) растет при увеличении t и достигает своего максимума при $t=T_{3m+3}$, при котором правая часть равна $s_{m+1}\mu/T_{3m+3}$. При необходимости увеличим α_{m+1} так, чтобы $s_{m+1}/T_{3m+3}>m$, тогда $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\, s_{m+1}\mu/T_{3m+3}=-\infty$, и, следовательно, $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|X_\mu(t,0)\|=-\infty$, где верхний предел в левой части вычисляется только по $t\in\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\tau_{3m+3}$. Как и в случае 2), при рассмотрении случая 3) мы пользовались только оценками снизу на α_{m+1} и s_{m+1}, а значит, эти рассуждения останутся верным, если на следующем шаге в случае 1) величина α_{m+1} увеличится.

На m-м шаге рассуждения велись для $\mu\in[-m,-1/m]$, но так как $m\to+\infty$, то для каждого фиксированного μ они будут верны, начиная с номера $m=\max\{[-\mu],[-\mu^{-1}]\}+1$. Таким образом, равенство (17) доказано для всех $\mu<0$.

Очевидно, что старший показатель Ляпунова построенного семейства равен нулю при $\mu=0$, так как в этом случае матрица $C_{B,\omega}(t,0)\equiv 0$ и матрица Коши $X_0(t,0)\equiv E_2$. Рассмотрим теперь произвольное $\mu>0$. Из первого равенства в (16) следует, что $(T_{3m})^{-1}\ln\|X_\mu(T_{3m},0)\|=\mu s_m/T_{3m}\to+\infty$ при $m\to+\infty$, и, значит, $\lambda_2(\mu A)=+\infty$ при любом $\mu>0$. Таким образом, равенство $\lambda_2(\mu A)=f(\mu)$ доказано для всех $\mu\in\mathbb{R}$.

7. Отметим, что, как и в работе [9], матрицу системы, удовлетворяющей условиям теоремы 1, можно сделать бесконечно дифференцируемой. Построение бесконечно дифференцируемой системы аналогично построению из [9, п. 3.5]. Необходимо только учесть, что параметров теперь пять, а не три, и взять функцию $g(t)$ из [9] равной $g(t)=\max(|a|,|b-c|,|d+c|,|c|,s_m)$, а все остальные построения оставить без изменений.

Теорема в случае $n=2$ доказана. Для доказательства ее в случае $n>2$ достаточно в качестве матрицы коэффициентов системы рассмотреть $n\times n$-матрицу $\mathrm{diag}[A(t),t,\ldots,t]$, где $A(t)$ – построенная выше 2×2 матрица. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. В доказательстве подп. 3.4 теоремы 2 из [9] для того, чтобы показатель $\lambda_2(\mu A)$ равнялся верхнему пределу при $t \to +\infty$ величин $\nu_2(\mu;k)(t-T_k)/t,\ t\in[T_k,T_k']$, к условию $T_k'/T_k \to +\infty$ при $k\to+\infty$ нужно добавить одно дополнительное условие, аналогично тому, как сделано в настоящей работе. Именно, обозначим через $t_k(\mu)$ такое число, что при всех $t \ge t_k(\mu)$ выполняется неравенство $\ln\|\exp(D(\mu;p(k))t)\|/t \le \nu_2(\mu;k)+k^{-1}$ (не ограничивая общности, считаем $t_k(\mu)$ непрерывной функцией переменной μ). Пусть $M_k=\max\{\ln\|\exp(D(\mu;p(k))t)\|/t:\mu\in[k^{-1},k],\ t\in(0,t_k(\mu)]\}$; эта величина конечна, так как $t_k(\mu)$ непрерывно зависит от μ, норма $\|\exp(D(\mu;p(k))t)\|$ непрерывно зависит от μ и t, а предел $\lim\limits_{t\to0}\ln\|\exp(D(\mu;p(k))t)\|/t$ конечен. Осталось выбрать число T_k таким, чтобы выполнялось неравенство $T_k > kM_k\max\{t_k(\mu):\mu\in[k^{-1},k]\}$.

Объединяя доказанную теорему 1 с теоремами 3 и 4 работы [9], получаем полное описание старшего показателя Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем как функции параметра – его дает основная

Т е о р е м а 2. *Для каждого натурального $n\ge2$ функция $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда является старшим показателем Ляпунова некоторого семейства из $\mathcal{K}_n^*$, когда она удовлетворяет следующим четырем условиям:* 1) *принадлежит классу* $(*,G_\delta)$; 2) *обращается в нуле в нуль;* 3) *принимает на одной из числовых полуосей только неотрицательные значения;* 4) *если функция f не равна тождественно $+\infty$ ни на одной из открытых полуосей, то существует $b\in\mathbb{R}$, такое, что $f(\mu)\ge b\mu$ при всех $\mu\in\mathbb{R}$.*

Следствия из основной теоремы. Напомним, что множеством Se_A экспоненциальной устойчивости семейства (2) называется множество тех μ, при которых система $\langle\mu\rangle_A$ экспоненциально устойчива. В работах [14] и [15] доказано, что множество Se_A экспоненциальной устойчивости семейства (2) с ограниченной на полуоси матрицей коэффициентов $A(\cdot)$ является F_σ-множеством, лежащим на одной из открытых полуосей. В [15] показано также, что для таких семейств множество Se_A удовлетворяет еще и другим необходимым условиям. Вопрос о достаточности полученных в [15] условий остается открытым (в [15] получено лишь частичное их обращение). Вместе с тем для семейств из $\mathcal{K}_n^*$ теоремы 1 и 2 позволяют дать полное описание множеств $Se_A,\ A\in\mathcal{M}_n^*$.

С л е д с т в и е 1. *Для каждого натурального $n\ge2$ множество $M\subset\mathbb{R}$ тогда и только тогда является множеством экспоненциальной устойчивости Se_A некоторого семейства из $\mathcal{K}_n^*$, когда оно является F_σ-множеством, лежащим на одной из открытых полуосей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует из теоремы 2, поскольку множество экспоненциальной устойчивости – это множество $[\lambda_n<0]$, которое, как дополнение к G_δ-множеству $[\lambda_n\ge0]$, является F_σ-множеством. Множество $[\lambda_n<0]$ в силу условия 3) теоремы 2 лежит на одной из открытых полуосей. Необходимость доказана. Докажем достаточность. Пусть дано множество M типа F_σ, лежащее на одной из открытых полуосей (обозначим эту полуось через s). Зададим функцию $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } x\in M,\\ 0 & \text{при } x\in(s\setminus M)\cup\{0\},\\ +\infty & \text{при } x\in\mathbb{R}\setminus(s\cup\{0\}).\end{cases}$$

Для завершения доказательства остается применить к функции f теорему 1.

Множество значений старшего показателя Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$ семейств из $\mathcal{K}_n^*$ описывает

С л е д с т в и е 2. *Множество $M\subset\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда является множеством значений старшего показателя Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$ некоторого семейства из $\mathcal{K}_n^*$, когда оно является суслинским множеством, содержащим нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку, согласно лемме 2, функция $\lambda_n(\mu A)$ переменной $\mu\in\mathbb{R}$ – функция класса $(*,G_\delta)$, то она является бэровской функцией, а значит, множество ее значений – суслинское множество [7, с. 255]. В силу условия 2) теоремы 2 оно содержит нуль. Необходимость доказана. Докажем достаточность. Так как M – суслинское множество расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$, а ограничивающее отображение ℓ – гомеоморфизм, то $\ell(M)$ – суслинское множество прямой $\mathbb{R}$. Поэтому [7, с. 256] существует функция первого бэровского класса $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (и даже полунепрерывная функция [16, 17]), для которой $\varphi(\mathbb{R})=\ell(M)$. Тогда $\psi=\ell^{-1}\circ\varphi\circ\ln$ – функция первого бэровского класса $(0,+\infty)\to\overline{\mathbb{R}}$, множество значений которой совпадает с множеством M. Следовательно, функция f, определяемая соотношениями

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in(-\infty,0],\\ \psi(x) & \text{при } x\in(0,+\infty),\end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Осталось воспользоваться теоремой 2.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. А. Барабанову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

Список использованной литературы

1. *Ляпунов, А. М.* Собрание сочинений: в 6 т. / А. М. Ляпунов. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954–1959. – Т. 2. – 1956.
2. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов [и др.]. – М.: Наука, 1966.
3. *Изобов, Н. А.* О существовании линейной сингулярной системы с неограниченным по мере экспоненциальным характеристическим множеством / Н. А. Изобов, С. Г. Красовский // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 8. – С. 1049–1055.
4. *Красовский, С. Г.* О спектральных характеристических сигма-множествах четной размерности и положительной меры / С. Г. Красовский // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 856–857.
5. *Красовский, С. Г.* Критерий инвариантности характеристических показателей линейных систем с малым параметром при производной / С. Г. Красовский // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 1315–1324.
6. *Зубов, В. И.* Колебания и волны / В. И. Зубов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989.
7. *Хаусдорф, Ф.* Теория множеств / Ф. Хаусдорф. – М.; Л.: ОНТИ, 1937.
8. *Куратовский, К.* Топология: в 2 т. / К. Куратовский. – М.: Мир, 1966–1969. – Т. 1.– 1966.
9. *Карпук, М. В.* О старшем показателе Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем при производной как функции параметра / М. В. Карпук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 4. – С. 15–24.
10. *Барабанов, Е. А.* О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем / Е. А. Барабанов // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1067–1084.
11. *Барабанов, Е. А.* Строение множеств устойчивости и асимптотической устойчивости семейств линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной. I / Е. А. Барабанов // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 611–625.
12. *Карпук, М. В.* Показатели Ляпунова семейств метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения / М. В. Карпук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1332–1338.
13. *Далецкий, Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Мир, 1970.
14. *Барабанов, Е. А.* Множества правильности и устойчивости однопараметрических семейств линейных дифференциальных систем / Е. А. Барабанов, А. Ф. Касабуцкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 67–75.
15. *Касабуцкий, А. Ф.* О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром / А. Ф. Касабуцкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 58–67.
16. *Барабанов, Е. А.* Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы / Е. А. Барабанов // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 11. – С. 1843–1853.
17. *Барабанов, Е. А.* Строение множества характеристических показателей Ляпунова экспоненциально устойчивых квазилинейных систем / Е. А. Барабанов, И. А. Волков // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 1. – С. 3–19.

Поступила в редакцию 22.07.2015